

# Teori Bilangan (Bagian 1) (Update 2024)

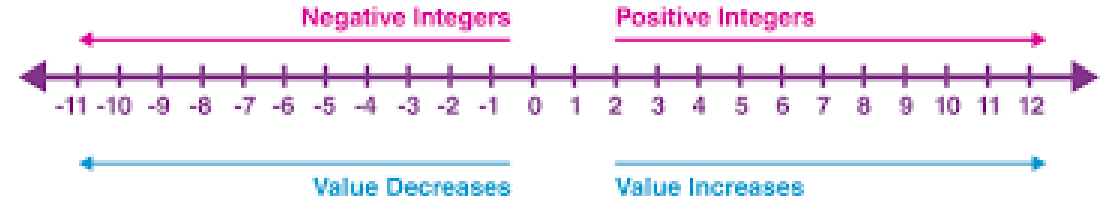
Bahan Kuliah IF1220 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika  
STEI-ITB**



# Bilangan Bulat



- **Teori bilangan** adalah cabang matematika murni yang ditujukan untuk mempelajari bilangan bulat (*integer*) atau fungsi bernilai bilangan bulat.
- Bilangan bulat (*integer*) adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0, -13451, dsb
- Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02, -0.00234

# Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

- Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat,  $a \neq 0$ .  
 $a$  habis membagi  $b$  ( $a$  divides  $b$ ) jika terdapat bilangan bulat  $c$  sedemikian sehingga  $b = ac$ .
- Notasi:  $a \mid b$  jika  $b = ac$ , yang dalam hal ini  $c \in \mathbf{Z}$  dan  $a \neq 0$ .
- **Contoh 1:**  $4 \mid 12$  karena  $12/4 = 3$  (bilangan bulat) atau  $12 = 4 \times 3$ .  
Tetapi  $4 \nmid 13$  karena  $13/4 = 3.25$  (bukan bilangan bulat).

# Teorema Euclidean

**Teorema 1 (Teorema Euclidean).** Misalkan  $m$  dan  $n$  bilangan bulat,  $n > 0$ . Jika  $m$  dibagi dengan  $n$  maka hasil pembagiannya adalah  $q$  (*quotient*) dan sisanya  $r$  (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r$$

dengan  $0 \leq r < n$ .

## Contoh 2.

(i)  $20/3 = 6$ , sisa 2

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

(ii)  $1987/97 = 20$ , sisa 47

$$1987 = 20 \cdot 97 + 47$$

(iii)  $300/10 = 30$ , sisa 0

$$300 = 30 \cdot 10 + 0$$

(iv)  $-22/3 = -8$ , sisa 2

$$-22 = (-8) \cdot 3 + 2$$

tetapi jika pembagiannya sebagai berikut:

$$-22/3 = -7 \text{ sisa } -1$$

$$-22 = (-7) \cdot 3 - 1 \quad (\text{salah!!})$$

karena  $r = -1$  (syarat  $0 \leq r < n$ )

# Pembagi Bersama Terbesar (PBB)

- Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat tidak nol.
- Pembagi bersama terbesar (PBB – **greatest common divisor** atau  $gcd$ ) dari  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat terbesar  $d$  sedemikian hingga  $d \mid a$  dan  $d \mid b$ .
- Dalam hal ini kita nyatakan bahwa  $PBB(a, b) = d$ .

Di sekolah dasar, istilah “pembagi bersama terbesar” sering disebut “faktor persekutuan terbesar” atau FPB

• **Contoh 3.**  $\text{PBB}(45, 36) = ?$

Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45;

Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;

Faktor pembagi bersama 45 dan 36: 1, 3, 9 → terbesar = 9

→  $\text{PBB}(45, 36) = 9$ .

- **Teorema 2.** Misalkan  $m$  dan  $n$  bilangan bulat, dengan syarat  $n > 0$  sedemikian sehingga

$$m = nq + r, \quad 0 \leq r < n$$

maka  $\text{PBB}(m, n) = \text{PBB}(n, r)$

- **Contoh 4:**  $m = 60, n = 18,$

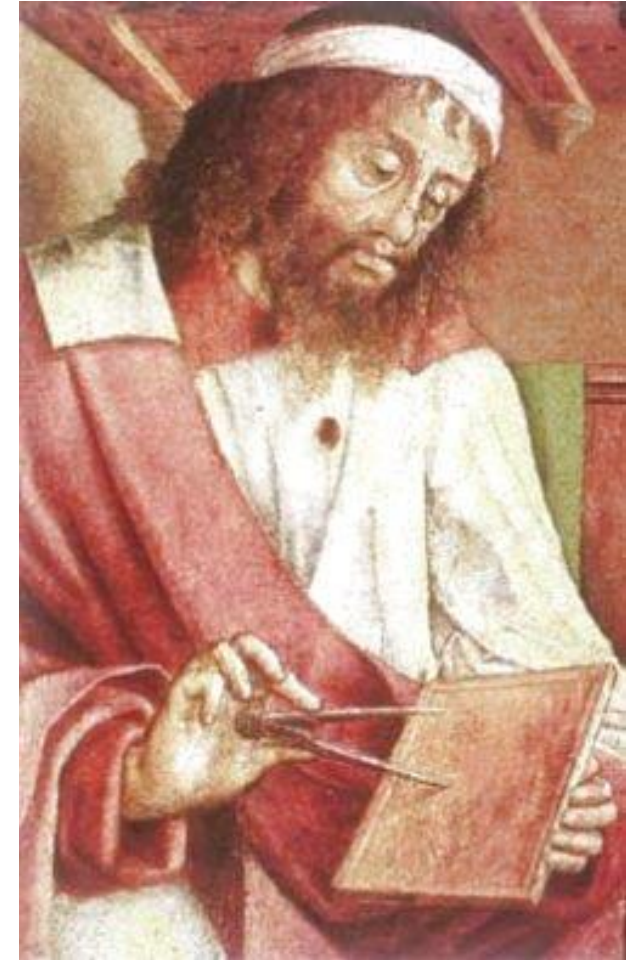
$$60 = 3 \cdot 18 + 6$$

maka  $\text{PBB}(60, 18) = \text{PBB}(18, 6) = 6$



# Algoritma Euclidean

- Tujuan: algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilangan bulat.
- Penemu: Euclides, seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam buku, *Element*.





- Lukisan Euclides versi lain

Misalkan  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat tak negatif dengan  $m \geq n$ . Misalkan  $r_0 = m$  dan  $r_1 = n$ .

Lakukan secara berturut-turut pembagian untuk memperoleh

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_n q_n + 0 \end{aligned}$$

Menurut Teorema 2,

**Teorema 2.** Misalkan  $m$  dan  $n$  bilangan bulat, dengan syarat  $n > 0$  sedemikian sehingga  $m = nq + r$ ,  $0 \leq r < n$  maka  $\text{PBB}(m, n) = \text{PBB}(n, r)$

$$\begin{aligned} \text{PBB}(m, n) &= \text{PBB}(r_0, r_1) = \text{PBB}(r_1, r_2) = \dots = \\ &\text{PBB}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{PBB}(r_{n-1}, r_n) = \text{PBB}(r_n, 0) = r_n \end{aligned}$$

Jadi, PBB dari  $m$  dan  $n$  adalah sisa terakhir yang tidak nol dari runtunan pembagian tersebut

Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif  $m$  dan  $n$  ( $m \geq n$ ). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari  $m$  dan  $n$ .

### **Algoritma Euclidean**

1. Jika  $n = 0$  maka  
     $m$  adalah PBB( $m, n$ );  
    stop.  
tetapi jika  $n \neq 0$ ,  
    lanjutkan ke langkah 2.
2. Bagilah  $m$  dengan  $n$  dan misalkan  $r$  adalah sisanya.
3. Ganti nilai  $m$  dengan nilai  $n$  dan nilai  $n$  dengan nilai  $r$ , lalu ulang kembali ke langkah 1.

```

procedure Euclidean(input m, n : integer,
                    output PBB : integer)
{ Mencari PBB(m, n) dengan syarat m dan n bilangan tak-
  negatif dan  $m \geq n$ 
  Masukan: m dan n,  $m \geq n$  dan  $m, n \geq 0$ 
  Keluaran: PBB(m, n)
}

```

**Kamus**

r : integer

**Algoritma:**

```

while n  $\neq$  0 do
  r  $\leftarrow$  m mod n
  m  $\leftarrow$  n
  n  $\leftarrow$  r
endwhile
{ n = 0, maka PBB(m,n) = m }
PBB  $\leftarrow$  m

```

**Contoh 4.**  $m = 80$ ,  $n = 12$  dan dipenuhi syarat  $m \geq n$

$$\begin{array}{c} 80 = 6 \cdot 12 + 8 \\ \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 12 = 1 \cdot 8 + 4 \\ \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 8 = 2 \cdot 4 + 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka  $\text{PBB}(80, 12) = 4$ .

**Contoh 5.** Tentukan PBB(312, 70).

Jawaban:

$$312 = 4 \cdot 70 + 32$$

$$70 = 2 \cdot 32 + 6$$

$$32 = 5 \cdot 6 + 2$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka **PBB(312, 70) = 2**

# Kombinasi Linier

- PBB( $a, b$ ) dapat dinyatakan sebagai **kombinasi linier** (*linear combination*)  $a$  dan  $b$  dengan koefisien-koefisennya.
- **Contoh 6:**  $\text{PBB}(80, 12) = 4$  ,  
$$4 = (-1) \cdot 80 + 7 \cdot 12.$$
- **Teorema 3.** Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat  $m$  dan  $n$  sedemikian sehingga  $\text{PBB}(a, b) = ma + nb$ .



- **Contoh 7:** Nyatakan PBB(21, 45) sebagai kombinasi linier dari 21 dan 45.

Penyelesaian:

$$45 = 2 \cdot 21 + 3 \quad (\text{i})$$

$$21 = 7 \cdot 3 + 0 \quad (\text{ii})$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 3, maka **PBB(45, 21) = 3**

Dari persamaan (i) dapat dituliskan:

$$\mathbf{3 = 45 - 2 \cdot 21 = 1 \cdot 45 - 2 \cdot 21}$$

Jadi 3 merupakan kombinasi linier dari 45 dan 21

**Contoh 8:** Nyatakan PBB(312, 70) sebagai kombinasi linier 312 dan 70.

Jawaban: Terapkan algoritma Euclidean untuk memperoleh PBB(312, 70):

$$312 = 4 \cdot 70 + 32 \quad (\text{i})$$

$$70 = 2 \cdot 32 + 6 \quad (\text{ii})$$

$$32 = 5 \cdot 6 + 2 \quad (\text{iii})$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0 \quad (\text{iv})$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka **PBB(312, 70) = 2**

Susun pembagian nomor (iii) dan (ii) masing-masing menjadi

$$2 = 32 - 5 \cdot 6 \quad (\text{iv})$$

$$6 = 70 - 2 \cdot 32 \quad (\text{v})$$

Sulihkan (v) ke dalam (iv) menjadi

$$2 = 32 - 5 \cdot (70 - 2 \cdot 32) = 1 \cdot 32 - 5 \cdot 70 + 10 \cdot 32 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70 \quad (\text{vi})$$

Susun pembagian nomor (i) menjadi

$$32 = 312 - 4 \cdot 70 \quad (\text{vii})$$

Sulihkan (vii) ke dalam (vi) menjadi

$$2 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70 = 11 \cdot (312 - 4 \cdot 70) - 5 \cdot 70 = 11 \cdot 312 - 49 \cdot 70$$

Jadi,  $\text{PBB}(312, 70) = 2 = 11 \cdot 312 - 49 \cdot 70$

# Relatif Prima

- Dua buah bilangan bulat  $a$  dan  $b$  dikatakan *relatif prima* jika  $PBB(a, b) = 1$ .
- **Contoh 9.**
  - (i) 20 dan 3 relatif prima sebab  $PBB(20, 3) = 1$
  - (ii) 7 dan 11 relatif prima karena  $PBB(7, 11) = 1$
  - (iii) 20 dan 5 tidak relatif prima sebab  $PBB(20, 5) = 5 \neq 1$
  - (iv) 31 dan 0 tidak relative prima sebab  $PBB(31, 0) = 31$

- Dikaitkan dengan kombinasi linier, jika  $a$  dan  $b$  relatif prima, maka terdapat bilangan bulat  $m$  dan  $n$  sedemikian sehingga

$$ma + nb = 1$$

- **Contoh 10.** Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena  $\text{PBB}(20, 3) = 1$ , atau dapat ditulis

$$2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1 \quad (m = 2, n = -13)$$

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena  $\text{PBB}(20, 5) = 5 \neq 1$  sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam  $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$ .

# Aritmetika Modulo

- Misalkan  $a$  dan  $m$  bilangan bulat ( $m > 0$ ). Operasi  $a \bmod m$  (dibaca “ $a$  modulo  $m$ ”) memberikan sisa jika  $a$  dibagi dengan  $m$ .
- Notasi:  $a \bmod m = r$  sedemikian sehingga  $a = mq + r$ , dengan  $0 \leq r < m$ .
- $m$  disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo  $m$  terletak di dalam himpunan  $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ .

- **Contoh 11.** Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

$$(i) \quad 23 \bmod 5 = 3 \qquad (23 = 5 \cdot 4 + 3)$$

$$(ii) \quad 27 \bmod 3 = 0 \qquad (27 = 3 \cdot 9 + 0)$$

$$(iii) \quad 6 \bmod 8 = 6 \qquad (6 = 8 \cdot 0 + 6)$$

$$(iv) \quad 0 \bmod 12 = 0 \qquad (0 = 12 \cdot 0 + 0)$$

$$(v) \quad -41 \bmod 9 = -5 \qquad (-41 = (9)(-4) - 5) \rightarrow \text{salah karena } r < 0$$

$$-41 \bmod 9 = 4 \qquad (-41 = 9(-5) + 4) \rightarrow \text{betul}$$

$$(vi) \quad -39 \bmod 13 = 0 \qquad (-39 = 13(-3) + 0)$$

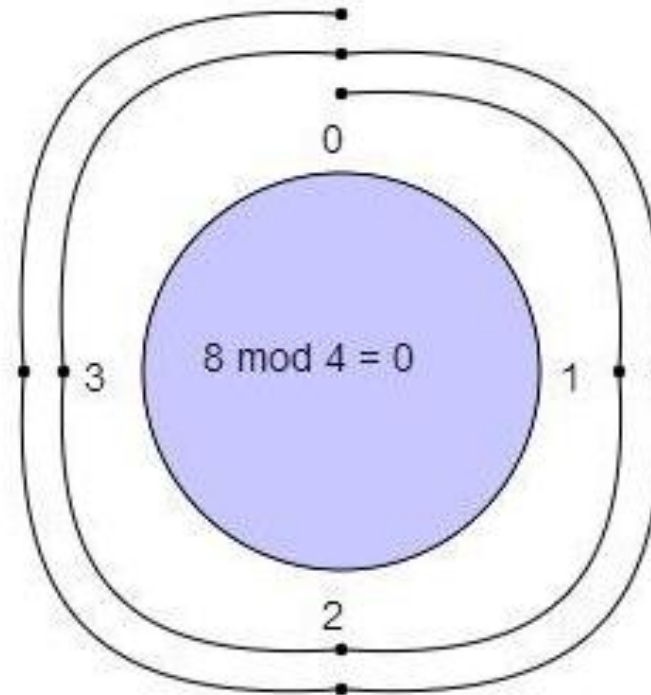
- *Penjelasan untuk (v):* Karena  $a$  negatif, bagi  $|a|$  dengan  $m$  mendapatkan sisa  $r'$ . Maka  $a \bmod m = m - r'$  bila  $r' \neq 0$ .

Jadi  $|-41| \bmod 9 = 5$ , sehingga  $-41 \bmod 9 = 9 - 5 = 4$ .

# 8 mod 4 = ?

With a modulus of 4 we make a clock with numbers 0,1,2,3

We start at 0 and go through 8 numbers in a clockwise sequence 1,2,3,0,1,2,3,0



We ended up at 0

so:

$$8 \bmod 4 = 0$$

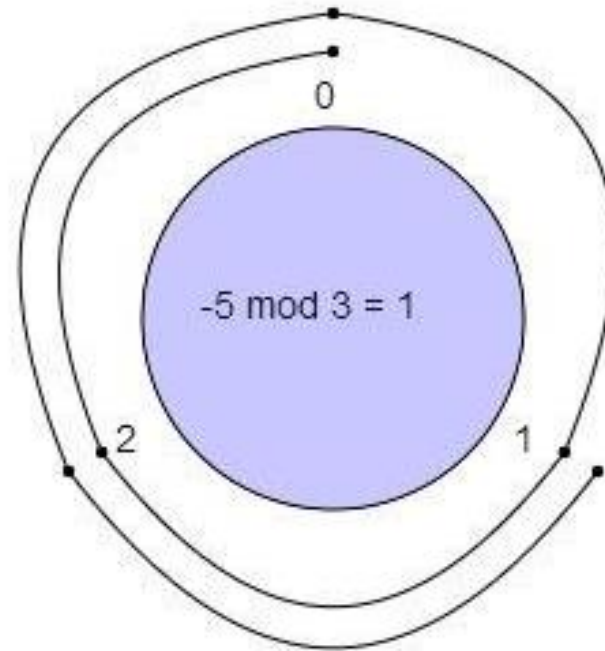
Sumber: [www.khancademy.org](http://www.khancademy.org)

# $-5 \bmod 3 = ?$

With a modulus of 3 we we make a clock with numbers 0,1,2

We start at 0 and go through 5 numbers in counter-clockwise sequence (5 is negative)

2,1,0,2,1



We ended up at 1

so:

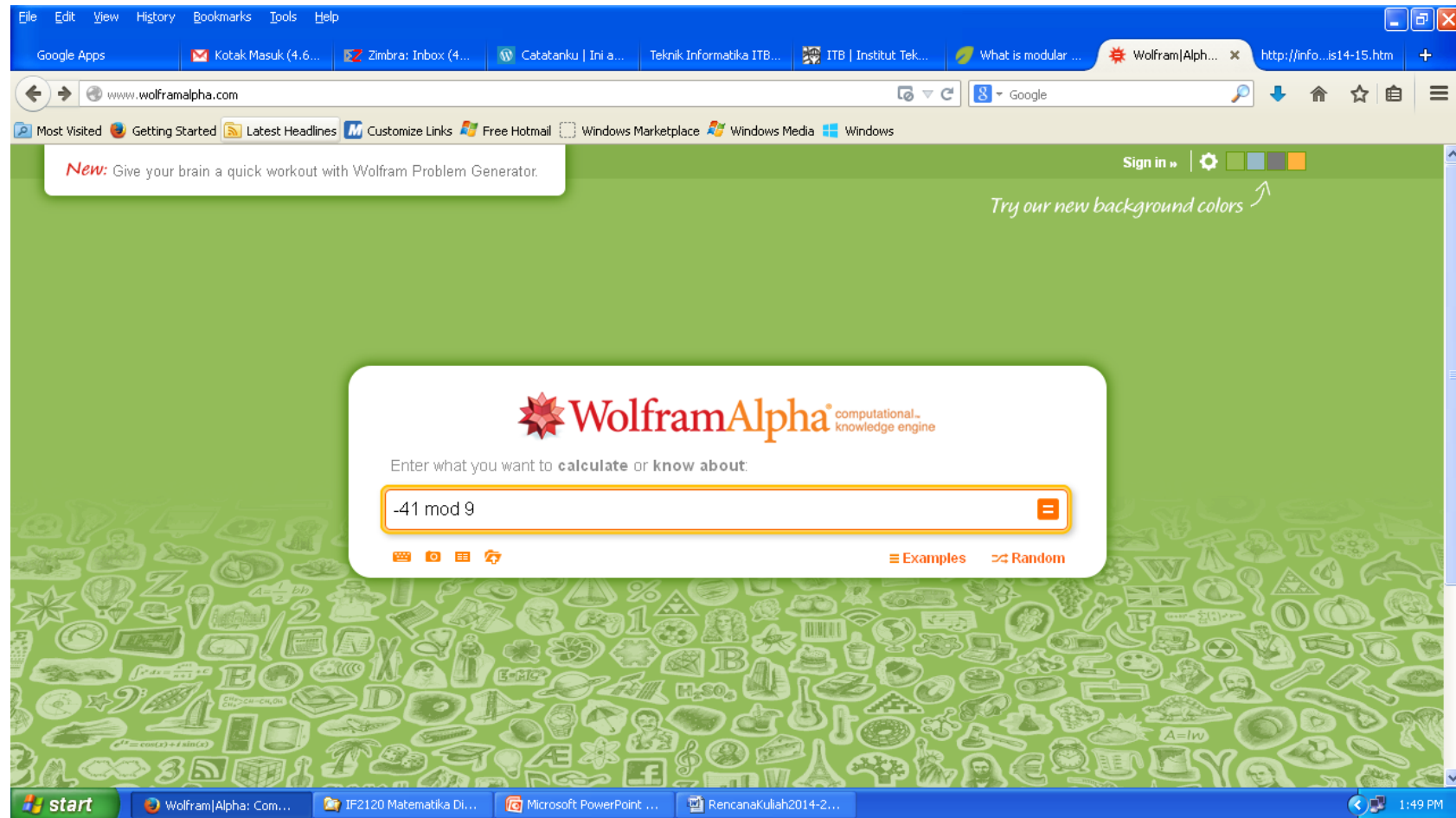
$$-5 \bmod 3 = 1$$

Sumber: [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org)



# Aritmetika Modulo di dalam Wolfram Alpha

- Kunjungi: [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)



The image shows a screenshot of a web browser displaying the Wolfram Alpha website. The browser's address bar shows the URL [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com). The page features a green background with a pattern of mathematical symbols and icons. A central white search box contains the text  $-41 \bmod 9$ . Above the search box, the Wolfram Alpha logo is visible, along with the text "computational knowledge engine". Below the search box, there are links for "Examples" and "Random". The browser's taskbar at the bottom shows several open applications, including "start", "Wolfram|Alpha: Com...", "IF2120 Matematika Di...", "Microsoft PowerPoint ...", and "RencanaKuliah2014-2...". The system clock in the bottom right corner indicates the time is 1:49 PM.

File Edit View History Bookmarks Tools Help

Google Apps Kotak Masuk (4.6... Zimbra: Inbox (4... Catatanku | Ini a... Teknik Informatika ITB... ITB | Institut Tek... What is modular ... -41 mod 9 - ... http://info...is14-15.htm

www.wolframalpha.com/input/?i=-41+mod+9

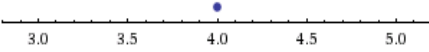
Most Visited Getting Started Latest Headlines Customize Links Free Hotmail Windows Marketplace Windows Media Windows

Input:  
 $(-41) \bmod 9$


Result:  
4


Number name:  
four


Visual representation:  
••••

Number line:  


Integers congruent to 4 mod 9: [More](#)  
13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, ...

Clock representation:  


New to Wolfram|Alpha?  
  
[Take the Tour >>](#)

Perplexed by a problem?  


Share:  
f  
t  
more

start -41 mod 9 - Wolfram|... IF2120 Matematika Di... Microsoft PowerPoint ... RencanaKuliah2014-2... 1:50 PM

# Kongruen

- Misalnya  $38 \bmod 5 = 3$  dan  $13 \bmod 5 = 3$ , maka dikatakan  
 $38 \equiv 13 \pmod{5}$   
(dibaca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulus 5).
- Dalam kehidupan sehari-hari menggunakan jam, kita mengenal:  
jam 14.00 = jam 2 siang  $\rightarrow 14 \equiv 2 \pmod{12}$   
jam 18.00 = jam 6 sore  $\rightarrow 18 \equiv 6 \pmod{12}$   
jam 21.00 = jam 9 malam  $\rightarrow 21 \equiv 9 \pmod{12}$   
jam 24.00 = jam 0  $\rightarrow 24 \equiv 0 \pmod{12}$

- **DEFINISI:** Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat dan  $m$  adalah bilangan  $> 0$ , maka  $a \equiv b \pmod{m}$  jika dan hanya jika  $m \mid (a - b)$ .
- Jika  $a$  **tidak** kongruen dengan  $b$  dalam modulus  $m$ , maka ditulis  $a \not\equiv b \pmod{m}$ .

- **Contoh 12.**

$$17 \equiv 2 \pmod{3}$$

*( 3 habis membagi  $17 - 2 = 15$  )*

$$21 \equiv 9 \pmod{12}$$

*( 12 habis membagi  $21 - 9 = 12$  )*

$$-7 \equiv 15 \pmod{11}$$

*( 11 habis membagi  $-7 - 15 = -22$  )*

$$12 \not\equiv 2 \pmod{7}$$

*( 7 tidak habis membagi  $12 - 2 = 10$  )*

$$-7 \not\equiv 15 \pmod{3}$$

*( 3 tidak habis membagi  $-7 - 15 = -22$  )*

**DEFINISI:** Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat dan  $m > 0$ , maka  $a \equiv b \pmod{m}$  jika dan hanya jika  $m \mid (a - b)$ .

# Latihan 1

Tentukan semua bilangan yang kongruen dengan 5 (mod 11).

Penyelesaian:

**Cara 1:**

Tambahkan 5 dengan 11 ke kanan, hasilnya ditambah lagi dengan 11, begitu seterusnya secara berulang-ulang.

Kurangkan 5 dengan 11 ke kiri, hasilnya dikurangi lagi dengan 11, begitu seterusnya secara berulang-ulang.

...	-28	-17	-6	5	16	27	38	49	...
		-11	-11	-11	+11	+11	+11	+11	

Jadi, nilai-nilai yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah ..., -17, -6, 16, 27, 38, ...

## Cara 2:

Misalkan bilangan yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah  $x$ .

$$x \equiv 5 \pmod{11}$$

Jadi,  $11 \mid (x - 5)$ , atau  $\frac{x-5}{11} = \text{bilangan bulat}$

Nilai  $x$  yang memenuhi adalah 16, 27, 38, ..., lalu -6, -17, ...

- Jadi, nilai-nilai yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah  
..., -17, -6, 16, 27, 38, ...

- $a \equiv b \pmod{m}$  dalam bentuk “sama dengan” dapat dituliskan sebagai:

$$a = b + km$$

( $k$  adalah bilangan bulat)

- **Contoh 13.**

$$17 \equiv 2 \pmod{3} \quad \rightarrow \quad 17 = 2 + 5 \cdot 3 \quad (k = 5)$$

$$-7 \equiv 15 \pmod{11} \quad \rightarrow \quad -7 = 15 + (-2)11 \quad (k = -2)$$



- $a \bmod m = r$  dapat juga ditulis sebagai  $a \equiv r \pmod{m}$

- **Contoh 14.**

(i)  $23 \bmod 5 = 3 \quad \rightarrow \quad 23 \equiv 3 \pmod{5}$

(ii)  $27 \bmod 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 27 \equiv 0 \pmod{3}$

(iii)  $6 \bmod 8 = 6 \quad \rightarrow \quad 6 \equiv 6 \pmod{8}$

(iv)  $0 \bmod 12 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 \equiv 0 \pmod{12}$

(v)  $-41 \bmod 9 = 4 \quad \rightarrow \quad -41 \equiv 4 \pmod{9}$

(vi)  $-39 \bmod 13 = 0 \quad \rightarrow \quad -39 \equiv 0 \pmod{13}$

**Teorema 4.** Misalkan  $m$  adalah bilangan bulat positif.

1) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $c$  adalah sembarang bilangan bulat maka

(i)  $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

(ii)  $ac \equiv bc \pmod{m}$

(iii)  $a^p \equiv b^p \pmod{m}$  ,  $p$  bilangan bulat tak-negatif

artinya, kedua ruas dapat ditambah, dikali, atau dipangkatkan dengan sebuah konstanta

2) Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $c \equiv d \pmod{m}$ , maka

(i)  $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$

(ii)  $ac \equiv bd \pmod{m}$

artinya, dua buah bilangan bulat dengan modulus yang sama dapat dijumlahkan atau dikalikan

*Bukti* (hanya untuk 1(ii) dan 2(i) saja):

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

1(ii)  $a \equiv b \pmod{m}$  berarti:

$$\Leftrightarrow a = b + km$$

$$\Leftrightarrow a - b = km$$

$$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$$

$$\Leftrightarrow ac = bc + Km$$

$$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m} \quad \blacksquare$$

$$(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$$

$$2(i) \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad a = b + k_1m$$

$$c \equiv d \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad c = d + k_2m +$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \quad (k = k_1 + k_2)$$

$$\Leftrightarrow (a + c) \equiv (b + d) \pmod{m} \quad \blacksquare$$

## Contoh 15.

Misalkan  $17 \equiv 2 \pmod{3}$  dan  $10 \equiv 4 \pmod{3}$ , maka menurut Teorema 4,

$$17 + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{3} \iff 22 \equiv 7 \pmod{3} \quad \text{periksa } 3 \mid (22 - 7)$$

$$17 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 5 \pmod{3} \iff 85 \equiv 10 \pmod{3} \quad \text{periksa } 3 \mid (85 - 10)$$

$$17 + 10 \equiv 2 + 4 \pmod{3} \iff 27 \equiv 6 \pmod{3} \quad \text{periksa } 3 \mid (27 - 6)$$

$$17 \cdot 10 \equiv 2 \cdot 4 \pmod{3} \iff 170 \equiv 8 \pmod{3} \quad \text{periksa } 3 \mid (170 - 8)$$

- Teorema 4 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi.

- **Contoh 16:**

$10 \equiv 4 \pmod{3}$  dapat dibagi dengan 2

karena  $10/2 = 5$  dan  $4/2 = 2$ , dan  $5 \equiv 2 \pmod{3}$

$14 \equiv 8 \pmod{6}$  tidak dapat dibagi dengan 2, karena  $14/2 = 7$  dan  $8/2 = 4$ , tetapi  $7 \not\equiv 4 \pmod{6}$ .

# Latihan 2

Buktikan Teorema 4.2(ii), jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dan  $c \equiv d \pmod{m}$  maka buktikan bahwa  $ac \equiv bd \pmod{m}$

.

## Penyelesaian:

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a = b + k_1 m$$

$$c \equiv d \pmod{m} \rightarrow c = d + k_2 m$$

maka

$$\Leftrightarrow ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m)$$

$$\Leftrightarrow ac = bd + bk_2 m + dk_1 m + k_1 k_2 m^2$$

$$\Leftrightarrow ac = bd + Km \quad \text{dengan } K = bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 m$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{ac \equiv bd \pmod{m}} \quad \text{(terbukti)}$$

# Balikan Modulo (modulo invers)

- Di dalam aritmetika bilangan riil, balikan sebuah bilangan yang tidak-nol adalah bentuk pecahannya sedemikian sehingga hasil perkalian keduanya sama dengan 1.
- Jika  $a$  adalah sebuah bilangan tidak-nol, maka balikannya adalah  $1/a$  sedemikian sehingga  $a \times 1/a = 1$ .  
Contoh: Balikan 4 adalah  $1/4$ , sebab  $4 \times 1/4 = 1$ .
- Balikan  $a$  dilambangkan dengan  $a^{-1}$ .
- Di dalam aritmetika modulo, balikan modulo sebuah bilangan bulat lebih sukar dihitung.



- Diberikan sebuah bilangan bulat  $a(\text{mod } m)$ . Bagaimana menghitung balikan  $a (\text{mod } m)$ ?
- **Syarat:** Jika  $a$  dan  $m$  relatif prima dan  $m > 1$ , maka balikan (*invers*) dari  $a (\text{mod } m)$  ada.
- Balikan dari  $a (\text{mod } m)$  adalah bilangan bulat  $x$  sedemikian sehingga:  
$$xa \equiv 1 (\text{mod } m)$$
- Jadi,  $a^{-1}(\text{mod } m) = x$

Bukti:  $a$  dan  $m$  relatif prima, jadi  $\text{PBB}(a, m) = 1$ , dan terdapat bilangan bulat  $x$  dan  $y$  sedemikian sehingga:

$$xa + ym = 1$$

yang mengimplikasikan bahwa

$$xa + ym \equiv 1 \pmod{m}$$

Karena  $ym \equiv 0 \pmod{m}$  (kenapa?), maka

$$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa  $x$  adalah balikan dari  $a \pmod{m}$ . ■

- Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari  $a \pmod{m}$ , kita harus membuat kombinasi linier dari  $a$  dan  $m$  sama dengan 1.
- Koefisien  $a$  dari kombinasi linier tersebut merupakan balikan dari  $a \pmod{m}$ .

**Contoh 17.** Tentukan balikan dari 4 (mod 9), 17 (mod 7), dan 18 (mod 10).

Penyelesaian:

(a) Karena  $\text{PBB}(4, 9) = 1$ , maka balikan dari 4 (mod 9) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \quad (\text{i})$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0 \quad (\text{ii})$$

Susun persamaan (i) menjadi

$$-2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 1 \quad \text{atau} \quad -2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{9}$$

Karena  $1 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{9}$ , maka

$$-2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{9}$$

Dari kekongruenan terakhir ini kita peroleh  $-2$  adalah balikan dari 4 (mod 9).

atau dapat juga ditulis  $4^{-1} \pmod{9} = -2 \pmod{9}$  atau  $x = -2 + 9k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Catatan: setiap bilangan yang kongruen dengan  $-2 \pmod{9}$

juga adalah balikan dari  $4 \pmod{9}$ , misalnya  $\dots, -20, -11, 7, 16, \dots$

$$-20 \equiv -2 \pmod{9} \quad (\text{karena } 9 \text{ habis membagi } -20 - (-2) = -18)$$

$$-11 \equiv -2 \pmod{9} \quad (\text{karena } 9 \text{ habis membagi } -11 - (-2) = -9)$$

$$7 \equiv -2 \pmod{9} \quad (\text{karena } 9 \text{ habis membagi } 7 - (-2) = 9)$$

$$16 \equiv -2 \pmod{9} \quad (\text{karena } 9 \text{ habis membagi } 16 - (-2) = 18)$$

- $\dots, -20, -11, -2, 7, 16, \dots$  diperoleh dengan menambahkan 9 ke kiri atau ke kanan dari  $-2$

(b) Karena  $\text{PBB}(17, 7) = 1$ , maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$$17 = 2 \cdot 7 + 3 \quad (\text{i})$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad (\text{ii})$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0 \quad (\text{iii}) \quad (\text{yang berarti: } \text{PBB}(17, 7) = 1)$$

Susun (ii) menjadi:

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 \quad (\text{iv})$$

Susun (i) menjadi

$$3 = 17 - 2 \cdot 7 \quad (\text{v})$$

Sulihkan (v) ke dalam (iv):

$$1 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$$

atau

$$-2 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 1 \quad (5 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7})$$

$$-2 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{7} \quad (7 \text{ habis membagi } -2 \cdot 17 - 1 = -35)$$

Jadi,  $-2$  adalah balikan dari 17 (mod 7), atau dapat ditulis  $17^{-1} \pmod{7} = -2 \pmod{7}$ .

(c) Menghitung balikan  $18 \pmod{10}$ . Karena  $\text{PBB}(18, 10) = 2 \neq 1$ , maka balikan dari  $18 \pmod{10}$  tidak ada.

# Cara lain menghitung balikan modulo

- Ditanya: balikan dari  $a \pmod{m}$
- Misalkan  $x$  adalah balikan dari  $a \pmod{m}$ , maka

$$ax \equiv 1 \pmod{m} \text{ (definisi balikan modulo)}$$

atau dalam notasi 'sama dengan':

$$ax = 1 + km$$

atau

$$x = (1 + km)/a$$

Cobakan untuk  $k = 0, 1, 2, \dots$  dan  $k = -1, -2, \dots$

Solusinya adalah semua bilangan bulat yang memenuhi.



- **Contoh 18:** Balikan dari 4 (mod 9) adalah  $x$  sedemikian sehingga  $4x \equiv 1 \pmod{9}$

$$4x \equiv 1 \pmod{9} \rightarrow 4x = 1 + 9k \rightarrow x = (1 + 9k)/4$$

$$\text{Untuk } k = 0 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 0)/4 = 1/4 \rightarrow \text{tidak bulat}$$

$$k = 1 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 1)/4 = 10/4 \rightarrow \text{tidak bulat}$$

$$k = 2 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 2)/4 = 19/4 \rightarrow \text{tidak bulat}$$

$$k = 3 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 3)/4 = 7$$

$$k = -1 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot -1)/4 = -2$$

Balikan dari 4 (mod 9) adalah 7 (mod 9), -2 (mod 9), dst

Catatan: cukup menemukan satu saja balikan dari 4(mod 9), maka semua bilangan lainnya dapat dicari dengan menambahkan 9 pada bilangan tersebut. Pada contoh di atas 7 adalah balikan 4(mod 9), maka dengan menambahkan 9 ke kiri dan ke kanan diperoleh ..., -11, -2, 7, 16, ...

Secara umum,  $4^{-1} \pmod{9} = 7 + 9k, k \in \mathbb{Z}$

# Latihan 3

- Tentukan semua balikan dari 9 (mod 11).

## Penyelesaian:

- Misalkan  $9^{-1} \pmod{11} = x$
- Maka  $9x \equiv 1 \pmod{11}$  atau  $9x = 1 + 11k$  atau
$$x = (1 + 11k)/9$$

Dengan mencoba semua nilai  $k$  yang bulat ( $k = 0, -1, -2, \dots, 1, 2, \dots$ ) maka diperoleh  $x = 5$ . Semua bilangan lain yang kongruen dengan 5 ( $\pmod{11}$ ) juga merupakan balikan dari 9 ( $\pmod{11}$ ), yaitu  $-6, 16, 27, \dots$

atau dapat ditulis  $9^{-1} \pmod{11} = 5 + 11k, k \in \mathbb{Z}$

# Kekongruenan Linier

- Kekongruenan linier (*linear congruence*) berbentuk:

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

( $m > 0$ ,  $a$  dan  $b$  sembarang bilangan bulat, dan  $x$  adalah peubah bilangan bulat).

Pemecahan:  $ax = b + km \rightarrow x = \frac{b + km}{a}$

(Cobakan untuk  $k = 0, 1, 2, \dots$  dan  $k = -1, -2, \dots$  yang menghasilkan  $x$  sebagai bilangan bulat)

**Contoh 19.**

Tentukan solusi:  $4x \equiv 3 \pmod{9}$  dan  $2x \equiv 3 \pmod{4}$

Penyelesaian:

(i)  $4x \equiv 3 \pmod{9}$

$$x = \frac{3 + k \cdot 9}{4}$$

$$k = 0 \rightarrow x = (3 + 0 \cdot 9)/4 = 3/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = 1 \rightarrow x = (3 + 1 \cdot 9)/4 = 3$$

$$k = 2 \rightarrow x = (3 + 2 \cdot 9)/4 = 21/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$k = 3, k = 4$  tidak menghasilkan solusi

$$k = 5 \rightarrow x = (3 + 5 \cdot 9)/4 = 12$$

...

$$k = -1 \rightarrow x = (3 - 1 \cdot 9)/4 = -6/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = -2 \rightarrow x = (3 - 2 \cdot 9)/4 = -15/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = -3 \rightarrow x = (3 - 3 \cdot 9)/4 = -6$$

...

$$k = -6 \rightarrow x = (3 - 6 \cdot 9)/4 = -15$$

...

Nilai-nilai  $x$  yang memenuhi: 3, 12, ... dan  $-6, -15, \dots$

Atau solusi cukup dinyatakan sebagai  $x \equiv 3 \pmod{9}$ , atau  $x = 3 + 9k$ ,  $k$  sembarang bilangan bulat

$$(ii) 2x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x = \frac{3 + k \cdot 4}{2}$$

Karena  $4k$  genap dan  $3$  ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan  $2$  tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai  $x$  yang memenuhi  $2x \equiv 3 \pmod{5}$ .

## Cara lain menghitung solusi $ax \equiv b \pmod{m}$

- Seperti dalam persamaan aljabar biasa (tanpa modulo),

$4x = 12 \rightarrow$  kalikan setiap ruas dengan  $1/4$  (yaitu invers 4), maka

$$(1/4) \cdot 4x = 12 \cdot (1/4) \rightarrow x = 12/4 = 3$$

- $4x \equiv 12 \pmod{9} \rightarrow$  kalikan setiap ruas dengan balikan dari  $4 \pmod{9}$  (dalam hal ini sudah kita hitung, yaitu  $-2$ )

$$(-2) \cdot 4x \equiv (-2) \cdot 12 \pmod{9} \Leftrightarrow -8x \equiv -24 \pmod{9}$$

Karena  $-8 \equiv 1 \pmod{9}$ , maka  $x \equiv -24 \pmod{9}$ . Semua bilangan bulat yang kongruen dengan  $-24 \pmod{9}$  adalah solusinya, yaitu ...,  $-33, -15, -6, 3, 12,$

# Latihan

Tentukan nilai-nilai  $x$  yang memenuhi masing-masing kekongruenan berikut:

(a)  $4x \equiv 8 \pmod{11}$

(b)  $5x \equiv 1 \pmod{61}$

(c)  $2x \equiv 1 \pmod{8}$

(d)  $2^x \equiv 1 \pmod{32}$



# Latihan Soal Teori Bilangan

# Soal 1

- Buktikan untuk setiap bilangan bulat positif  $n$  dan  $a$ ,  $PBB(a, a + n)$  habis membagi  $n$ .

Jawaban:

Misalkan  $\text{PBB}(a, a + n) = d$ .

Maka:

$$d \mid a + n \rightarrow a + n = k_1 d$$

$$d \mid a \rightarrow a = k_2 d -$$

$$\hline a + n - a = (k_1 - k_2)d$$

$$n = Kd \text{ (misal } k_1 - k_2 = K)$$

$$n = Kd \rightarrow d \mid n \text{ (terbukti)}$$

## Soal 2

Perlihatkan bahwa bila  $n \mid m$ , yang dalam hal ini  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, dan jika  $a \equiv b \pmod{m}$  dengan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat, maka  $a \equiv b \pmod{n}$ .

- Jawaban:

Diketahui bahwa  $n \mid m$  atau dapat dituliskan sebagai :

$$m = k_1 \cdot n \dots(i)$$

Jika  $a \equiv b \pmod{m}$  maka :

$$a = b + k_2 \cdot m \dots(ii)$$

Substitusikan (i) ke dalam (ii):

$$a = b + k_2 \cdot k_1 \cdot n$$

$$a = b + k_3 \cdot n \quad (\text{misalkan } k_3 = k_2 \cdot k_1) \text{ (iii)}$$

$$a - b = k_3 \cdot n \quad \text{yang berarti bahwa } n \mid (a - b) \text{ atau}$$

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \blacksquare$$

# Soal 3

- Carilah semua bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2 dan bersisa 2 jika dibagi 3

Carilah semua bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2 dan bersisa 2 jika dibagi 3

Penyelesaian:

Misal bilangan tersebut adalah  $x = 2k+1$

$$(2k + 1) \bmod 3 = 2 \rightarrow 2k + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2k \equiv 2 - 1 \pmod{3}$$

$$2k \equiv 1 \pmod{3}$$

$$k \equiv 2 \pmod{3}$$

$$k = 2 + 3n$$

Berarti  $x = 2(2 + 3n)+1 = 6n + 5$ ,  $n$  sembarang bilangan bulat

Jadi bilangan-bilangan yang memenuhi adalah  $x = \{\dots, 5, 11, 17, 23, \dots\}$

## Soal 4

- Tentukan  $x$  dan  $y$  bilangan bulat yang memenuhi persamaan
$$312x + 70y = 2,$$
lalu hitunglah nilai dari :  $y \bmod x$  .



$$312x + 70y = 2$$

Jawaban:

Dengan menggunakan algoritma Euclid, ditemukan bahwa :

$$312 = 4.70 + 32 \quad (\text{i})$$

$$70 = 2.32 + 6 \quad (\text{ii})$$

$$32 = 5.6 + 2 \quad (\text{iii})$$

$$6 = 3.2 + 0 \quad (\text{iv})$$

Persamaan (iii) dapat dituliskan menjadi :  $2 = 32 - 5.6$  (v)

Persamaan (ii) dapat dituliskan menjadi :  $6 = 70 - 2.32$  (vi)

Sulihkan persamaan (vi) ke persamaan (v) :

$$2 = 32 - 5.(70 - 2.32)$$

$$2 = 32 - 5.70 + 10.32$$

$$2 = 11.32 - 5.70 \quad (\text{vii})$$

Persamaan (i) dapat dituliskan menjadi :  $32 = 312 - 4.70$  (viii)

Sulihkan persamaan (viii) ke persamaan (vii) :

$$2 = 11.(312 - 4.70) - 5.70$$

$$2 = 11.312 - 44.70 - 5.70$$

$$2 = 11.312 - 49.70 \quad (\text{ix})$$

Dari persamaan (ix) diketahui  $x$  dan  $y$  yang memenuhi adalah

$$x = 11 \text{ dan } y = -49, \text{ sehingga } y \bmod x = -49 \bmod 11 = 6$$

# Bersambung ke Bagian 2