

# Graf

(Bag.1)

Bahan Kuliah

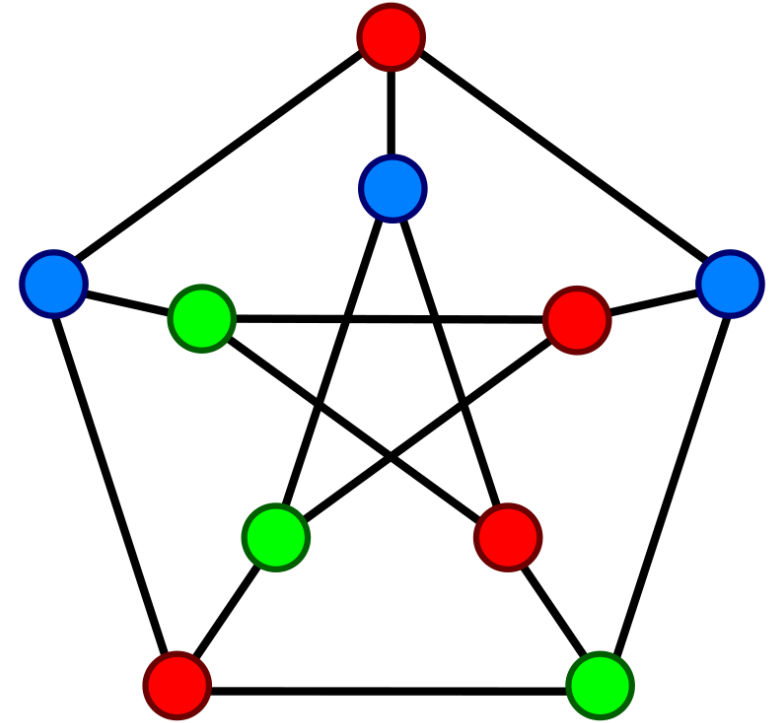
IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

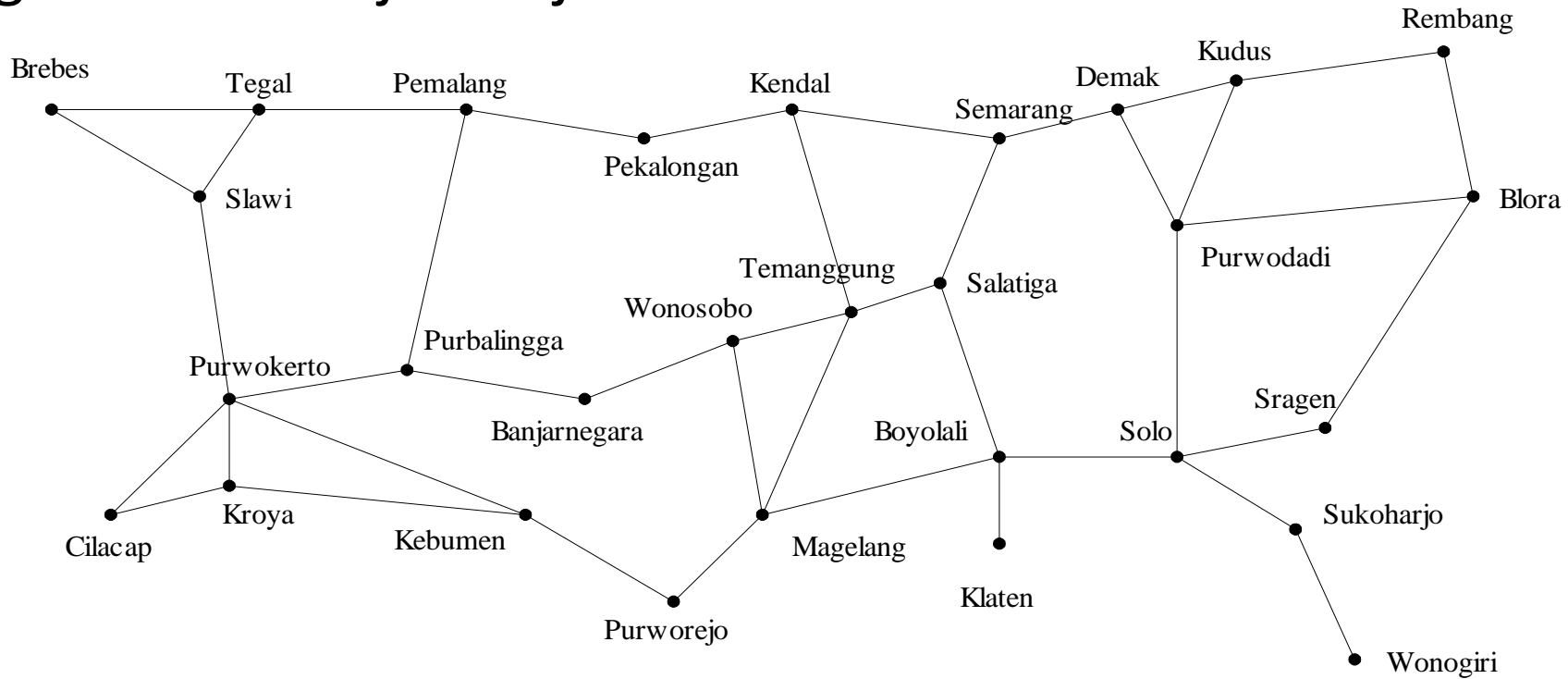
STEI-ITB

(Update 2023)



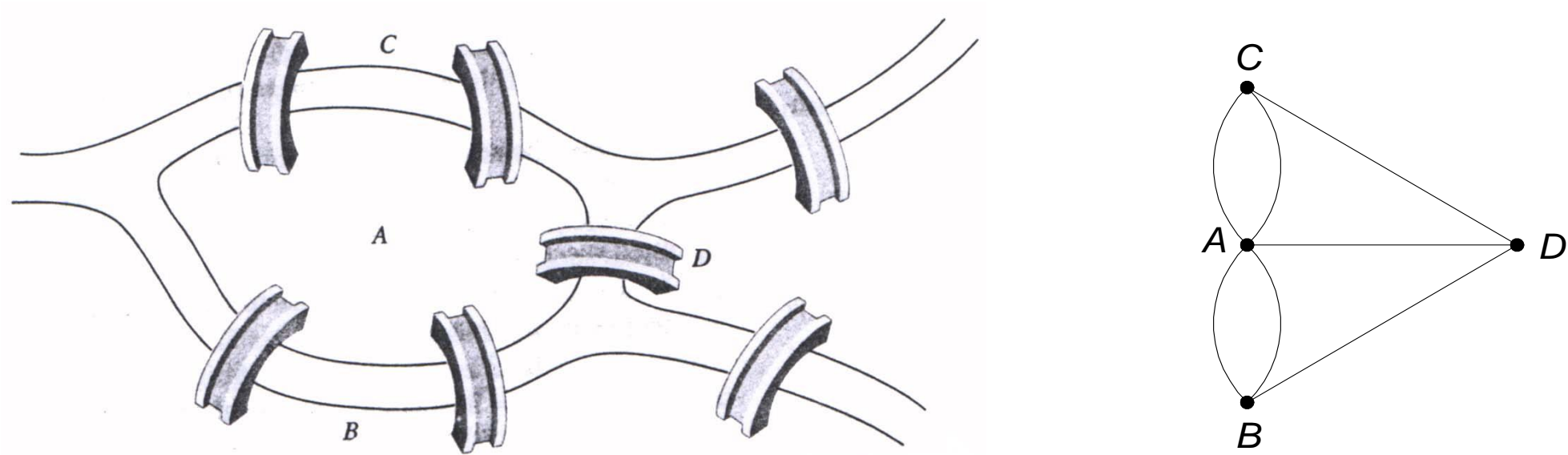
# Pendahuluan

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.



Gambar sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.

- Sejarah graf: Persoalan jembatan Königsberg (tahun 1736)



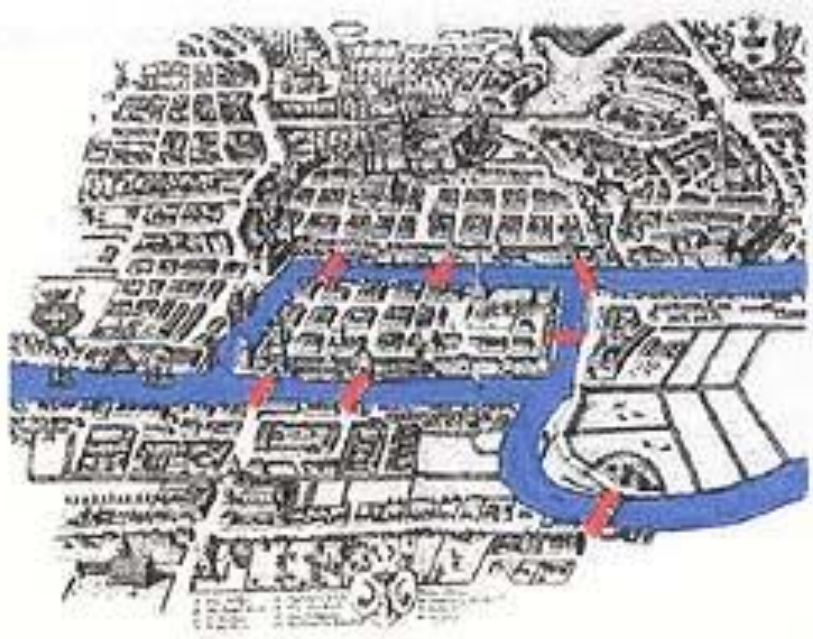
Gambar 2. Kiri: Masalah Jembatan Königsberg; Kanan: graf persoalan

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:

Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan

Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan

Persoalan: Bisakah orang melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

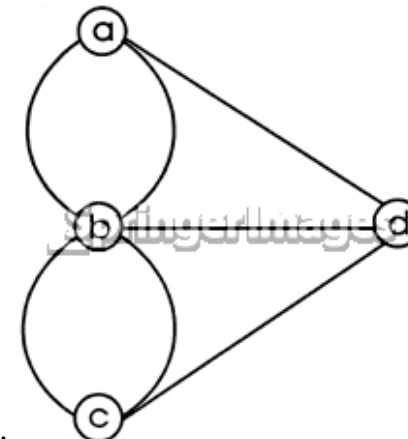
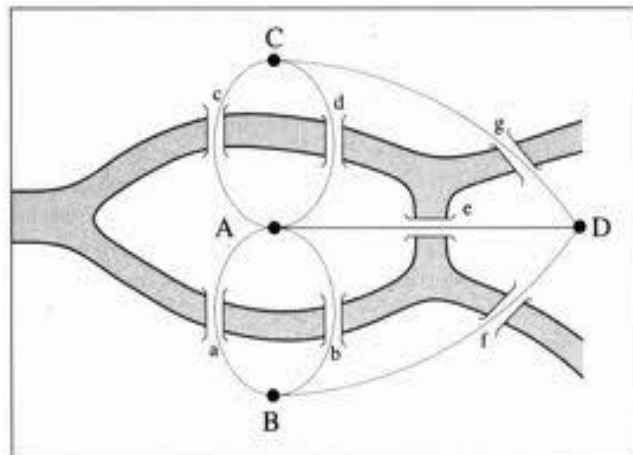


## Konigsberg Bridge Problem



Leonhard Euler

15 April 1707 – 18 September 1783



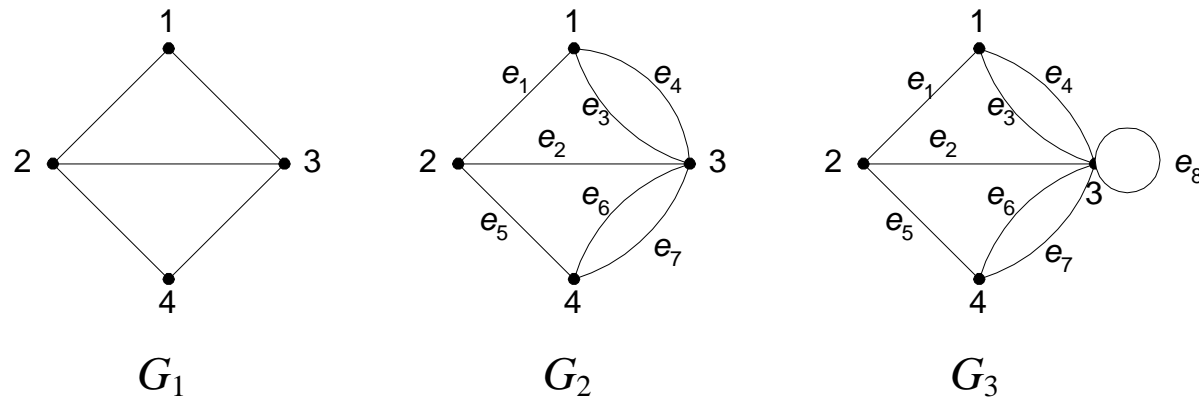


# Definisi Graf

Graf  $G = (V, E)$ , yang dalam hal ini:

$V$  = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)  
=  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$E$  = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul  
=  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$



**Gambar 2.** (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

**Contoh 1.** Pada Gambar 2,  $G_1$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

$G_2$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$$

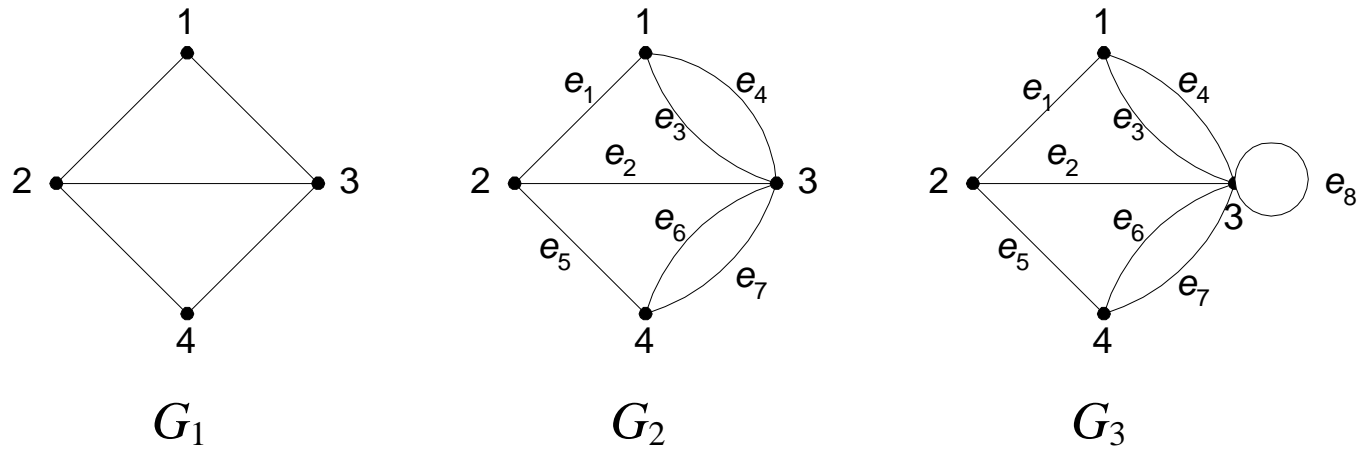
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$$

$G_3$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$$

$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$$



**Gambar 2.** (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- Pada  $G_2$ , sisi  $e_3 = (1, 3)$  dan sisi  $e_4 = (1, 3)$  dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.
- Pada  $G_3$ , sisi  $e_8 = (3, 3)$  dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

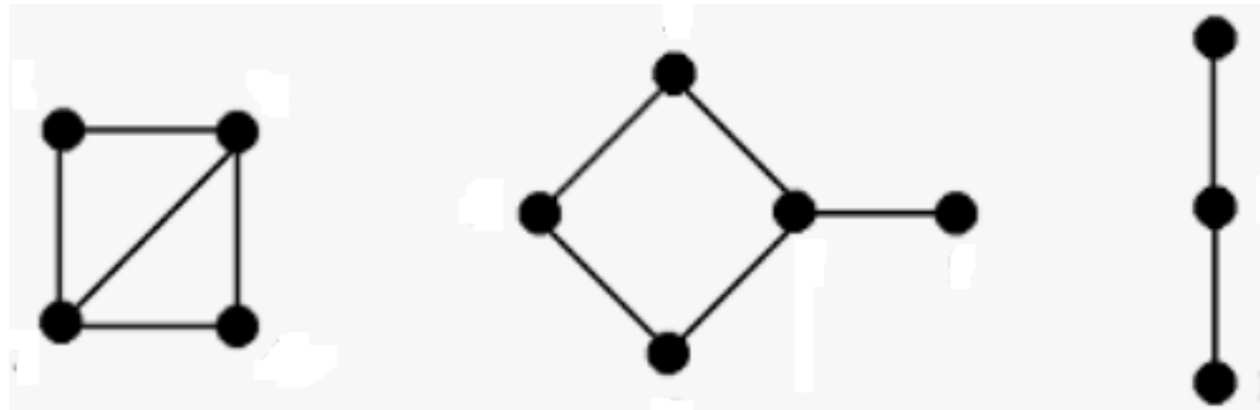


# Jenis-jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

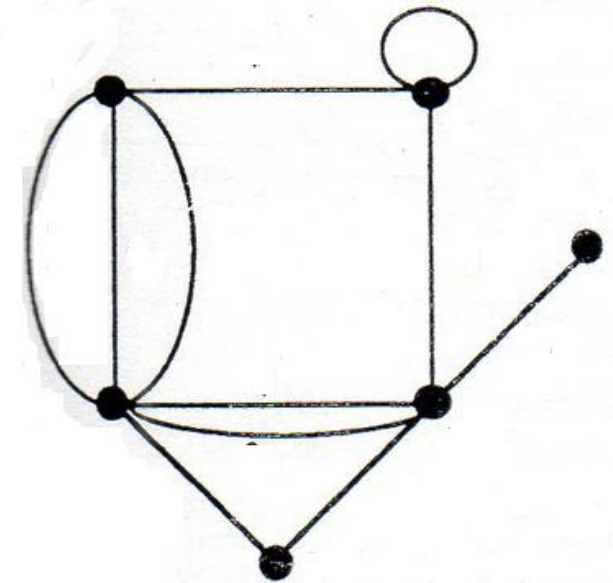
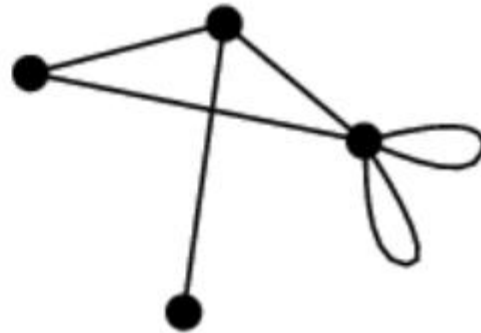
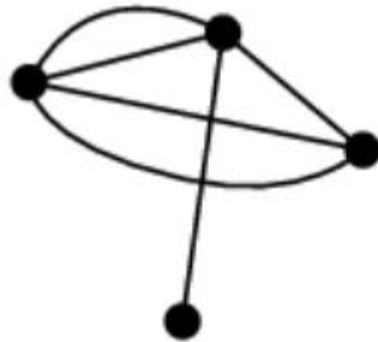
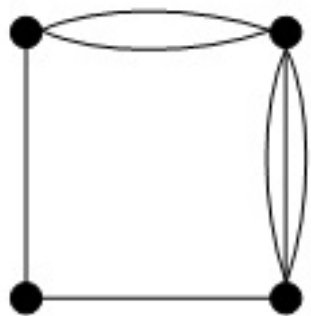
## 1. Graf sederhana (*simple graph*).

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana.



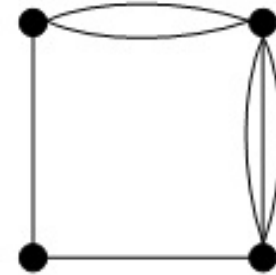
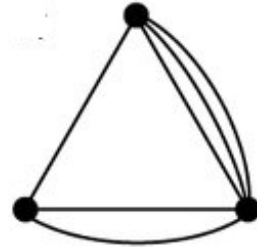
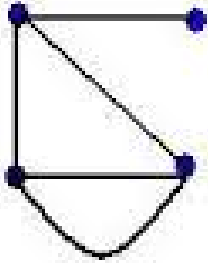
## 2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*).

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*).

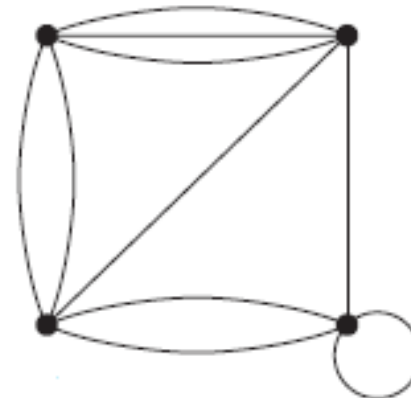
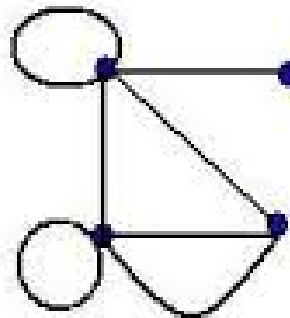
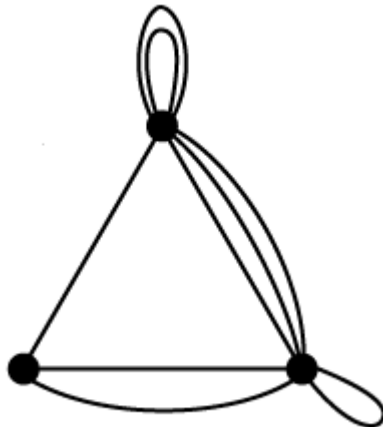


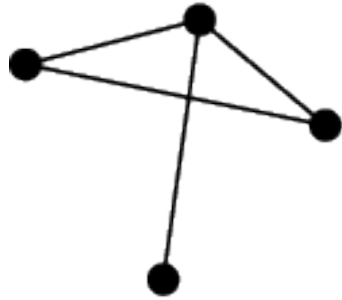
Graf tak-sederhana dibedakan lagi menjadi:

1. Graf ganda (*multi-graph*) → Graf mengandung sisi ganda

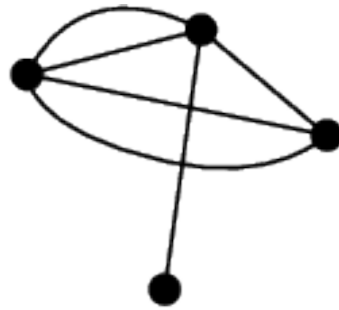


2. Graf semu (*pseudo-graph*) → Graf mengandung sisi gelang

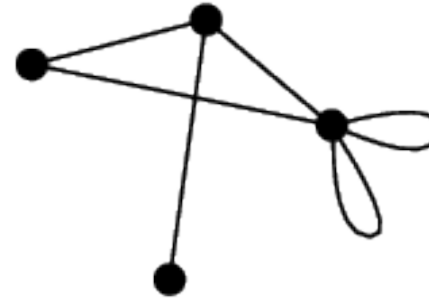




*simple graph*

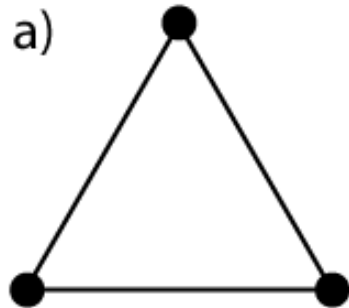


*nonsimple graph  
with multiple edges*

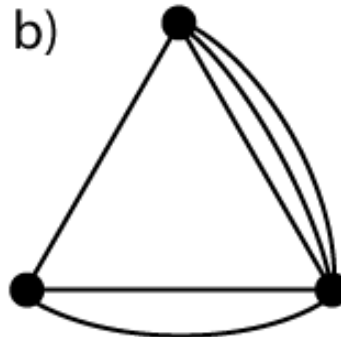


*nonsimple graph  
with loops*

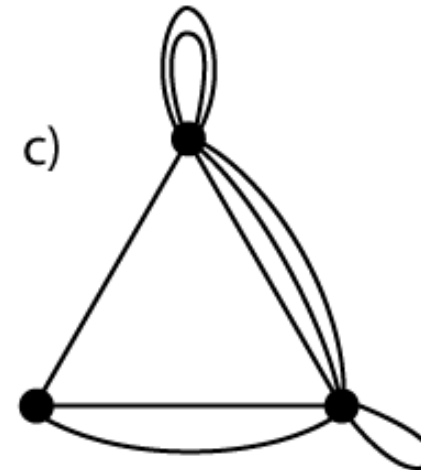
Sumber: Wolfram



Graf sederhana



Graf ganda

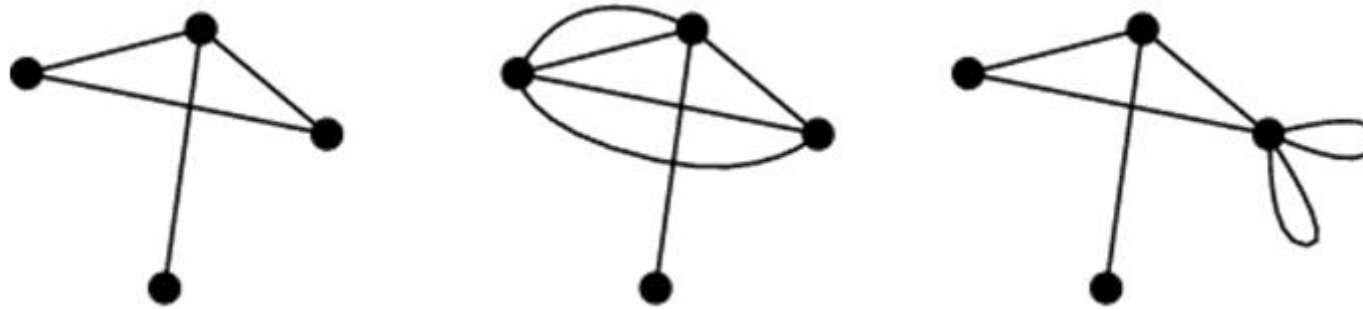


Graf semu

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dibedakan atas 2 jenis:

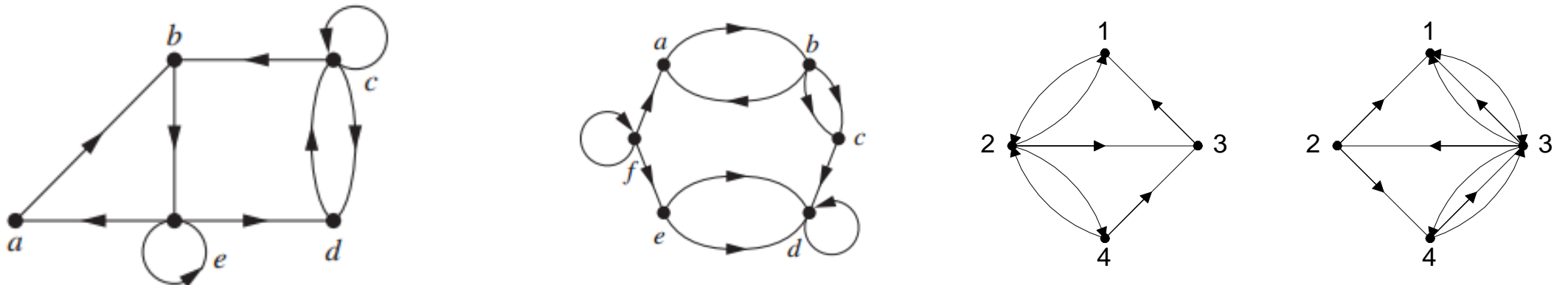
### 1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

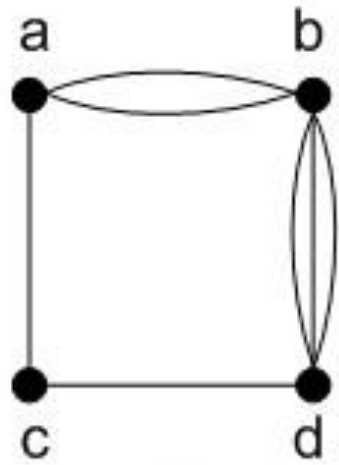
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.



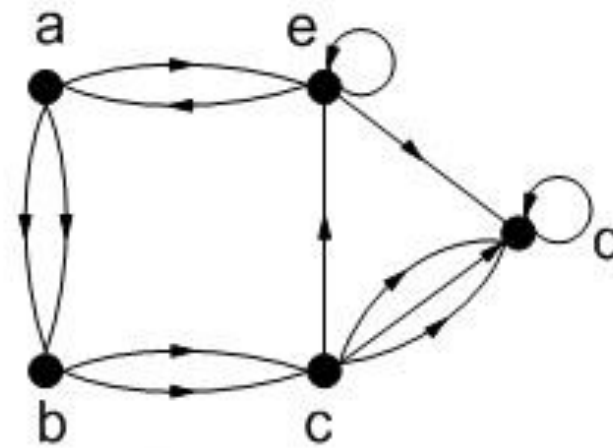
### 2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.



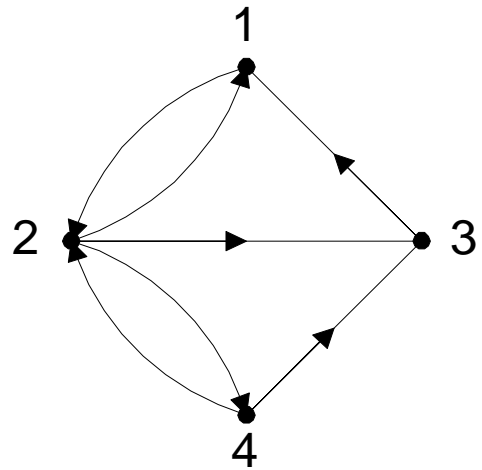


G1

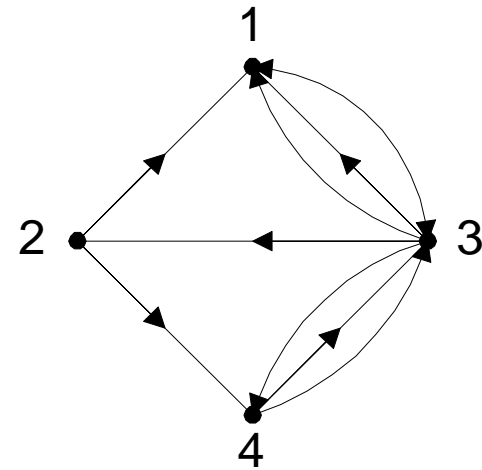


G2

G1 : graf tak-berarah;      G2 : Graf berarah



(a)  $G_4$



(b)  $G_5$

**Gambar** (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

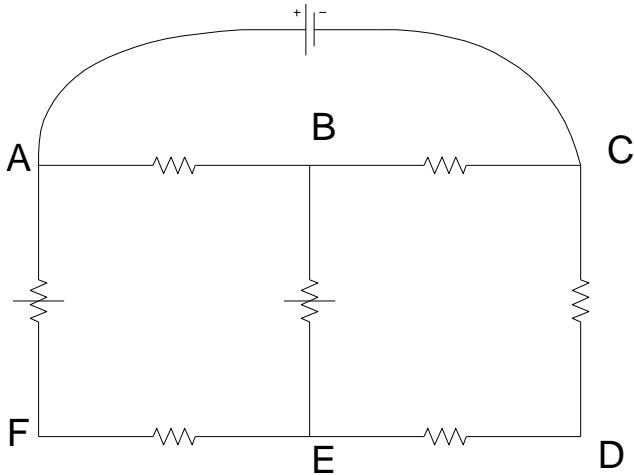
**Tabel 1** Jenis-jenis graf

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Berarah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Berarah	Ya	Ya

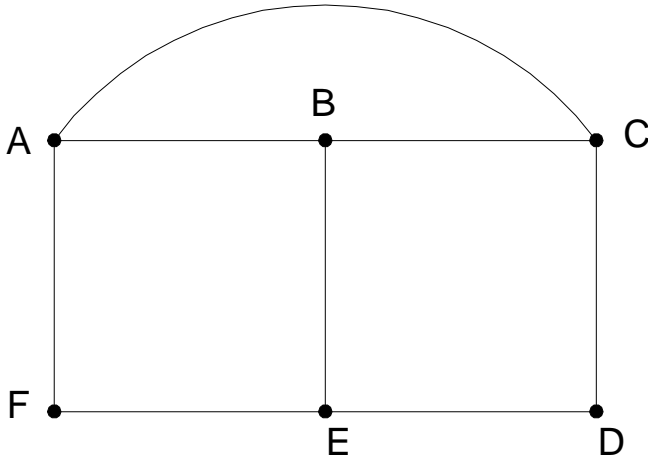


# Contoh Penerapan Graf

## 1. Rangkaian listrik.



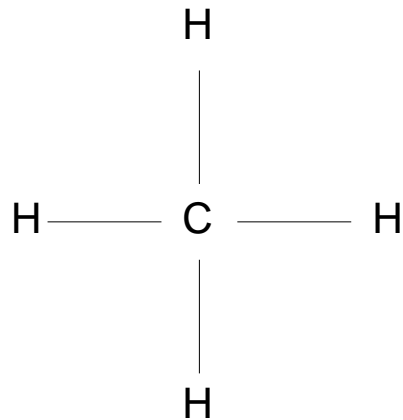
(a)



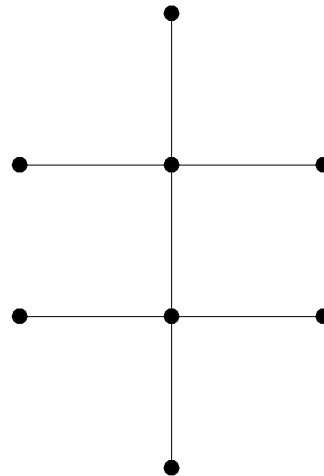
(b)

## 2. *Isomer senyawa kimia karbon*

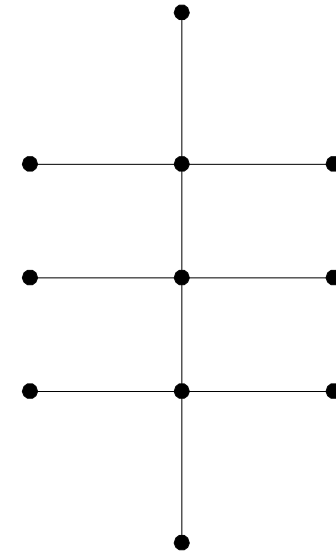
metana ( $\text{CH}_4$ )



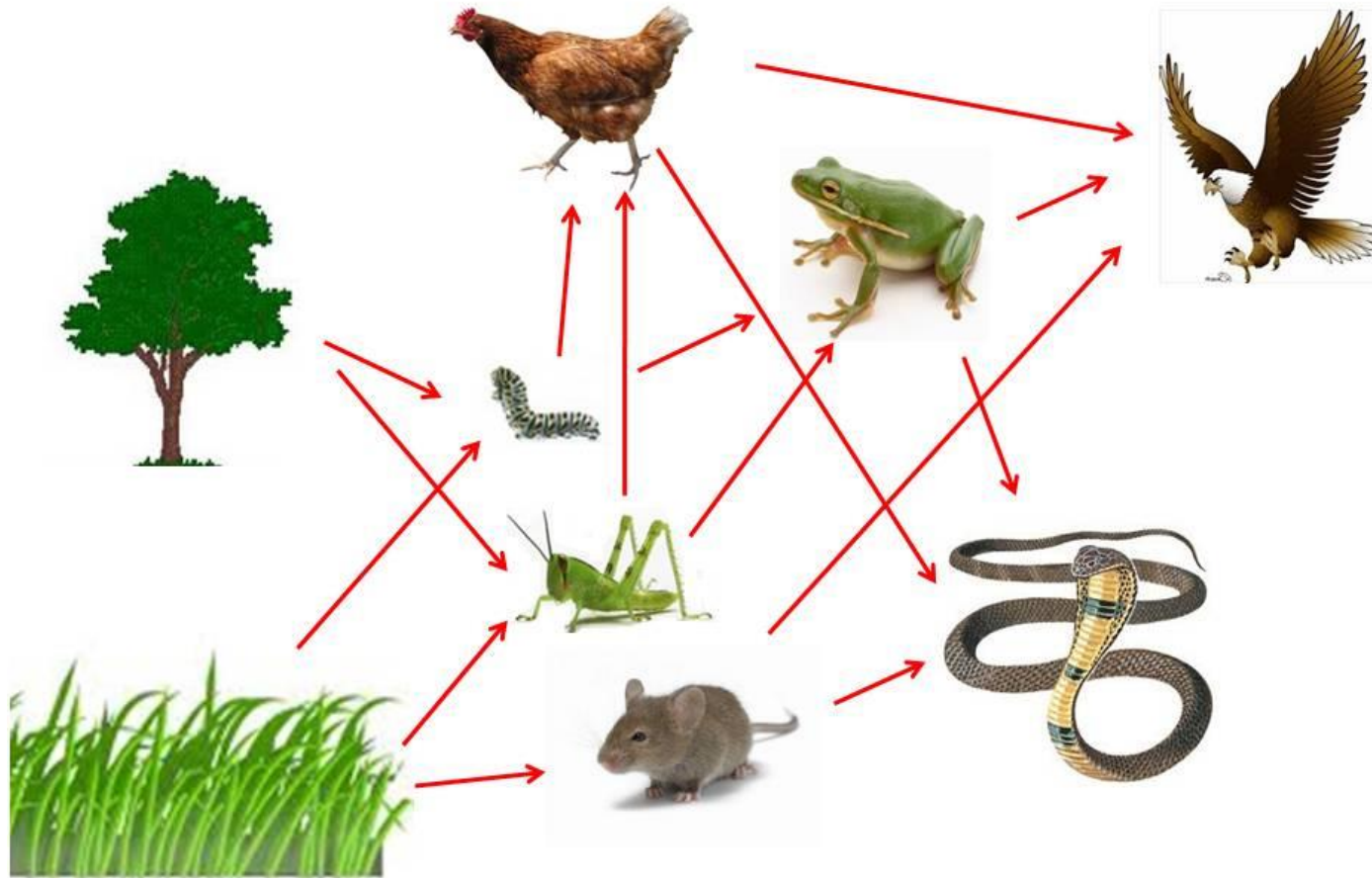
etana ( $\text{C}_2\text{H}_6$ )



propana ( $\text{C}_3\text{H}_8$ )

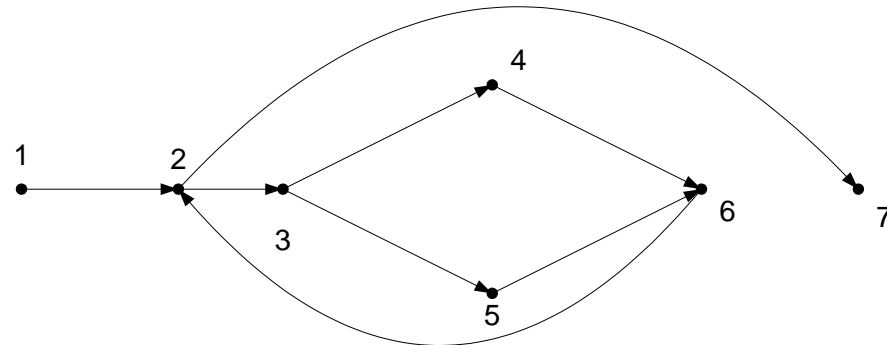


### 3. Jejaring makanan (Biologi)



## 4. Pengujian program

```
read(x);  
while x <> 9999 do  
  begin  
    if x < 0 then  
      writeln('Masukan tidak boleh negatif')  
    else  
      x:=x+10;  
      read(x);  
    end;  
  writeln(x);
```



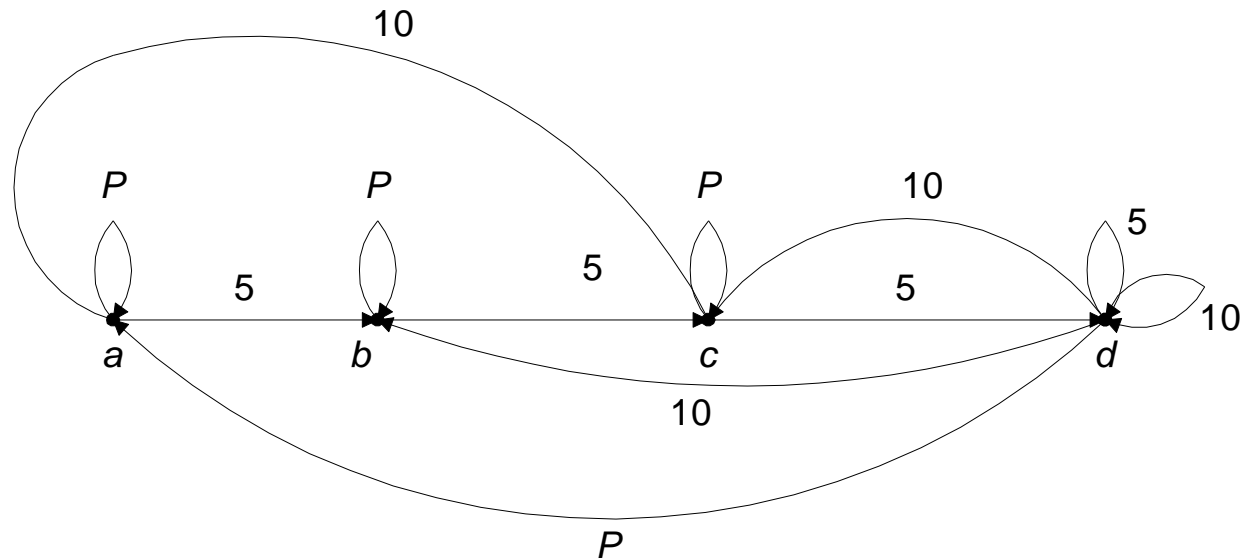
Keterangan:

1 : read(x)	5 : x := x + 10
2 : x <> 9999	6 : read(x)
3 : x < 0	7 : writeln(x)
4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');	

## 5. Pemodelan Mesin Jaja (*vending Machine*)



Graf kelakuan mesin jaja: (misal mesin jaja yang menjual coklat 15 sen)



Keterangan:

$a$  : 0 sen dimasukkan

$b$  : 5 sen dimasukkan

$c$  : 10 sen dimasukkan

$d$  : 15 sen atau lebih dimasukkan

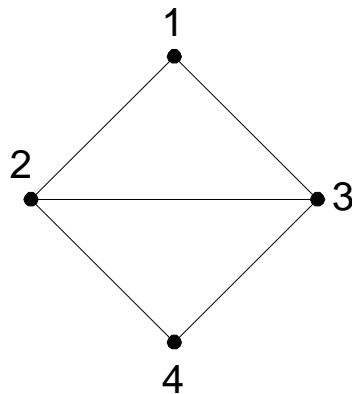
# Latihan

- Gambarkan graf yang menggambarkan sistem pertandingan sistem  $\frac{1}{2}$  kompetisi (*round-robin tournaments*) yang diikuti oleh 5 tim.

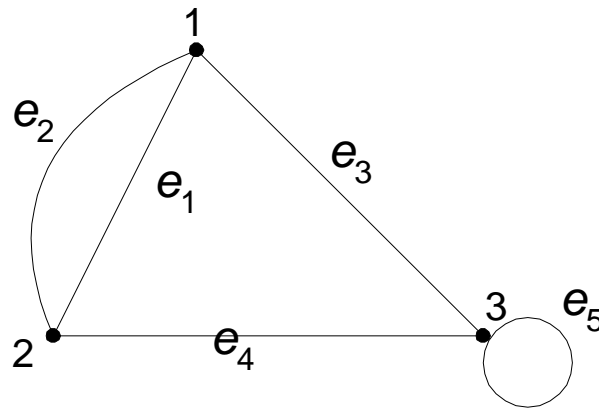
# Terminologi di dalam Graf

## 1. Ketetangaan (*Adjacent*)

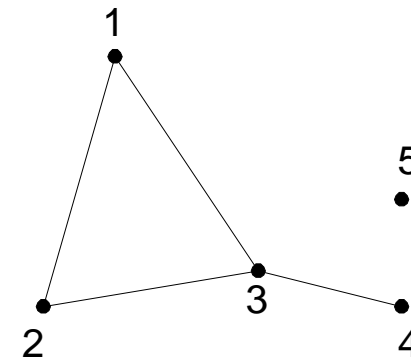
Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung. Tinjau graf  $G_1$  : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3, simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



$G_1$



$G_2$



$G_3$

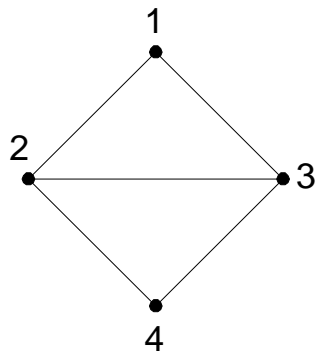


## 2. Bersisian (*Incidency*)

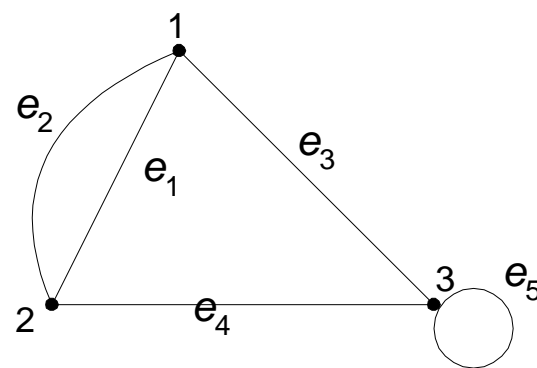
Untuk sembarang sisi  $e = (v_j, v_k)$  dikatakan

$e$  bersisian dengan simpul  $v_j$ , atau  
 $e$  bersisian dengan simpul  $v_k$

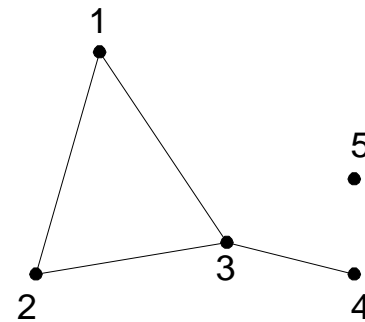
Tinjau graf  $G_1$ : sisi  $(2, 3)$  bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,  
sisi  $(2, 4)$  bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,  
tetapi sisi  $(1, 2)$  tidak bersisian dengan simpul 4.



$G_1$



$G_2$

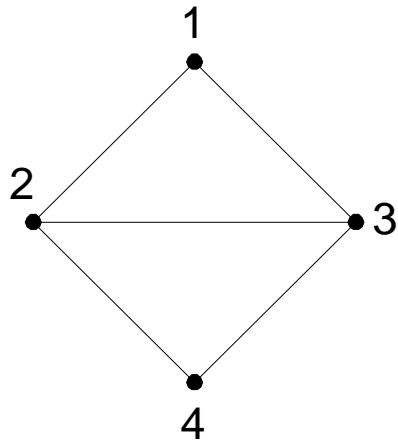


$G_3$

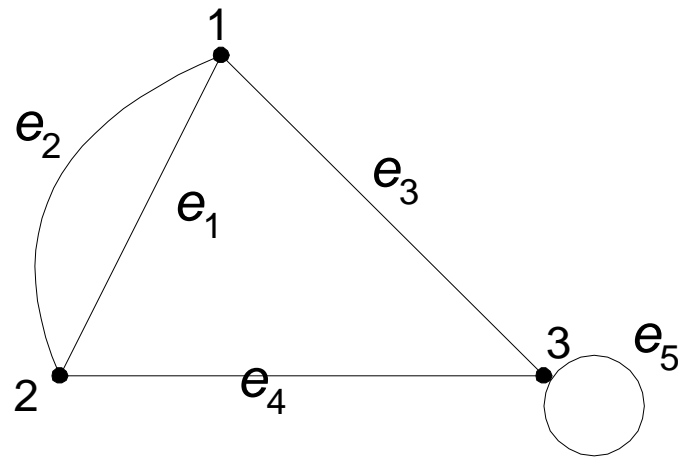
### 3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

*Simpul terpencil* ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

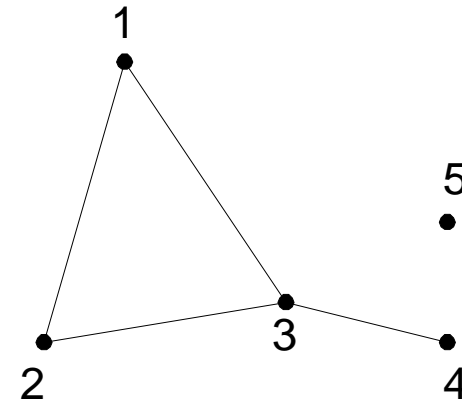
Tinjau graf  $G_3$ : simpul 5 adalah simpul terpencil.



$G_1$



$G_2$

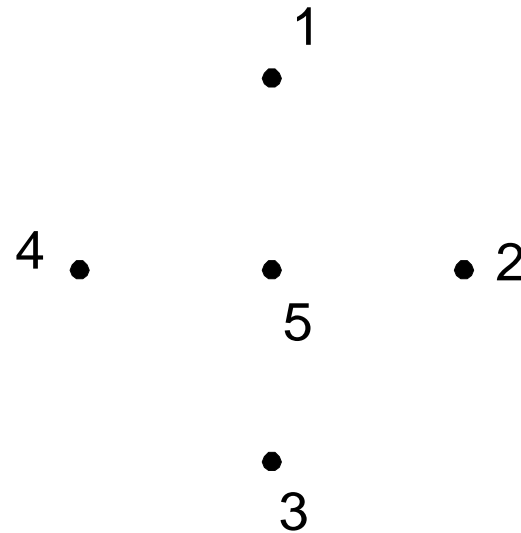


$G_3$

#### 4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong ( $N_n$ ).

Graf  $N_5$  :



## 5. Derajat (*Degree*)

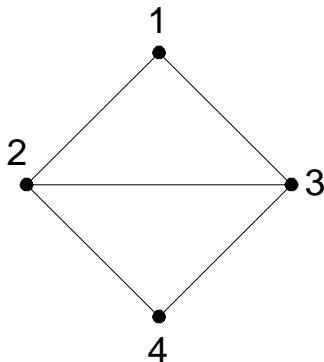
*Derajat* suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi:  $d(v)$

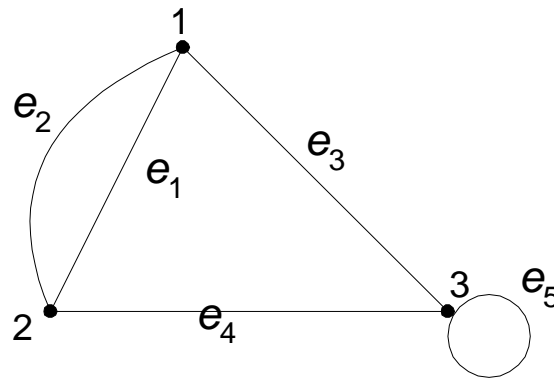
Tinjau graf  $G_1$ :  $d(1) = d(4) = 2$   
 $d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf  $G_3$ :  $d(5) = 0 \rightarrow$  simpul terpencil  
 $d(4) = 1 \rightarrow$  simpul anting-anting (*pendant vertex*)

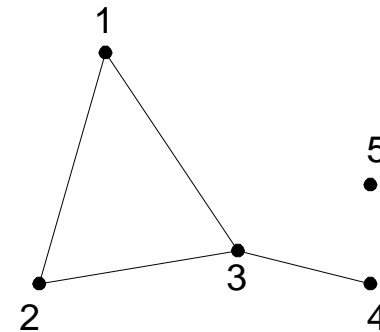
Tinjau graf  $G_2$ :  $d(1) = 3 \rightarrow$  bersisian dengan sisi ganda  
 $d(3) = 4 \rightarrow$  bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



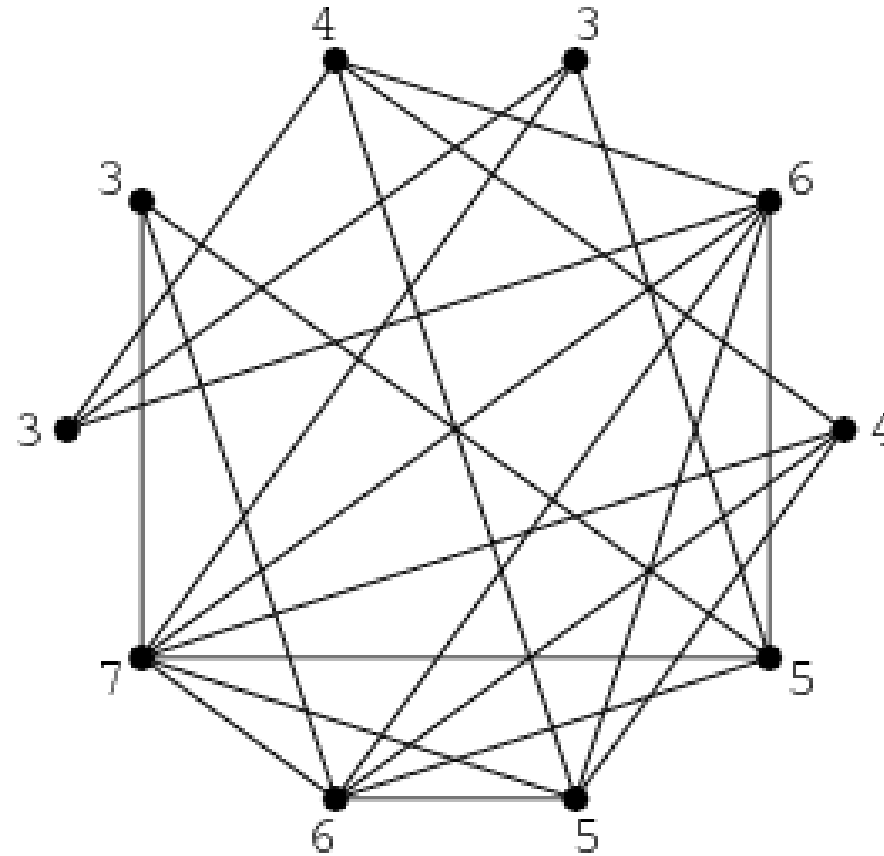
$G_1$



$G_2$

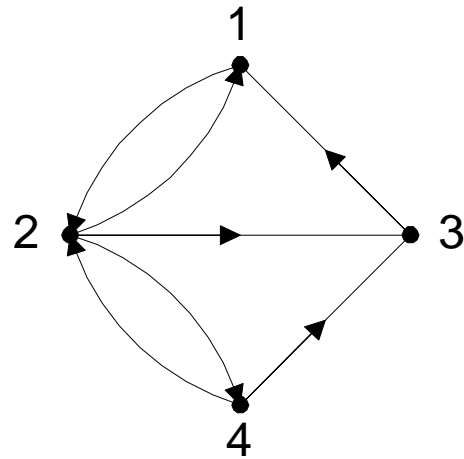


$G_3$

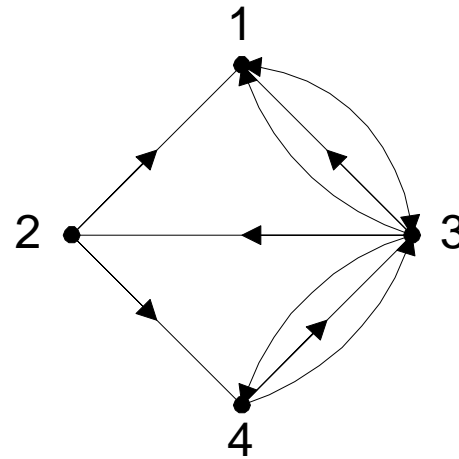


Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul

Pada graf beraarah, derajat simpul dibedakan lagi menjadi derajat masuk (in-degree) dan derajat keluar (out-degree)



$G_4$



$G_5$

Tinjau graf  $G_4$ :

$$\begin{aligned}d_{\text{in}}(1) &= 2; d_{\text{out}}(1) = 1 \\d_{\text{in}}(2) &= 2; d_{\text{out}}(2) = 3 \\d_{\text{in}}(3) &= 2; d_{\text{out}}(3) = 1 \\d_{\text{in}}(4) &= 1; d_{\text{out}}(4) = 2\end{aligned}$$

**Lemma Jabat Tangan.** Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

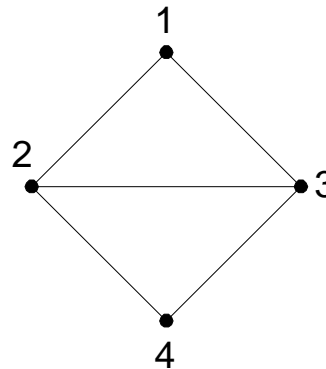
Dengan kata lain, jika  $G = (V, E)$ , maka  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$



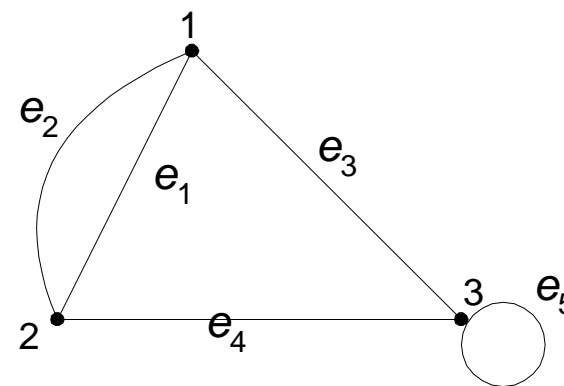
Tinjau graf  $G_1$ :  $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

Tinjau graf  $G_2$ :  $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

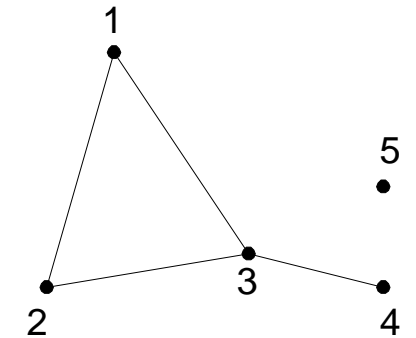
Tinjau graf  $G_3$ :  $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$   
 $= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$



$G_1$



$G_2$



$G_3$

- Akibat dari *lemma (corollary)*:

**Teorema:** Untuk sembarang graf  $G$ , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

- Jadi, menurut teorema ini, tidak mungkin sebuah graf memiliki simpul berderajat ganjil sejumlah ganjil



**Contoh 2.** Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

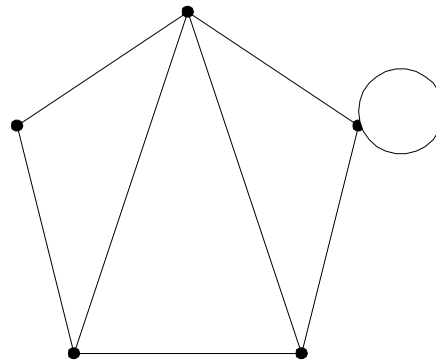
(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil  
( $2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9$ ).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap  
( $2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16$ ).



# Latihan

- Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 5, 2, 3, 2, 4

(b) 4, 4, 3, 2, 3

(c) 3, 3, 2, 3, 2

(d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Jawaban:

- (a) 5, 2, 3, 2, 4: Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5
- (b) 4, 4, 3, 2, 3: Mungkin [contoh banyak]
- (c) 3, 3, 2, 3, 2: Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)
- (d) 4, 4, 1, 3, 2: Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)

# Latihan (Kuis 2020)

Di labtek V terdapat 25 pesawat telepon. Apakah mungkin menghubungkan telepon-telepon tersebut sehingga setiap telepon terkoneksi dengan 7 telepon lainnya?

(Jawaban sesudah halaman ini)

## Jawaban:

Jika setiap telephone harus terkoneksi dengan 7 telephone lainnya, maka

- Setiap node memiliki derajat 7.
- Total derajat semua simpul =  $25 \times 7 = 175$  (25 node, dengan masing-masing node memiliki derajat 7)

Padahal, berdasarkan lemma jabat tangan

**Lemma Jabat Tangan.** Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika  $G = (V, E)$ , maka  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

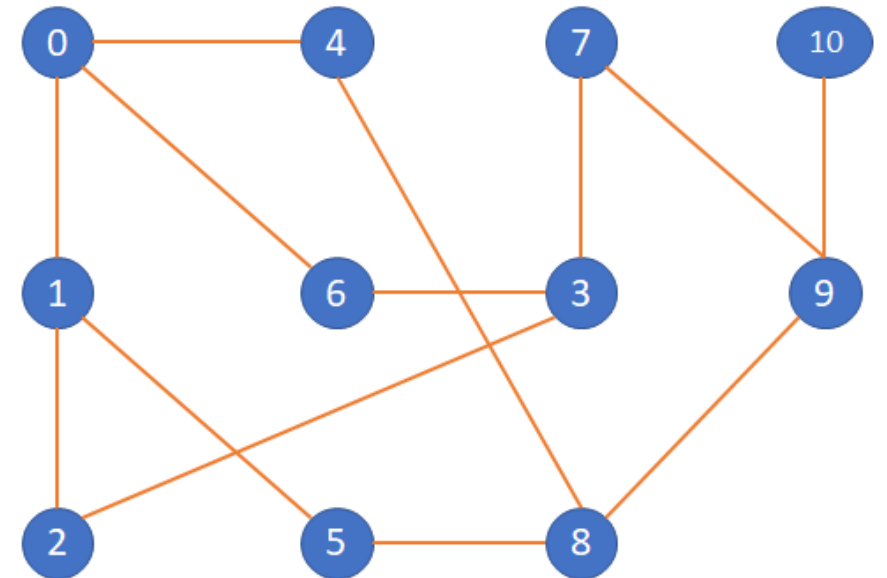
Total derajat semua simpul haruslah genap. Karena pada graf ini total derajat semua simpulnya bernilai 175 (ganjil), **Maka graf ini tidak mungkin dibentuk**

## 6. Lintasan (*Path*)

**Lintasan** yang panjangnya  $n$  dari simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  di dalam graf  $G$  ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf  $G$ .

Tinjau graf  $G$  berikut: lintasan 0, 6, 3, 7, 9, 10 adalah lintasan dari simpul 0 ke 10 melalui sisi  $(0, 6), (6, 3), (3, 7), (7, 9), (9, 10)$ .

**Panjang lintasan** adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 0, 6, 3, 7, 9, 10 pada  $G$  memiliki panjang 5.



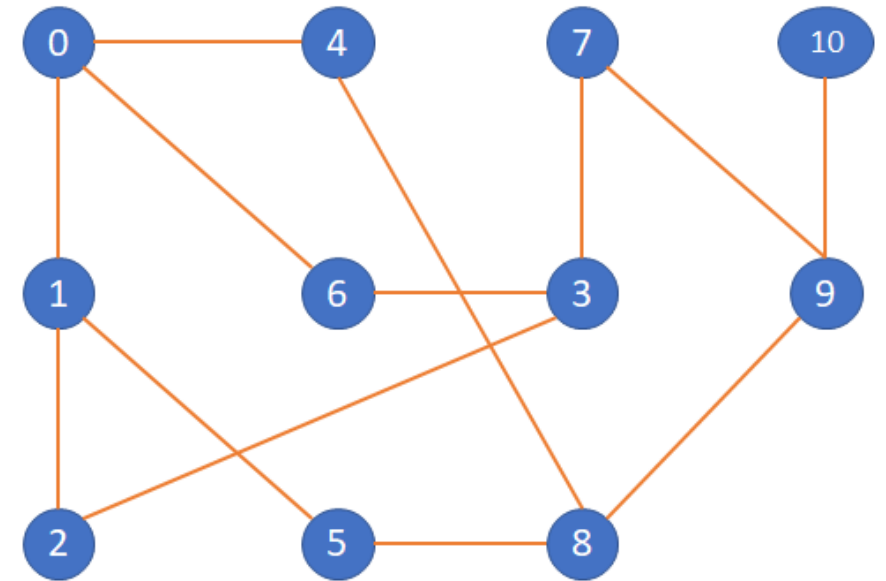
Unweighted Graph

## 7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

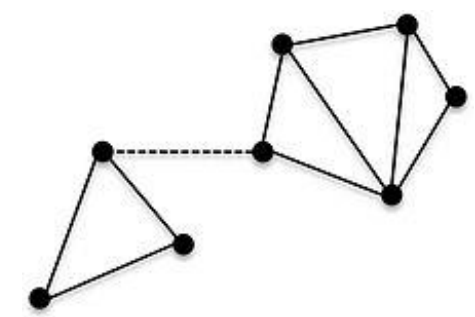
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf  $G$ : lintasan 0, 4, 8, 5, 1, 0 adalah sebuah sirkuit.

**Panjang sirkuit** adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 0, 4, 8, 5, 1, 0 pada  $G$  memiliki panjang 5.



Unweighted Graph

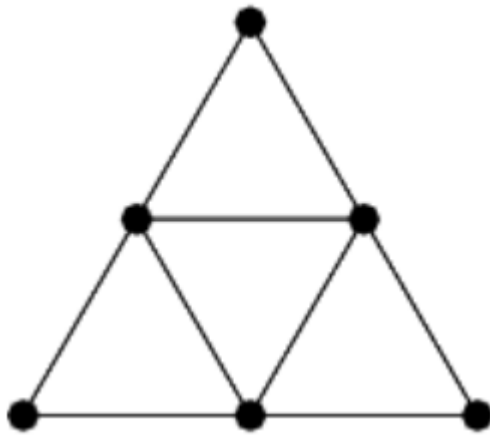


## 8. Kerterhubungan (*Connected*)

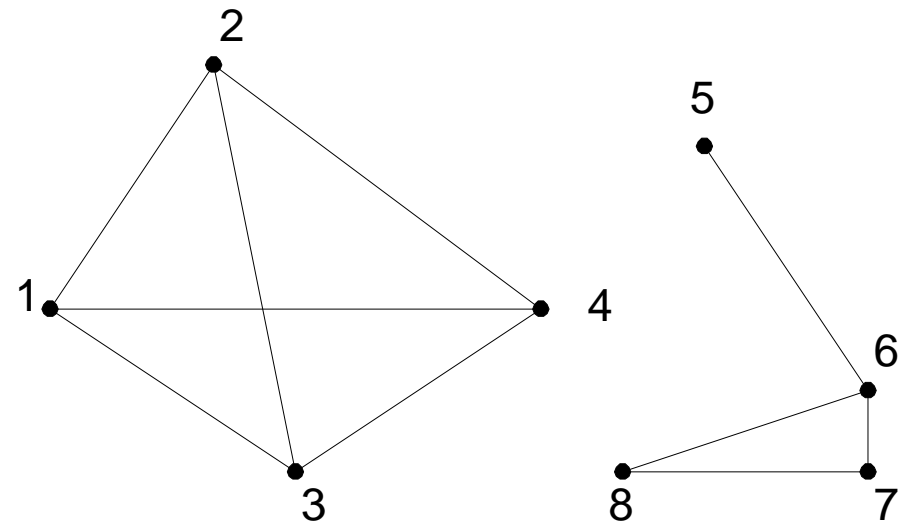
Dua buah simpul  $v_1$  dan simpul  $v_2$  disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari  $v_1$  ke  $v_2$ .

$G$  disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul  $v_i$  dan  $v_j$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ .

Jika tidak, maka  $G$  disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

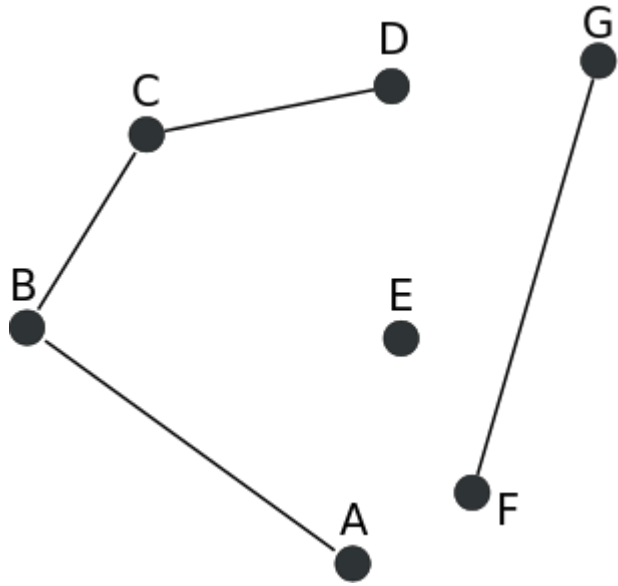


Contoh graf terhubung:

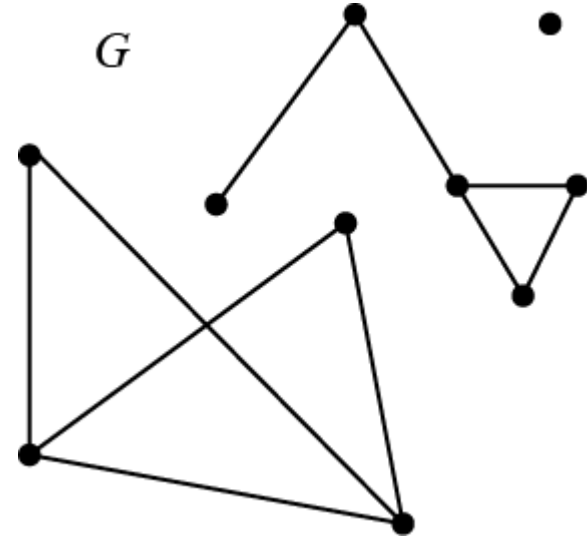


Contoh graf tak-terhubung:



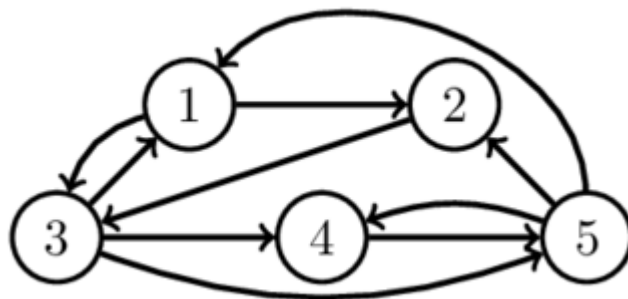


Graf tak-terhubung



Graf tak-terhubung

- Graf berarah  $G$  dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari  $G$  diperoleh dengan menghilangkan arahnya).
- Dua simpul,  $u$  dan  $v$ , pada graf berarah  $G$  disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari  $u$  ke  $v$  dan juga lintasan berarah dari  $v$  ke  $u$ .
- Jika  $u$  dan  $v$  tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka  $u$  dan  $v$  dikatakan **terhubung lemah** (*weakly connected*).

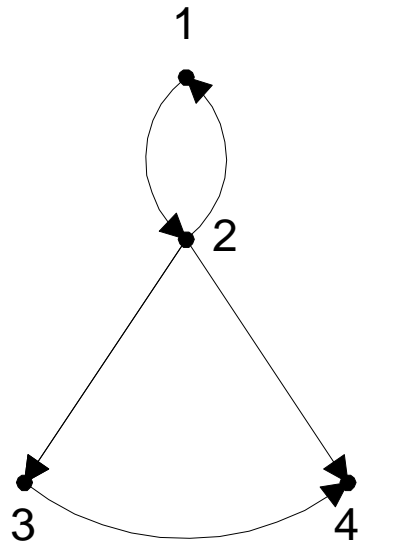


- Simpul 1 dan 4 terhubung kuat, karena ada lintasan dari 1 ke 4 dan lintasan dari 4 ke 1:

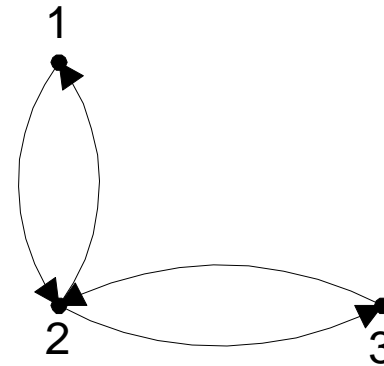
Lintasan dari 1 ke 4: 1, 2, 3, 4

Lintasan dari 4 ke 1: 4, 5, 1

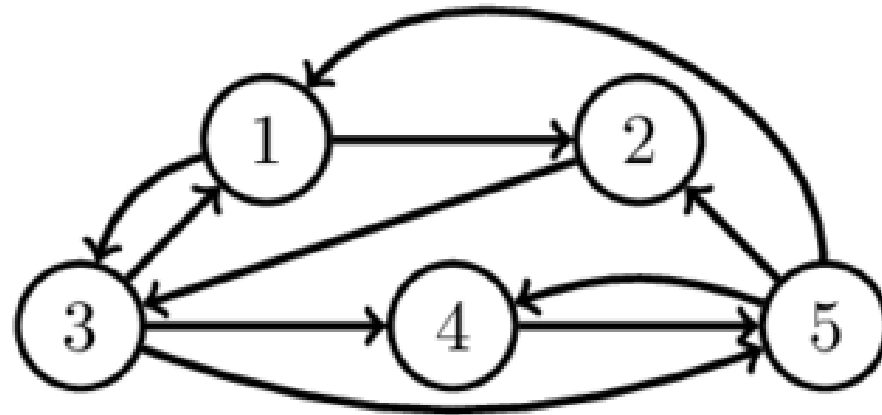
- Graf berarah  $G$  disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang  $u$  dan  $v$  di  $G$ , terhubung kuat. Kalau tidak,  $G$  disebut **graf terhubung lemah**.



Graf berarah  
terhubung lemah



Graf berarah  
terhubung kuat

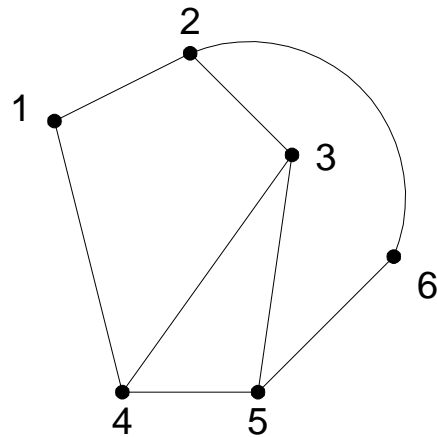


Graf berarah terhubung kuat: selalu ada lintasan dari sepasang simpul manapun.  
Periksa!

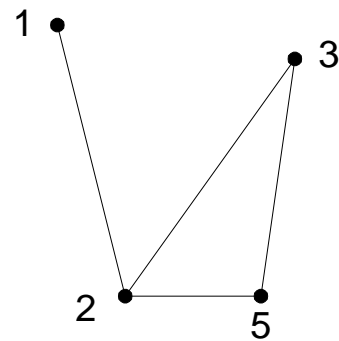
## 8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah sebuah graf.  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah **upagraf** (*subgraph*) dari  $G$  jika  $V_1 \subseteq V$  dan  $E_1 \subseteq E$ .

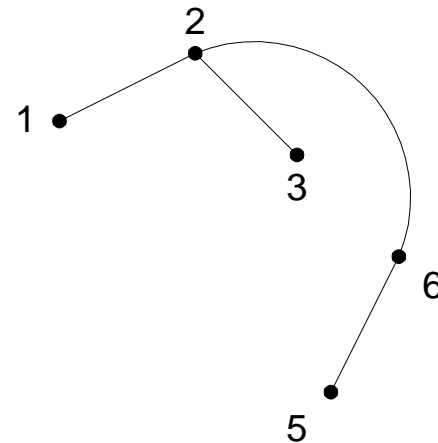
**Komplemen** dari upagraf  $G_1$  terhadap graf  $G$  adalah graf  $G_2 = (V_2, E_2)$  sedemikian sehingga  $E_2 = E - E_1$  dan  $V_2$  adalah himpunan simpul yang anggota-anggota  $E_2$  bersisian dengannya.



(a) Graf  $G_1$



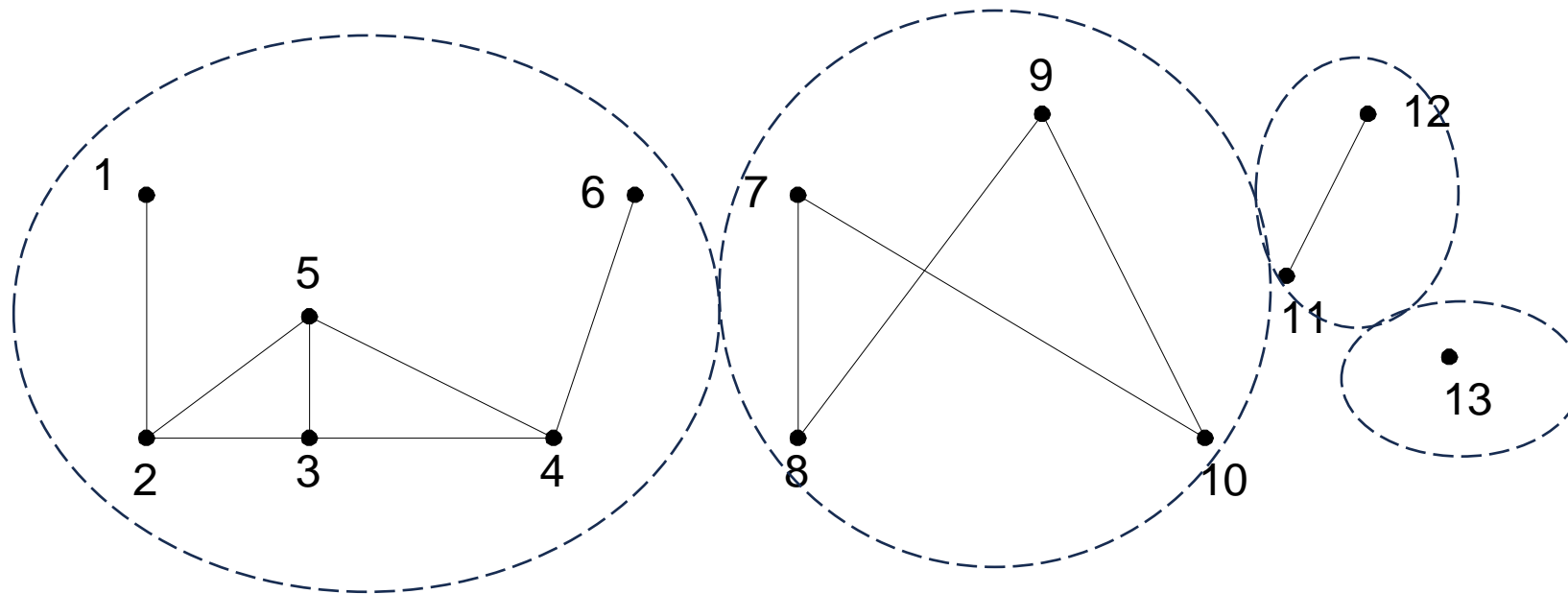
(b) Sebuah upagraf



(c) komplemen dari upagraf (b)

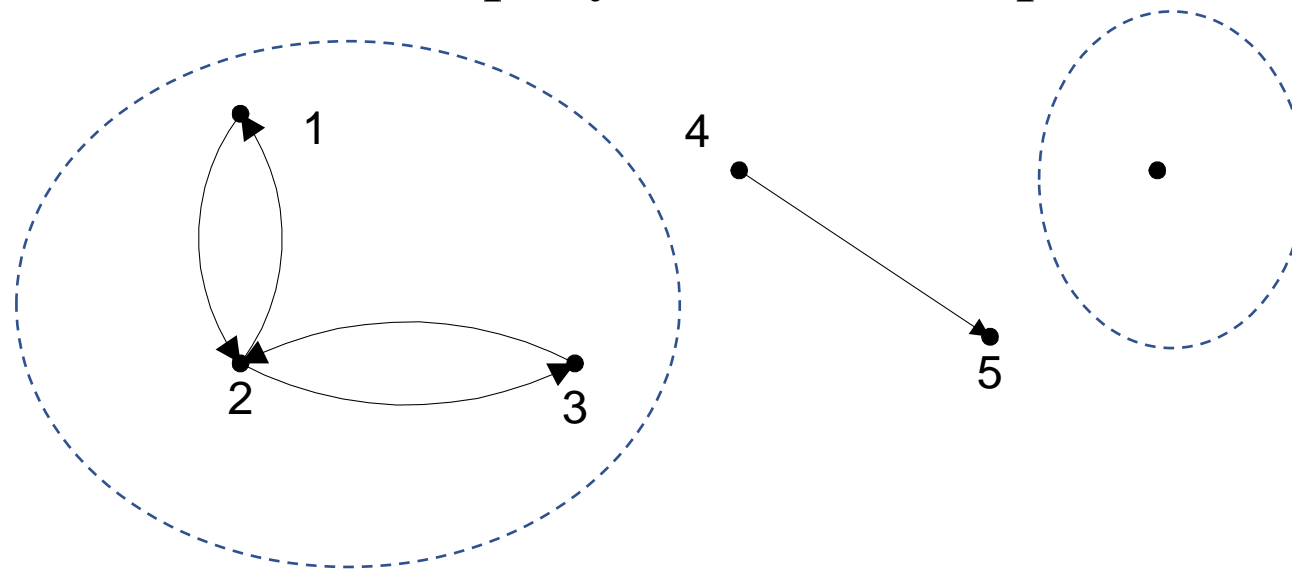
**Komponen** graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf  $G$ .

Graf  $G$  di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



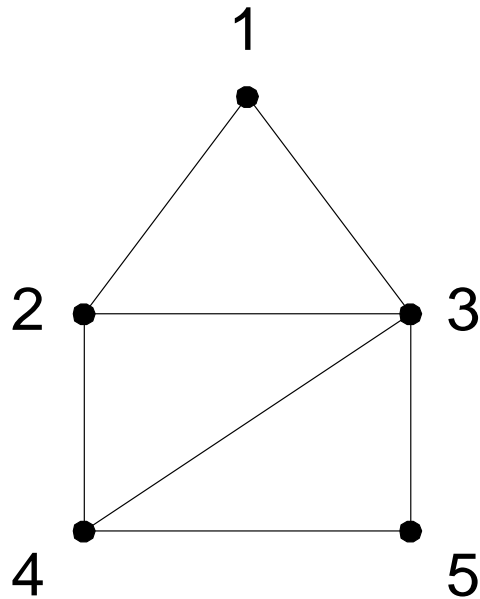
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:

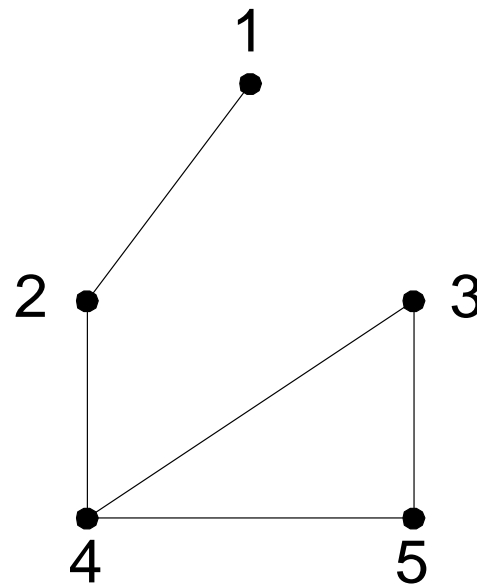


## 9. Upagraf Merentang (*Spanning Subgraph*)

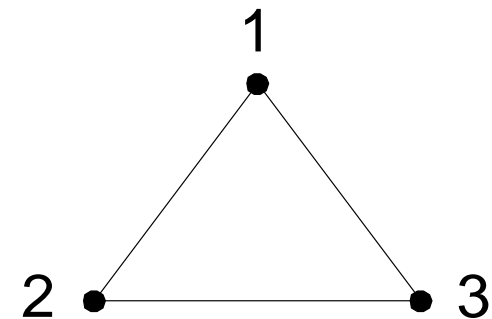
Upagraf  $G_1 = (V_1, E_1)$  dari  $G = (V, E)$  dikatakan **upagraf rentang** jika  $V_1 = V$  (yaitu  $G_1$  mengandung semua simpul dari  $G$ ).



(a) graf  $G$ ,



(b) upagraf merentang dari  $G$ ,



(c) bukan upagraf merentang dari  $G$

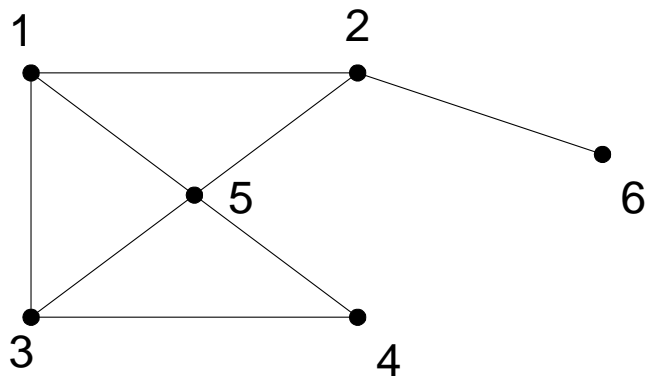


## 10. Cut-Set

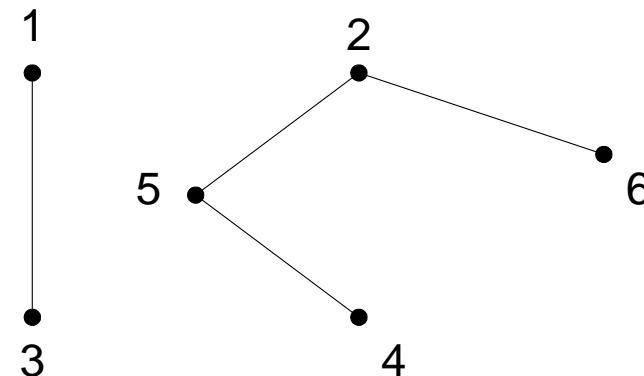
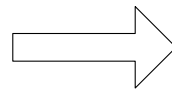
*Cut-set* dari graf terhubung  $G$  adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari  $G$  menyebabkan  $G$  tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah,  $\{(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)\}$  adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan  $\{(1,2), (2,5)\}$  juga adalah *cut-set*,  $\{(1,3), (1,5), (1,2)\}$  adalah *cut-set*,  $\{(2,6)\}$  juga *cut-set*, tetapi  $\{(1,2), (2,5), (4,5)\}$  bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya,  $\{(1,2), (2,5)\}$  adalah *cut-set*.



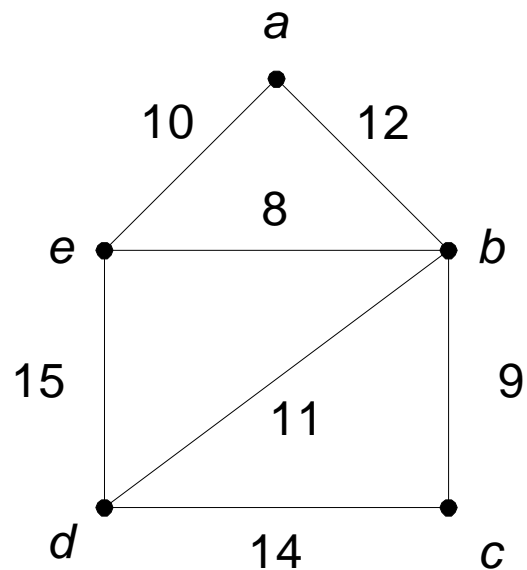
(a)



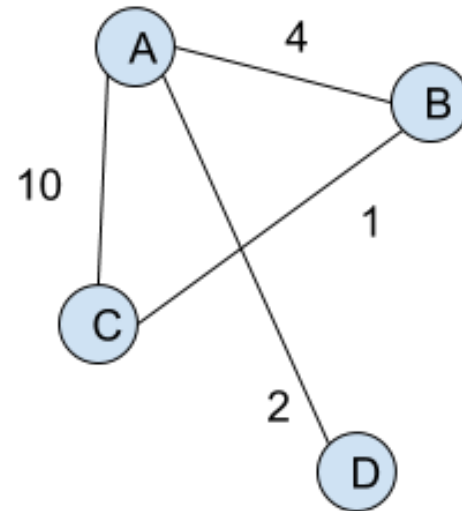
(b)

## 11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

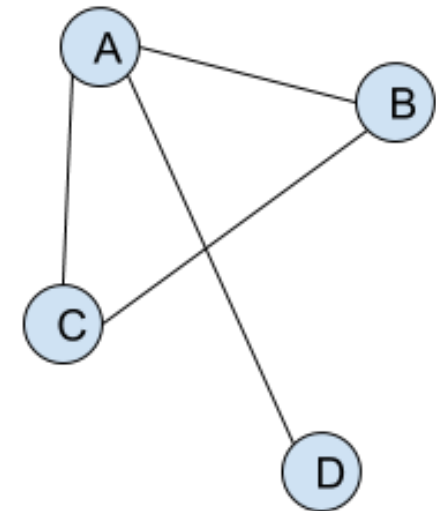
*Graf berbobot* adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Weighted Graph



Unweighted Graph



# Beberapa Graf Khusus

## a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

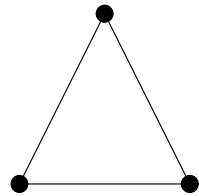
**Graf lengkap** ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan  $n$  buah simpul dilambangkan dengan  $K_n$ . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari  $n$  buah simpul adalah  $n(n - 1)/2$ .



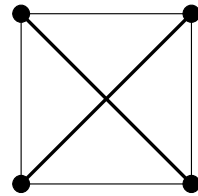
$K_1$



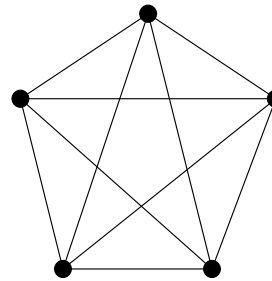
$K_2$



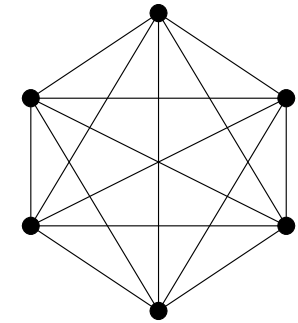
$K_3$



$K_4$



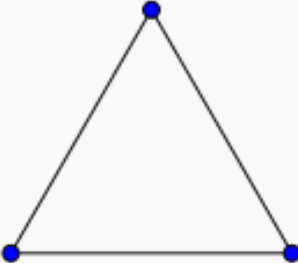
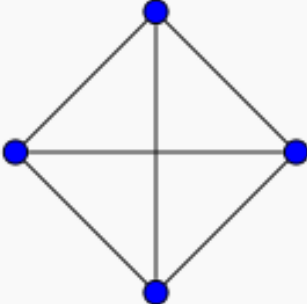
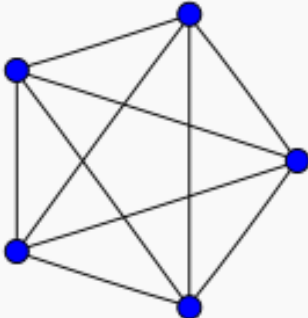
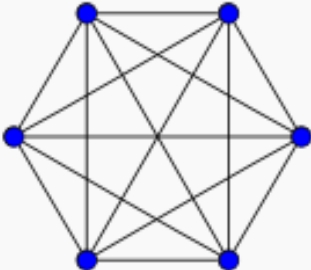
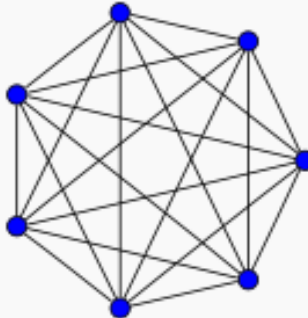
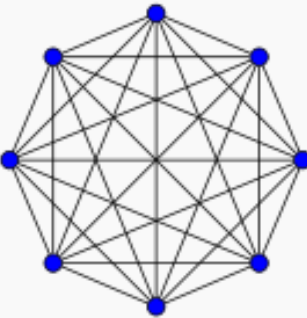
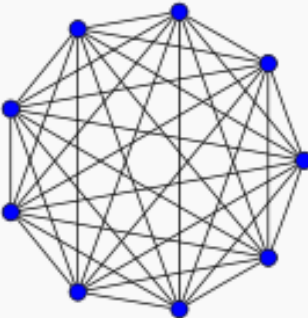
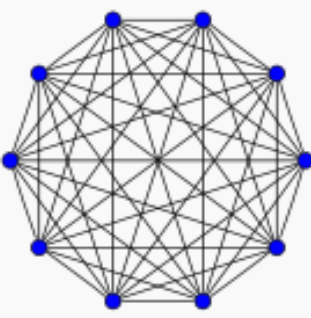
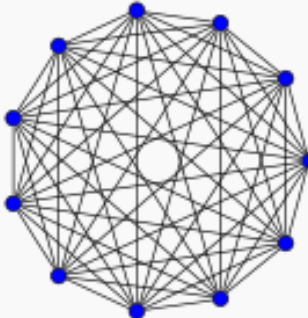
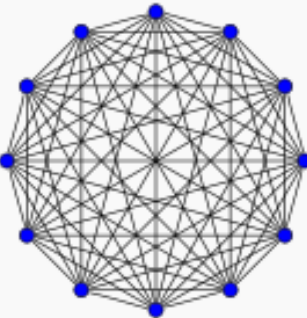


$K_5$



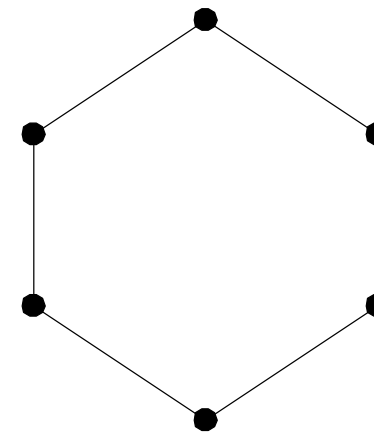
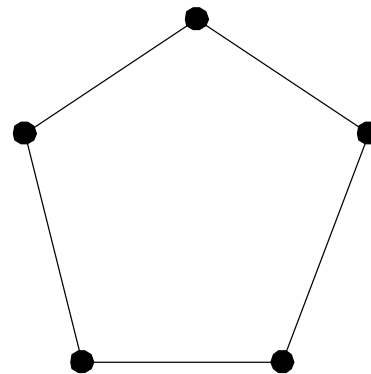
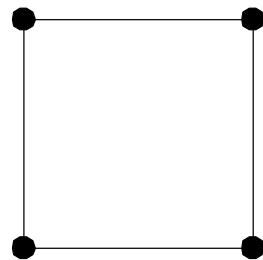
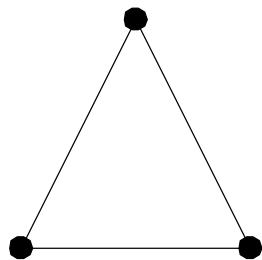
$K_6$

# Jumlah sisi di dalam graf lengkap

$K_1: 0$	$K_2: 1$	$K_3: 3$	$K_4: 6$
			
$K_5: 10$	$K_6: 15$	$K_7: 21$	$K_8: 28$
			
$K_9: 36$	$K_{10}: 45$	$K_{11}: 55$	$K_{12}: 66$
			

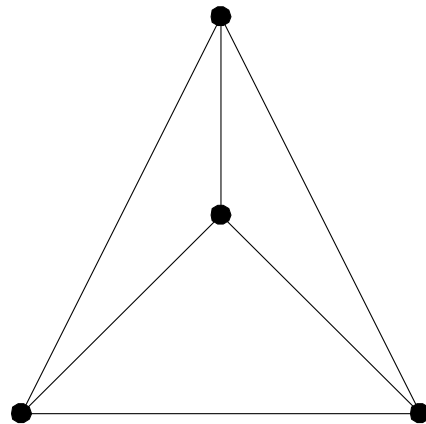
## b. Graf Lingkaran

**Graf lingkaran** adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan  $n$  simpul dilambangkan dengan  $C_n$ .

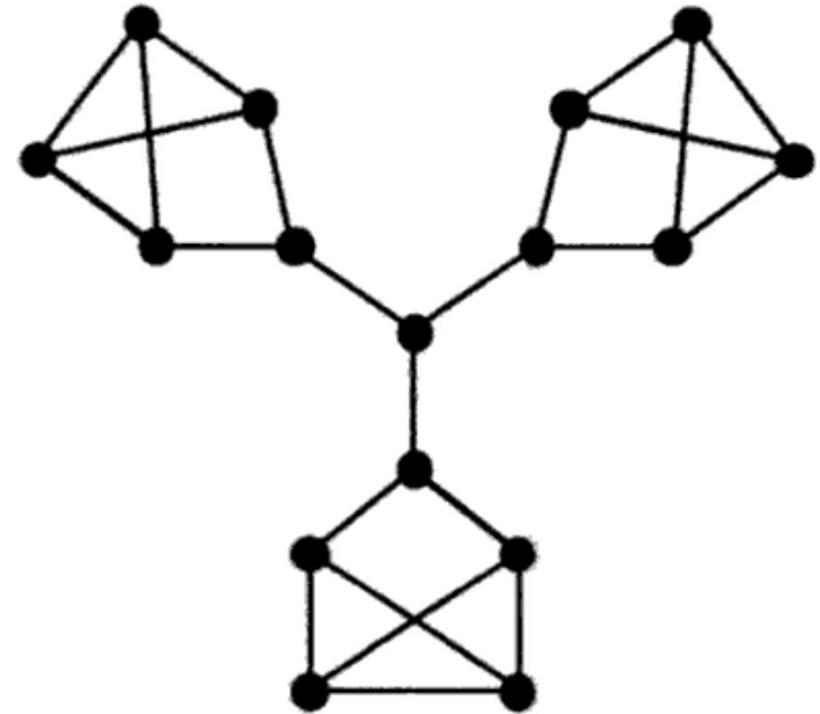
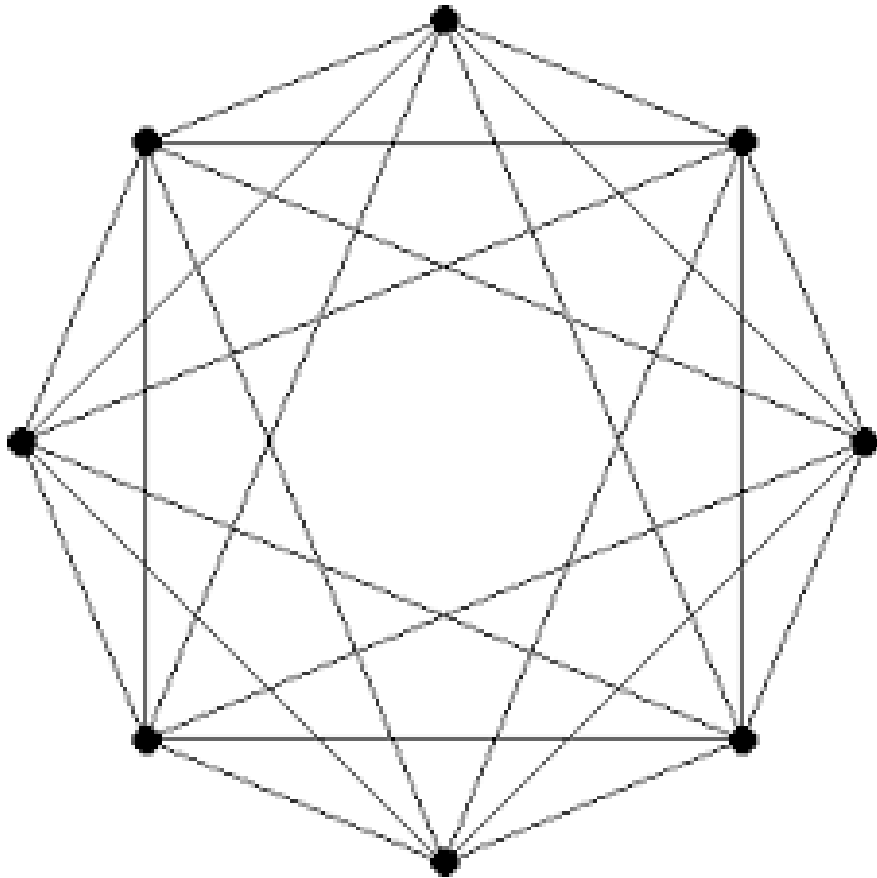


### c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah  $r$ , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat  $r$ . Jumlah sisi pada graf teratur adalah  $nr/2$ .



Contoh-fontoh graf teratur lainnya:



# Latihan

- Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat  $\geq 4$  ?



Jawaban: Tiap simpul berderajat sama  $\rightarrow$  graf teratur.

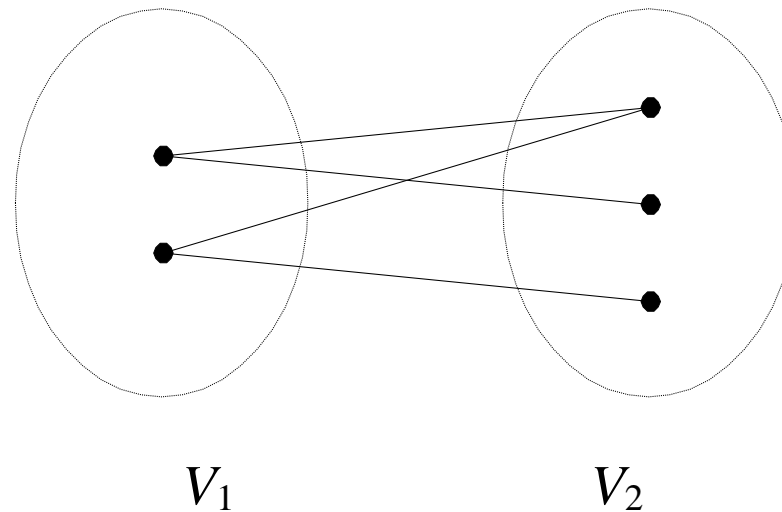
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat  $r$  adalah  $e = nr/2$ .

Jadi,  $n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r$ .

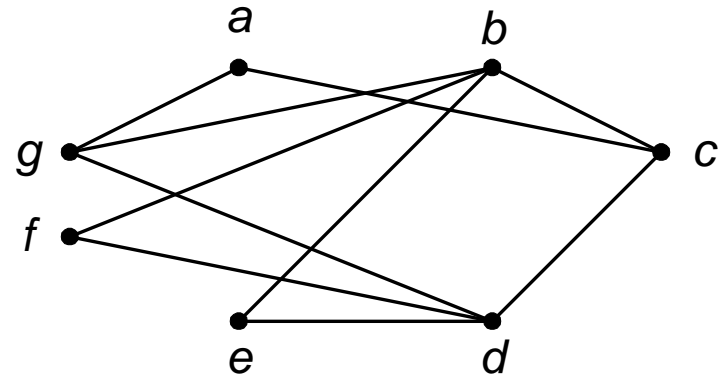
- Untuk  $r = 4$ , jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu  $n = 32/4 = 8$ .
- Untuk  $r$  yang lain ( $r > 4$  dan  $r$  merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):
  - $r = 8 \rightarrow n = 32/8 = 4 \rightarrow$  tidak mungkin membuat graf sederhana.
  - $r = 16 \rightarrow n = 32/16 = 2 \rightarrow$  tidak mungkin membuat graf sederhana.
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

#### d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

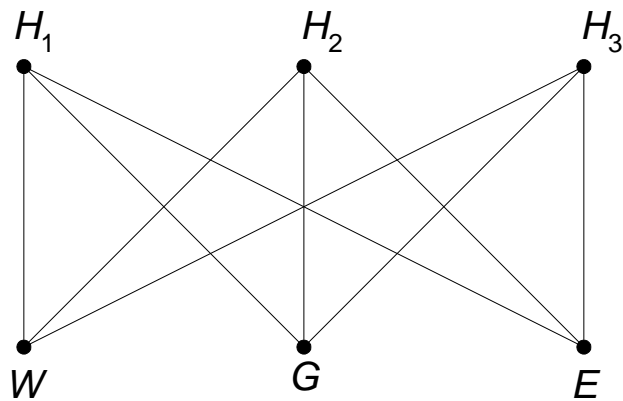
Graf  $G$  yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian  $V_1$  dan  $V_2$ , sedemikian sehingga setiap sisi pada  $G$  menghubungkan sebuah simpul di  $V_1$  ke sebuah simpul di  $V_2$  disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai  $G(V_1, V_2)$ .



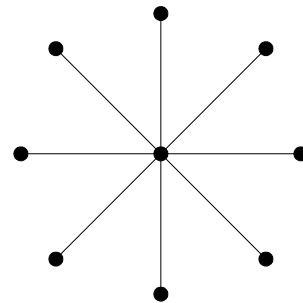
- Graf  $G$  di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi  $V_1 = \{a, b, d\}$  dan  $V_2 = \{c, e, f, g\}$



- Contoh graf bipartit lainnya:

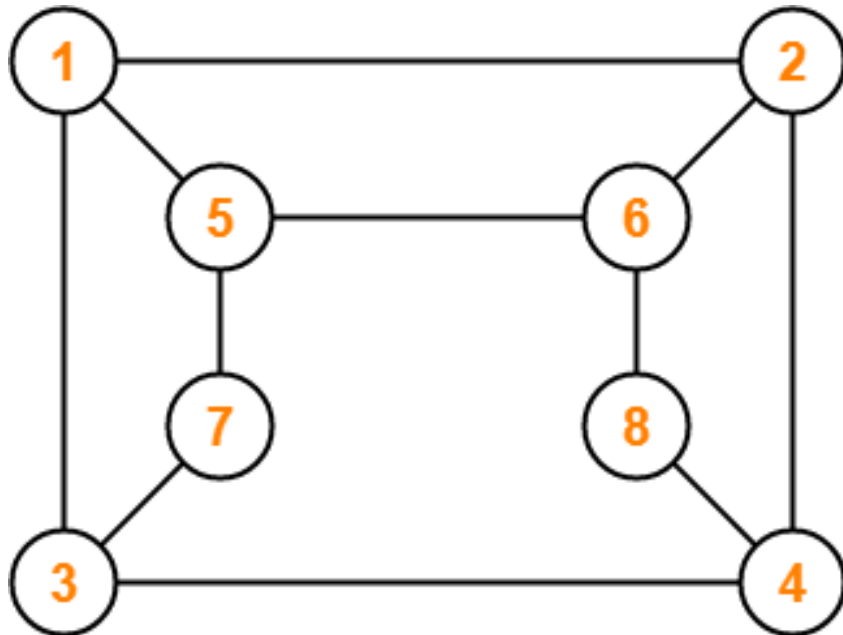


$V_1 = \{H_1, H_2, H_3\}$  dan  $V_2 = \{W, G, E\}$

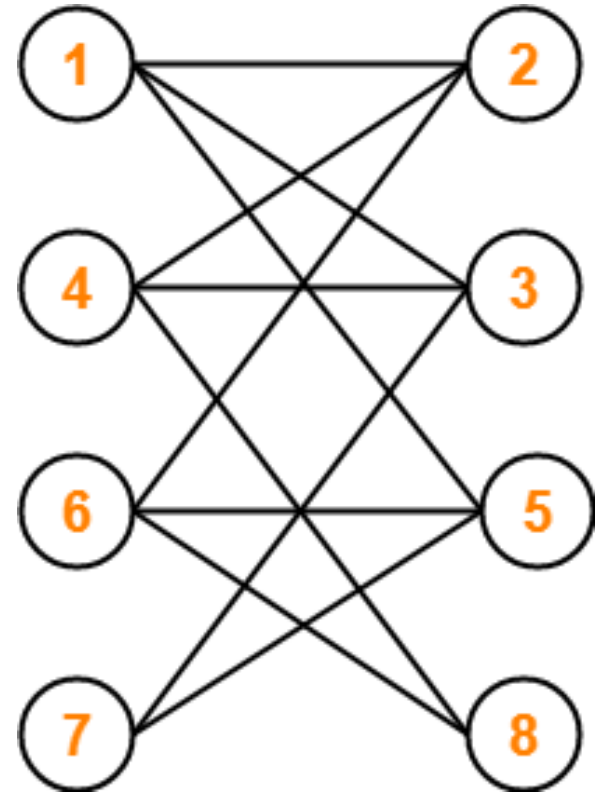


$V_1 = \{\text{simpul di tengah}\}$  dan  $V_2 = \{\text{simpul2 lainnya}\}$

Apakah ini graf bipartit?



Ya, dapat digambar ulang menjadi



$$V_1 = \{1, 4, 6, 7\} \text{ dan } V_2 = \{2, 3, 5, 8\}$$

Bersambung ke Bagian 2