

# Induksi Matematika

(Bagian 1 – Update 2023)



Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika STEI - ITB**

# Pendahuluan

- Metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat adalah **induksi matematik**.
- Contoh:
  1. Buktikan bahwa jumlah  $n$  buah bilangan bulat positif pertama adalah  $n(n + 1)/2$ .
  2. Buktikan bahwa jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$ .

Contoh-contoh lainnya:

1. Setiap bilangan bulat positif  $n$  ( $n \geq 2$ ) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan!
2. Untuk semua  $n \geq 1$ ,  $n^3 + 2n$  adalah kelipatan 3. Buktikan!
3. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Jika ada  $n$  orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah  $n(n - 1)/2$ . Buktikan!
4. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan  $n$  elemen adalah  $2^n$
5. Untuk membayar biaya pos sebesar  $n$  sen ( $n \geq 8$ ) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen saja. Buktikan!

- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.
- Tanpa induksi matematik, kita tentu membuktikannya dengan mencoba semua bilangan bulat. Ini jelas tidak mungkin.

**Contoh:** Buktikan bahwa jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$ .

Jika dibuktikan dengan semua nilai  $n$ , maka langkahnya sbb:

$$n = 1 \rightarrow 1 = 1^2 \quad (\text{benar})$$

$$n = 2 \rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2 \quad (\text{benar})$$

$$n = 3 \rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \quad (\text{benar})$$

$$n = 4 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \quad (\text{benar})$$

...

- Berapa banyak nilai  $n$  yang harus dicoba untuk pembuktian?
- Nilai  $n$  tak berhingga banyaknya, apakah harus dicoba semua? Jelas tidak mungkin
- Solusi pembuktian: gunakan induksi matematika!

# Prinsip Induksi Sederhana.

- Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat positif  $n$ .
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1.  $p(1)$  benar, dan
  2. jika  $p(n)$  benar, maka  $p(n + 1)$  juga benar, untuk setiap  $n \geq 1$ ,

Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

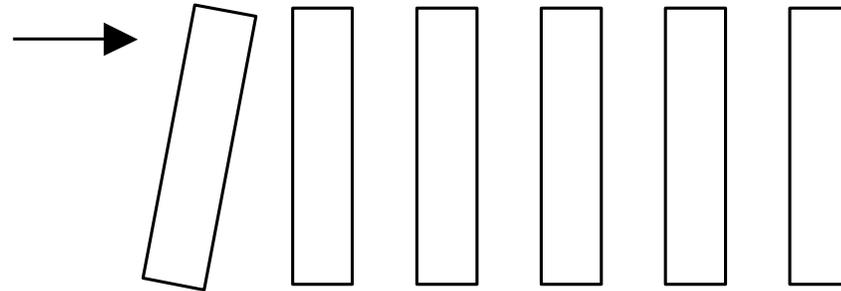
1.  $p(1)$  benar, dan
2. jika  $p(n)$  benar, maka  $p(n + 1)$  juga benar, untuk setiap  $n \geq 1$ ,

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa  $p(n)$  benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
- Bila kita sudah bisa menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat positif  $n$ .

Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1.  $p(1)$  benar, dan
2. jika  $p(n)$  benar, maka  $p(n + 1)$  juga benar, untuk setiap  $n \geq 1$ ,

- Induksi matematik berlaku seperti efek domino.



- Untuk merobohkan semua domino, cukup mendorong domino pertama. Domino pertama akan mendorong domino kedua. Domino kedua akan mendorong domino ketiga, demikian seterusnya.



Sumber:

<http://www.chuckgallagher.com/small-choices-matter-the-domino-effect-in-choices/>

# Contoh pembuktian pertama

**Contoh 1:** Buktikan bahwa jumlah  $n$  bilangan bulat positif pertama adalah  $n(n + 1)/2$ .

Penyelesaian: Misalkan  $p(n)$  menyatakan proposisi bahwa jumlah  $n$  bilangan bulat positif pertama adalah  $n(n + 1)/2$ , yaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

Kita harus membuktikan kebenaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

$$p(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1) / 2$$

*Basis induksi:*  $p(1)$  benar, karena untuk  $n = 1$  kita peroleh

$$\begin{aligned} 1 &= 1(1 + 1) / 2 \\ &= 1(2) / 2 \\ &= 2/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

*Langkah induksi:* Misalkan  $p(n)$  benar, yaitu asumsikan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1) / 2$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa  $p(n + 1)$  juga benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = (n + 1)[(n + 1) + 1] / 2$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + 1)$$

$$\overbrace{\frac{n(n+1)}{2}}^{\text{menurut hipotesis}}$$

$$\begin{aligned} &= [n(n+1)/2] + (n+1) \\ &= (n+1)[n/2 + 1] \\ &= (n+1) + [n/2 + 2/2] \\ &= (n+1)(n+2)/2 \\ &= (n+1)[(n+1) + 1]/2 \end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa untuk semua bilangan bulat positif  $n$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$ . ■

**Contoh 2.** Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$ .

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi:* Untuk  $n = 1$ , jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $1 = 1^2$ . Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan  $p(n)$  benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke- $n$  adalah  $(2n - 1)$ ]. Kita harus memperlihatkan bahwa  $p(n + 1)$  juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$ . ■

# Prinsip Induksi yang Dirampatkan

- Prinsip induksi sederhana hanya bisa dipakai untuk  $n \geq 1$ .
- Untuk sembarang  $n \geq n_0$  kita menggunakan prinsip induksi yang dirampatkan (*generalized induction principle*).
- Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ . Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1.  $p(n_0)$  benar, dan
  2. jika  $p(n)$  benar maka  $p(n+1)$  juga benar, untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$

**Contoh 3.** Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif  $n$ , buktikan dengan induksi matematik bahwa  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi.* Untuk  $n = 0$  (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh:  $2^0 = 2^{0+1} - 1$ .

Ini jelas benar, sebab

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 = 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) *Langkah induksi.* Andaikan bahwa  $p(n)$  benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa  $p(n+1)$  juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} && \text{(hipotesis induksi)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif  $n$ , terbukti bahwa  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$  ■

**Contoh 4.** Untuk semua  $n \geq 1$ , buktikan dengan induksi matematik bahwa  $n^3 + 2n$  adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi:* Untuk  $n = 1$ , maka  $1^3 + 2(1) = 3$  adalah kelipatan 3. Jadi  $p(1)$  benar.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan  $p(n)$  benar, yaitu proposisi  $n^3 + 2n$  adalah kelipatan 3 (hipotesis induksi).

Kita harus memperlihatkan bahwa  $p(n + 1)$  juga benar, yaitu  $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$  adalah kelipatan 3.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2) \\ &= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa:

- $(n^3 + 2n)$  adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi)
- $3(n^2 + n + 1)$  juga kelipatan 3
- maka  $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$  adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3
- sehingga  $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$  juga kelipatan 3.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk semua  $n \geq 1$ ,  $n^3 + 2n$  adalah kelipatan 3. ■

# Latihan 1

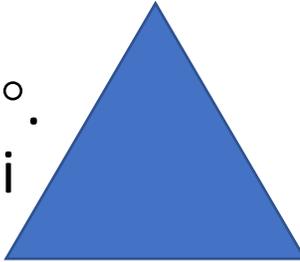
- Untuk tiap  $n \geq 3$ , jumlah sudut di dalam sebuah poligon dengan  $n$  sisi adalah  $180(n - 2)^\circ$ . Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik.

Untuk tiap  $n \geq 3$ , jumlah sudut di dalam sebuah poligon dengan  $n$  sisi adalah  $180(n - 2)^\circ$ . Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik.

## Jawaban Latihan 1

### (i) Basis

Untuk nilai  $n = 3$ , poligon akan berbentuk segitiga dengan jumlah sudut  $180^\circ$ . Jumlah sisi sebanyak 3 sehingga  $180(3 - 2) = 180^\circ$ . Jadi untuk  $n = 3$  proposisi benar



### (ii) Langkah induksi

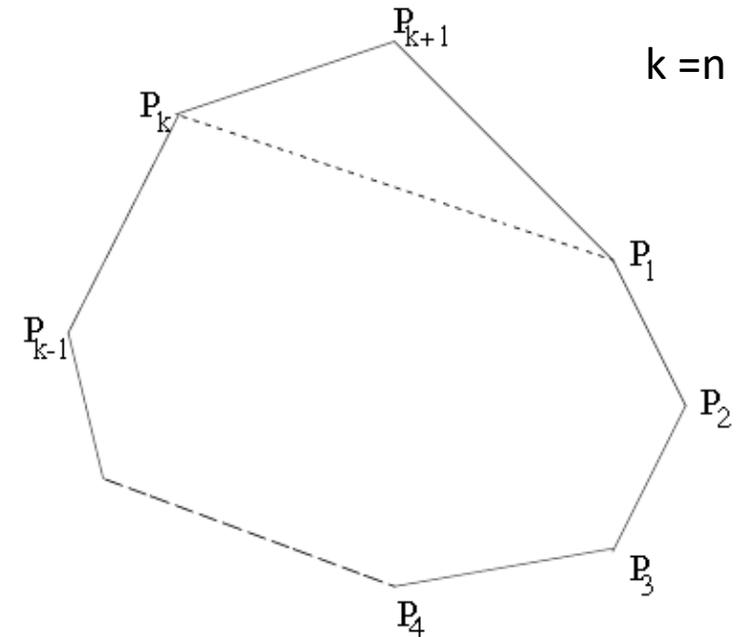
Asumsikan bahwa jumlah sudut dalam poligon dengan  $n$  sisi yaitu  $180(n - 2)^\circ$  adalah benar (hipotesis induksi).

Kita ingin menunjukkan bahwa jumlah sudut poligon yang memiliki  $n+1$  sisi adalah  $180((n + 1) - 2)^\circ = 180(n - 1)^\circ$ .

- Pada gambar di samping dapat ditunjukkan bahwa untuk  $k = n$  terdapat dua bagian yaitu segitiga  $P_1P_kP_{k+1}$  dan poligon dengan  $k$  sisi

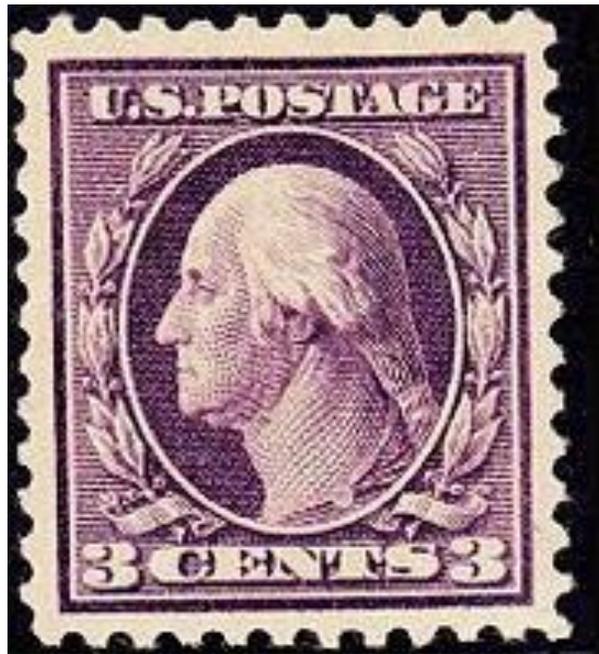
Jumlah sudut di dalam poligon  $n$  sisi menurut hipotesis induksi adalah  $180(n - 2)^\circ$  dan jumlah sudut di dalam segitiga adalah  $180^\circ$ .

Jadi jumlah sudut dalam dari poligon dengan  $n + 1$  sisi yaitu  $180(n - 2)^\circ + 180^\circ = 180(n - 1)^\circ$ .



- Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar. ■

**Contoh 5.** Di kantor pos tersedia perangko 3 sen dan 5 sen. Biaya pos pengiriman surat menggunakan kedua perangko tersebut. Buktikan pernyataan “Untuk membayar biaya pos sebesar  $n$  sen ( $n \geq 8$ ) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen saja” adalah benar.



## Penyelesaian:

(i) *Basis induksi.* Untuk membayar biaya pos sebesar 8 sen dapat digunakan satu buah perangko 3 sen dan satu buah perangko 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) *Langkah induksi.* Andaikan  $p(n)$  benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar  $n$  ( $n \geq 8$ ) sen dapat digunakan perangko 3 sen atau 5 sen (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa  $p(n + 1)$  juga benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar  $n + 1$  sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan 5 sen. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:

- Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai  $n$  sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko senilai 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen maka akan diperoleh susunan perangko senilai  $n + 1$  sen.
- Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai  $n$  sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena  $n \geq 8$ , setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan dua buah perangko 5 sen akan dihasilkan nilai perangko  $n + 1$  sen.

Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar. ■

# Latihan 1

Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika ada  $n$  orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah  $n(n - 1)/2$ .



## Jawaban:

Nilai  $n$  minimal 2. Misalkan  $p(n)$  adalah proposisi bahwa jika ada  $n$  orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah  $n(n - 1)/2$ .

(i) *Basis Induksi:*  $p(2)$  benar, karena untuk  $n = 2$  orang tamu, hanya ada satu kali jabat tangan yang terjadi, sesuai dengan rumus  $2(2 - 1)/2 = 1$ .

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan  $p(n)$  benar, yaitu asumsikan jumlah jabat tangan yang terjadi sebanyak  $n(n - 1)/2$  (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa  $p(n + 1)$  benar, yaitu jumlah jabat tangan yang terjadi di antara  $n + 1$  orang tamu adalah  $(n+1)((n + 1) - 1)/2 = n(n+1)/2$ .

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Untuk  $n + 1$  orang, jumlah jabat tangan yang terjadi haruslah berupa jumlah jabat tangan  $n$  orang tamu ditambah jabat tangan yang dilakukan tamu ke- $(n + 1)$ . Menurut hipotesis induksi, untuk  $n$  orang tamu, jumlah jabat tangan yang terjadi adalah  $n(n - 1)/2$ . Tamu yang ke- $(n + 1)$  ini akan berjabat tangan sebanyak  $n$  kali dengan  $n$  orang tamu lainnya (masing-masing sekali) sehingga jumlah jabat tangan keseluruhan adalah

$$\begin{aligned}n(n - 1)/2 + n &= n(n - 1)/2 + 2n/2 \\ &= (n^2 - n + 2n)/2 \\ &= (n^2 + n)/2 \\ &= n(n + 1)/2\end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa jika ada  $n$  orang tamu, maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah  $n(n - 1)/2$ . ■

## Latihan 2

Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai Rp5 dan Rp6? Buktikan jawabanmu dengan prinsip induksi matematik.

## Jawaban:

Kombinasi biaya pos dengan perangko 5 sen dan 6 sen dapat ditulis sebagai  $5m + 6n$ , dengan  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat. Dengan mencoba kombinasi nilai  $m$  dan  $n$  mulai dari 0, 1, 2, 3, 4, ..., maka diperoleh biaya pos yang dapat dibayar mulai 20 sen, 21 sen, 22 sen dan seterusnya.

Akan kita buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk biaya pos sebesar  $n \geq 20$  sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

Misalkan  $p(n)$  adalah proposisi bahwa untuk biaya pos sebesar  $n \geq 20$  sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

(i) *Basis induksi:*  $p(20)$  benar, karena untuk biaya pos sebesar 20 sen, kita dapat menggunakan 4 perangko 5 sen saja.

(ii) *Langkah induksi.* Andaikan  $p(n)$  benar, yaitu asumsikan biaya pos sebesar  $n \geq 20$  sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa  $p(n + 1)$  benar, yaitu biaya pos sebesar  $n + 1$  sen juga dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen saja. Ada dua kemungkinan yang harus kita tinjau:

- 1) Jika untuk membayar biaya pos  $n$  sen digunakan perangko 5 sen saja, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 5 sen (sebab  $n \geq 20$ ), maka dengan mengganti sebuah perangko 5 sen dengan 6 sen selalu dapat dibayar biaya pos sebesar  $n + 1$  sen.
- 2) Jika untuk membayar biaya pos  $n$  sen digunakan perangko 6 sen, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 6 sen (sebab  $n \geq 20$ ). Dengan mengganti 4 buah perangko 6 sen dengan 5 buah, diperoleh susunan perangko senilai  $n + 1$  sen.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa biaya pos sebesar  $n \geq 20$  sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen. ■

# Latihan 3

Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp20.000 dan Rp50.000.

Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

(Tuliskan jawabanmu!)

# Latihan 4

Buktikan dengan induksi matematik bahwa  $n^5 - n$  habis dibagi 5 untuk  $n$  bilangan bulat positif.

# Latihan 5

Jika  $A_1, A_2, \dots, A_n$  masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematik hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$$

# Latihan 6

Perlihatkan bahwa  $[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$  adalah tautologi bilamana  $p_1, p_2, \dots, p_n$  adalah proposisi.

# Latihan 7

Misalkan ada sejumlah  $n$  ganjil orang ( $n > 1$ ) yang berkumpul di sebuah lapangan, di sini mereka masing-masing memegang sebuah kue *pie* yang siap dilemparkan ke orang lain yang paling dekat dengannya. Jarak antar orang berbeda (tidak ada jarak antar pasangan yang sama). Jika semua orang harus melempar kue dengan simultan(bersamaan), buktikan bahwa minimal ada satu orang yang tidak terkena lemparan kue.



Jawaban:

(i) Basis: Untuk  $n = 3$ , ada tiga orang A, B dan C maka akan ada 1 pasang orang dengan jarak terpendek, sebut saja sehingga pasangan tersebut A dan B saling melempar kue satu sama lain, akibatnya C tidak akan kena lemparan kue, C akan melempar salah satu dari A atau B, tergantung yang paling dekat dengan C.



(ii) Langkah induksi: Karena  $n$  ganjil, misalkan untuk  $n = 2k+1$  orang minimal ada satu orang yang tidak kena lemparan (hipotesis induksi), maka akan ditunjukkan bahwa untuk  $n + 1 = 2(k+1)+1 = 2k + 3$  orang juga terdapat minimal 1 orang yang tidak kena lemparan *pie*.

Buktinya sebagai berikut. Misalkan diantara  $2k+3$  orang, A dan B adalah pasangan terdekat(jadi mereka melempar satu sama lain), di sini akan dibagi menjadi dua kasus:

- Jika diantara  $2k+1$  orang tersisa ada minimal satu orang yang melempar *pie* ke A atau B, maka akan ada maksimal  $(2k+3) - 3$  *pie* yang dilempar ke  $2k+1$  orang, artinya ada  $(2k+3) - 3 = 2k$  kue *pie* yang dilempar ke  $2k+1$  orang, sehingga ada 1 orang yang tidak terlempar kue *pie*.
- Jika diantara  $2k+1$  sisa orang tidak ada yang melempar kue *pie* ke A dan B, maka masalah selesai (dari hipotesis induksi  $2k+1$ ).

Apa yang salah dari pembuktian induksi matematik ini? (1)

Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan  $p(n)$  adalah proposisi bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama.

*Basis induksi:* jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah  $p(1)$  benar.

*Langkah induksi:* Misalkan  $p(n)$  benar, yaitu asumsikan bahwa semua kuda di dalam himpunan  $n$  ekor kuda berwarna sama. (hipotesis)

Untuk membuktikan  $p(n+1)$  benar, tinjau untuk himpunan dengan  $n + 1$  kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan  $1, 2, 3, \dots, n, n+1$ .

Tinjau dua himpunan, yaitu  $n$  ekor kuda yang pertama  $(1, 2, \dots, n)$  harus berwarna sama, dan  $n$  ekor kuda yang terakhir  $(2, 3, \dots, n, n+1)$  juga harus berwarna sama.

Karena himpunan  $n$  kuda pertama dan himpunan  $n$  kuda terakhir beririsan, maka semua  $n+1$  kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa  $P(n+1)$  benar. Kesimpulannya:  $p(n)$  benar.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar untuk himpunan dengan dua ekor kuda (yaitu ketika  $n + 1 = 2$ ), sebab dua himpunan yang dibentuk tidak akan pernah beririsan. Himpunan pertama berisi kuda bernomor 1, sedangkan himpunan kedua kuda bernomor 2.

# Apa yang salah dari pembuktian induksi matematik ini? (2)

Teorema: Untuk setiap bilangan bulat tak-negatif  $n$ , berlaku bahwa  $5n = 0$ .

*Basis induksi:* Untuk  $n = 0$ , maka  $5 \cdot 0 = 0$  benar)

*Langkah induksi:* Misalkan bahwa  $5n = 0$  untuk semua bilangan bulat tak-negatif  $n$ . (hipotesis induksi)

Untuk membuktikan  $p(n+1)$ , tulislah  $n + 1 = i + j$ , yang dalam hal ini  $i$  dan  $j$  adalah bilangan asli yang kurang dari  $n+1$ .

$$\begin{aligned}\text{Selanjutnya, } 5(n+1) &= 5(i + j) \\ &= 5i + 5j \\ &= 0 + 0 \quad (\text{menurut hipotesis induksi}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Darikedua langkah di atas, maka terbukti untuk setiap bilangan bulat tak-negatif  $n$ , berlaku  $5n = 0$ .

Jawaban:

Kesalahan terjadi ketika berpindah dari  $n = 0$  ke  $n = 1$ , sebab 1 tidak dapat ditulis sebagai penjumlahan dua buah bilangan asli.

# Prinsip Induksi Kuat

- Kadang-adang diperlukan lebih dari satu hipotesis induksi untuk membuktikan sebuah pernyataan. Untuk itu kita menggunakan prinsip induksi kuat (*strongly induction principle*).
- Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat. Kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ .
- Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1.  $p(n_0)$  benar, dan
  2. jika  $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$  benar maka  $p(n+1)$  juga benar untuk semua  $n \geq n_0$ .
- Pada poin 2 terdapat lebih dari satu hipotesis, yaitu mengasumsikan  $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$  benar.

**Contoh 6.** Bilangan bulat positif disebut bilangan prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut hanya habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat  $n$  ( $n \geq 2$ ) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

*Basis induksi.* Jika  $n = 2$ , maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

*Langkah induksi.* Misalkan pernyataan bahwa bilangan  $2, 3, \dots, n$  dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi).

Kita perlu menunjukkan bahwa  $n + 1$  juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai  $n + 1$ :

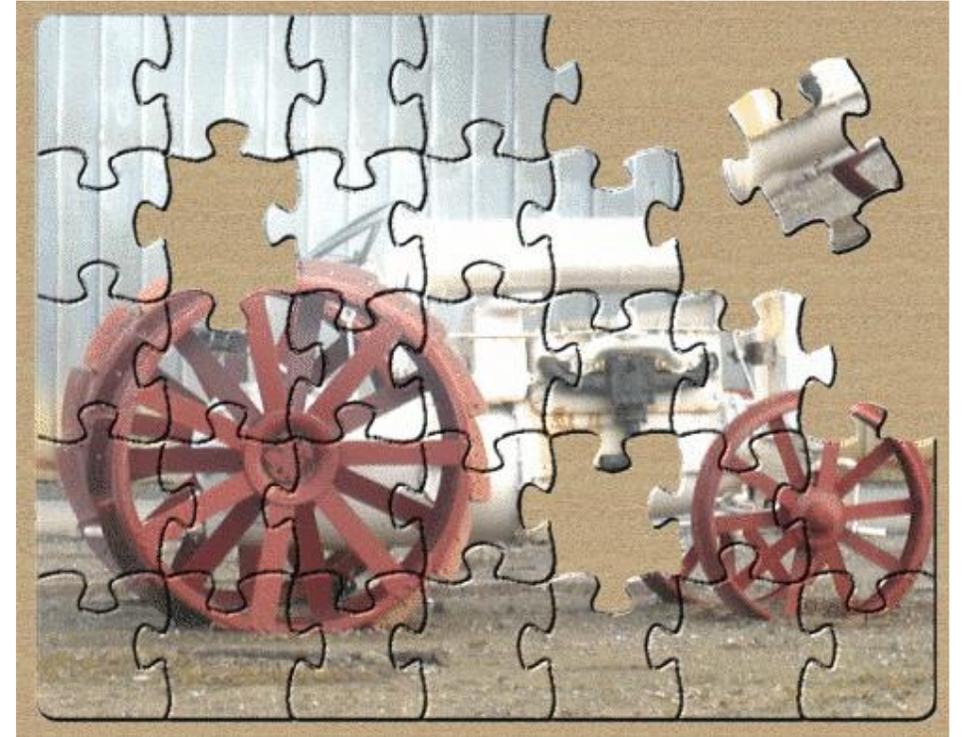
- Jika  $n + 1$  sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
- Jika  $n + 1$  bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif  $a$  yang membagi habis  $n + 1$  tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1) / a = b \quad \text{atau} \quad (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini,  $2 \leq a \leq b \leq n$ . Menurut hipotesis induksi,  $a$  dan  $b$  dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti,  $n + 1$  jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena  $n + 1 = ab$ . ■

- Pada contoh 6 di atas, kita membuat hipotesis lebih dari satu, yaitu:
  - asumsikan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
  - asumsikan 3 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
  - ...
  - asumsikan  $n$  dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
- Karena  $2 \leq a \leq b \leq n$ , maka menurut hipotesis induksi di atas  $a$  dan  $b$  juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.
- Dengan menggunakan banyak hipotesis, maka pembuktian kita menjadi lebih kuat.
- Jika hanya satu saja hipotesisnya, yaitu mengasumsikan  $n$  dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, maka pembuktiannya menjadi kurang kuat.

**Contoh 7.** [LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar.



Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar.



Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah.

Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan  $n$  potongan, selalu diperlukan  $n - 1$  langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

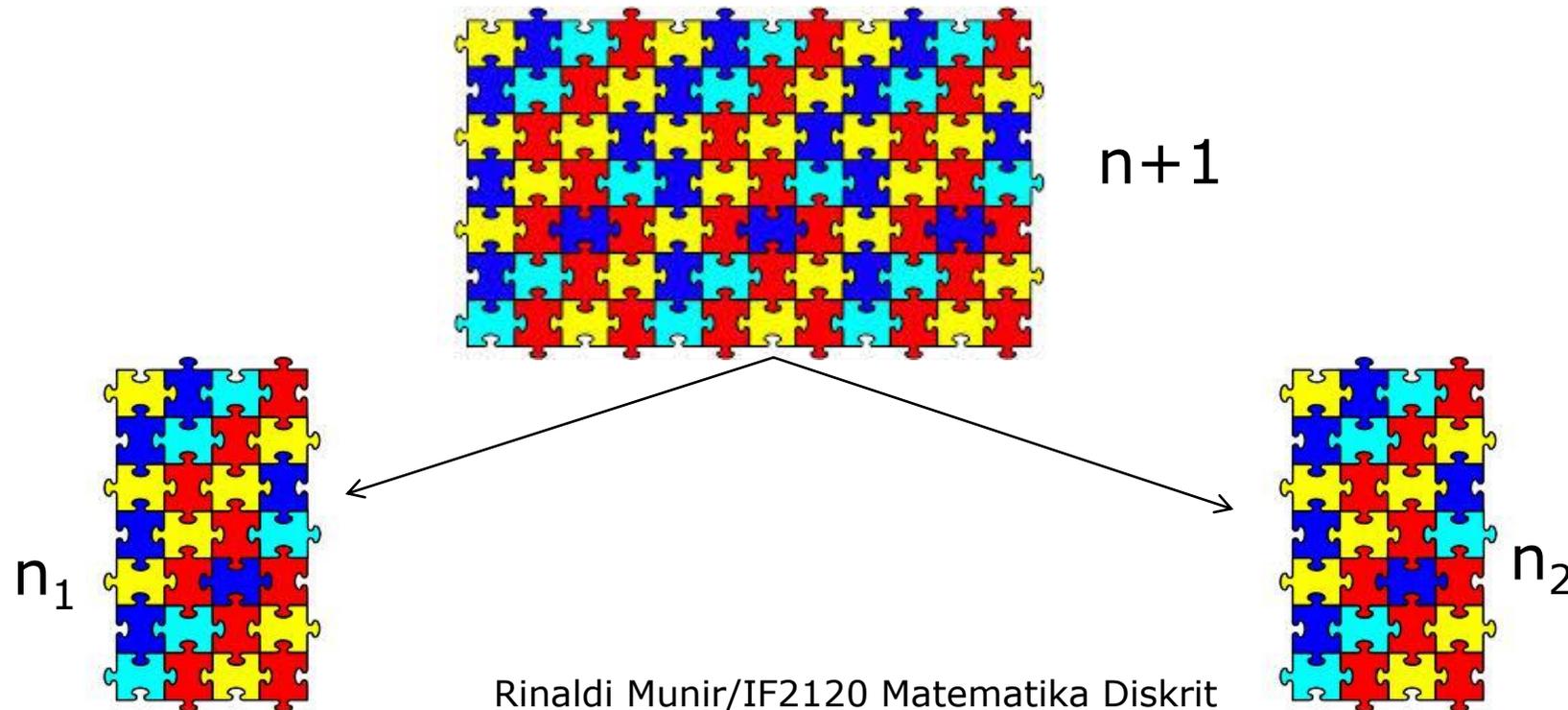
Penyelesaian:

(i) *Basis induksi.* Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.



(ii) *Langkah induksi.* Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan  $n$  potongan ( $n = 1, 2, 3, \dots, k$ ) diperlukan sejumlah  $n - 1$  langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk  $n + 1$  potongan diperlukan  $n$  langkah.

Bagilah  $n + 1$  potongan menjadi dua buah blok –satu dengan  $n_1$  potongan dan satu lagi dengan  $n_2$  potongan, dan  $n_1 + n_2 = n + 1$ .



Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar.

Menurut hipotesis induksi, diperlukan  $n_1 - 1$  langkah untuk menyatukan blok yang satu dan  $n_2 - 1$  langkah untuk menyatukan blok yang lain.

Digabungkan dengan satu langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 \text{ langkah terakhir} = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan  $n$  potongan, selalu diperlukan  $n - 1$  langkah untuk memecahkan teki-teki itu. ■

# Latihan (Kuis 2016)

Anda memiliki sebatang coklat berbentuk persegi panjang yang terdiri dari  $n$  buah coklat berbentuk persegi. Anda ingin mematahkan batang coklat tersebut menjadi kumpulan persegi-persegi coklat kecil. Dalam mematahkan coklat, anda hanya bisa mematahkan pada garis-garis diantara coklat-coklat persegi. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah pematahan yang harus dilakukan adalah  $n - 1$  !



**Jawaban:** Selesaikan dengan prinsip induksi kuat

(i) Basis Induksi

Untuk  $n = 1$ , maka dibutuhkan  $n - 1 = 0$  kali pematahan. Ini benar karena coklat hanya punya satu persegi sehingga tidak ada pematahan.

(ii) Langkah Induksi

Asumsikan untuk mematahkan sebatang coklat yang terdiri dari  $n$  buah coklat persegi ( $n = 1, 2, 3, \dots, k$ ) dibutuhkan  $n - 1$  pematahan adalah benar. (hipotesis induksi)

Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebatang coklat dengan  $n + 1$  buah coklat persegi dibutuhkan  $n$  pematahan. Caranya sebagai berikut:

Patahkan batang coklat itu sehingga terbagi menjadi dua potongan dengan  $n_1$  persegi dan  $n_2$  persegi, yang dalam hal ini  $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq (n + 1)$ , dan  $n_1 + n_2 = n + 1$

Menurut hipotesis induksi, kita dapat mematahkan potongan  $n_1$  sebanyak  $n_1 - 1$  kali dan potongan  $n_2$  sebanyak  $n_2 - 1$  kali. Sehingga jumlah pematahan seluruhnya adalah

$$1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = (n + 1) - 1 = n$$

Perhatikan bahwa angka 1 berasal dari pematahan pertama menjadi  $n_1$  dan  $n_2$ .

Karena langkah 1 basis dan langkah induksi sudah ditunjukkan benar, maka terbukti jumlah pematahan yang harus dilakukan adalah  $n - 1$

BERSAMBUNG ke BAGIAN 2