Relasi dan Fungsi

Bagian 2 (Update 2023)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

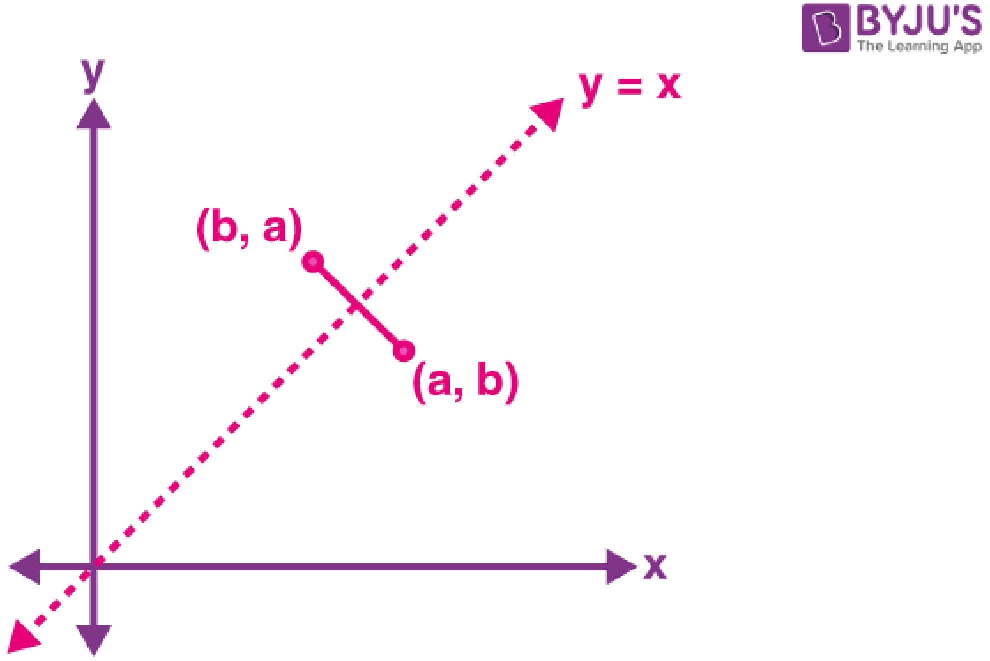
Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Relasi Inversi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$



Contoh 17. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengkombinasikan Relasi

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 18. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \quad \text{dan} \quad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

Contoh 19. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Komposisi Relasi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

  $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk beberapa $b \in B$, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S \}$

Contoh 20. Misalkan

R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)}

adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

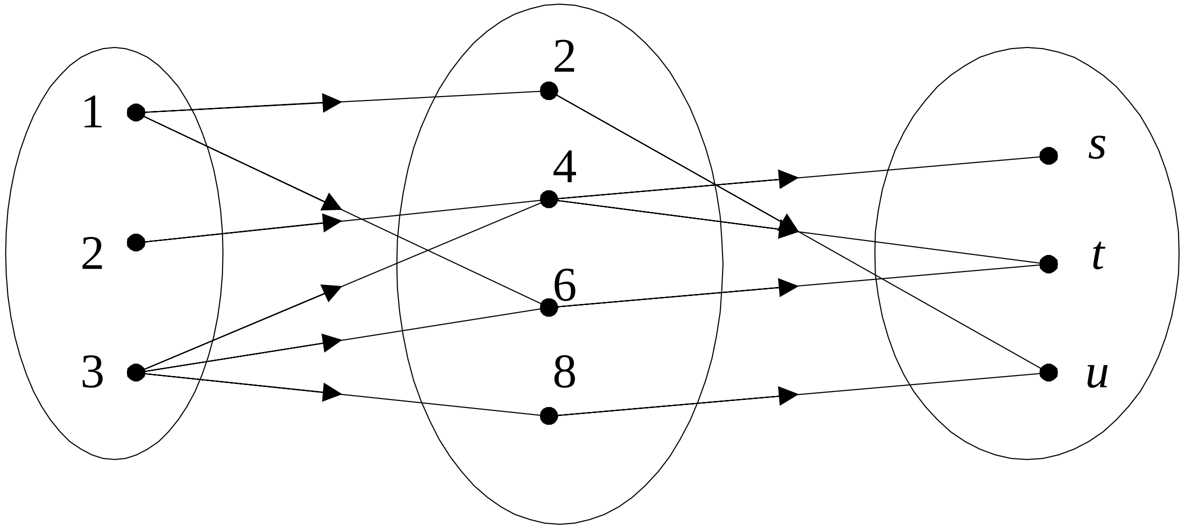
S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}

adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {s, t, u}.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$S \circ R$ = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) }

Komposisi relasi *R* dan *S* lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

Contoh 21. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \, . \, M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- R^n menyatakan komposisi relasi dengan dirinya sendiri sebanyak n kali:

$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R$ (sebanyak n kali) Contoh: $R^3 = R \circ R \circ R$

dan

$$M_{R^n} = M_R^{[n]}$$

- Oleh karena

$R^{n+1} = R^n \circ R$

maka

$$M_{R^{n+1}} = M_R \cdot M_R^{[n]}$$

(catatan: $M_R \cdot M_R^{[n]} = M_R^{[n]} \cdot M_R$)

Relasi n-ary

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.

- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener).

- Jika n = 2, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata.

- Misalkan A_1, A_2, …, A_n adalah himpunan. Relasi *n-ary* R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

- Himpunan A_1, A_2, …, A_n disebut daerah asal relasi dan n disebut **derajat**.

Contoh 22. Misalkan

NIM = {13598011, 13598014, 13598015, 13598019, 13598021, 13598025}
$Nama$ = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}
$MatKul$ = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data, Arsitektur Komputer}
$Nilai$ = {A, B, C, D, E}

Relasi MHS terdiri dari 5-tupel (NIM, $Nama$, $MatKul$, $Nilai$):

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

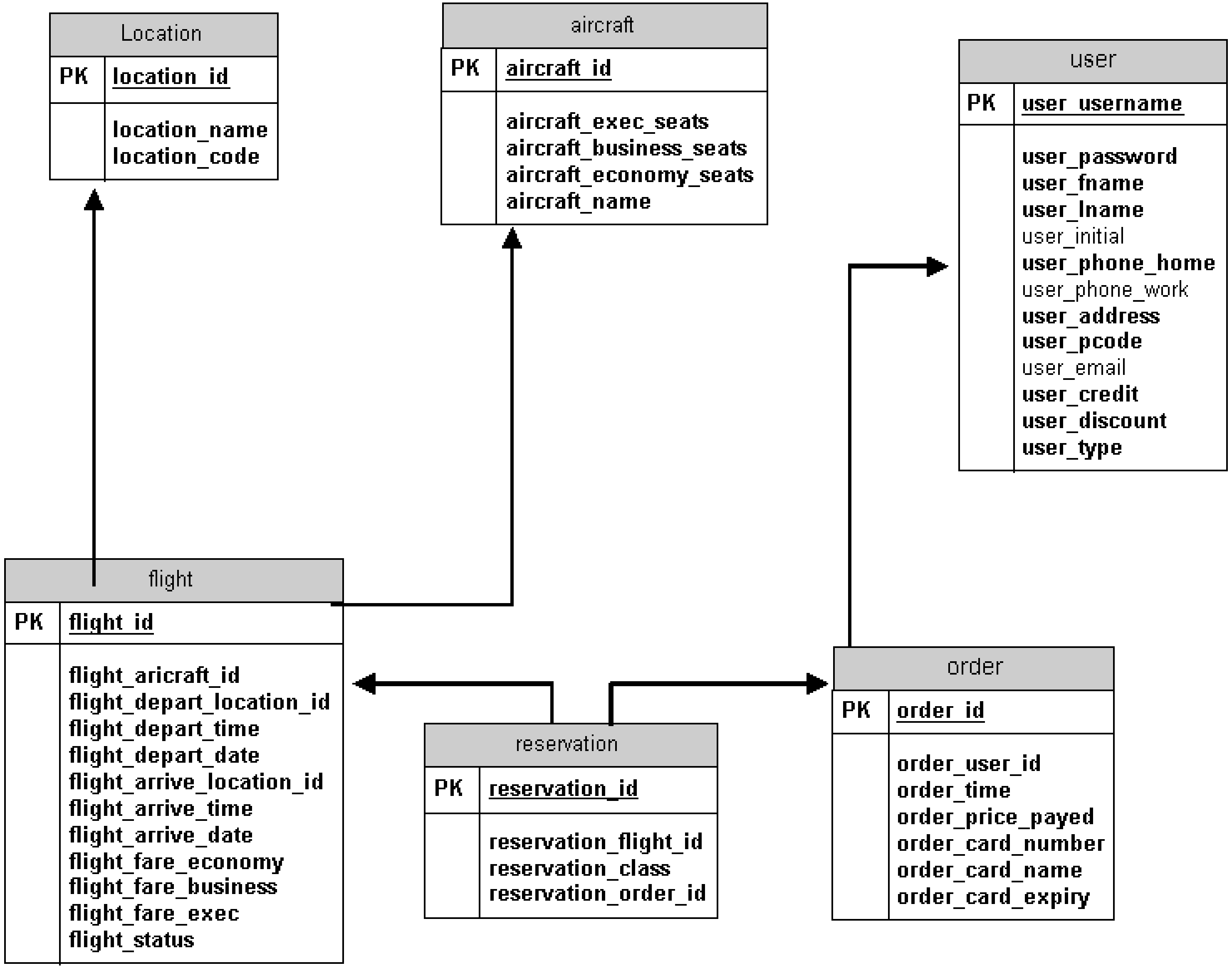
MHS = {(13598011, Amir, Matematika Diskrit, A),
(13598011, Amir, Arsitektur Komputer, B),
(13598014, Santi, Arsitektur Komputer, D),
(13598015, Irwan, Algoritma, C),
(13598015, Irwan, Struktur Data C),
(13598015, Irwan, Arsitektur Komputer, B),
(13598019, Ahmad, Algoritma, E),
(13598021, Cecep, Algoritma, A),
(13598021, Cecep, Arsitektur Komputer, B),
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B),
(13598025, Hamdan, Algoritma, A, B),
(13598025, Hamdan, Struktur Data, C),
(13598025, Hamdan, Ars. Komputer, B)
}

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

- Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel.
- Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*).
- Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.
- Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**.
- Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.

Contoh basis data relasional:



- Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.
- Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.
- Secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.
-
- Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).

- Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.

- Contoh *query*:
  "tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit"
  "tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015"
  "tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil"

- *Query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.

- Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

Seleksi

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.

Operator: σ

Contoh 23. Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul=''Matematika Diskrit''}}\ (\text{MHS})$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)

Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.

Operator: π

Contoh 24. Operasi proyeksi

$$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}}\ (\text{MHS})$$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$$\pi_{\text{NIM, Nama}}\ (\text{MHS})$$

menghasilkan Tabel 3.6.

Tabel 3.5

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 3.6

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

Join

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.

Operator: τ

Contoh 25. Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*

$$\tau_{\text{NIM, Nama}}(\text{MHS1, MHS2})$$

menghasilkan Tabel 3.9.

Tabel 3.7 MHS1

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 3.8 MHS2

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statisitik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 3.9 $\tau_{\text{NIM, Nama}}$(MHS1, MHS2)

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

SQL

- Bahasa khusus untuk *query* di dalam basisdata disebut *SQL* (*Structured Query Language*).
- Bahasa ini dirancang agar dapat merealisasikan *query* abstrak yang sudah dijelaskan. Misalnya,

SELECT NIM, Nama, MatKul, Nilai
FROM MHS
WHERE MatKul = ’Matematika Diskrit’

adalah bahasa *SQL* yang bersesuaian untuk *query* abstrak

$\sigma_{Matkul=\text{"Matematika Diskrit"}}(MHS)$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A)
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B).

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

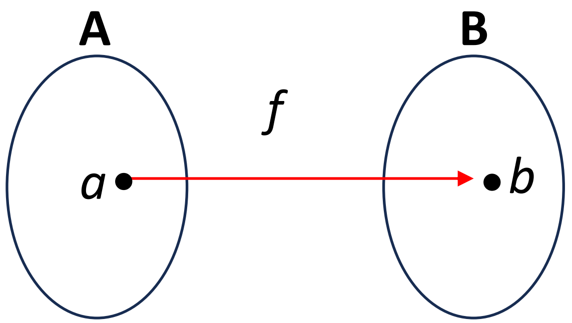
Fungsi

- Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.

- Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B.

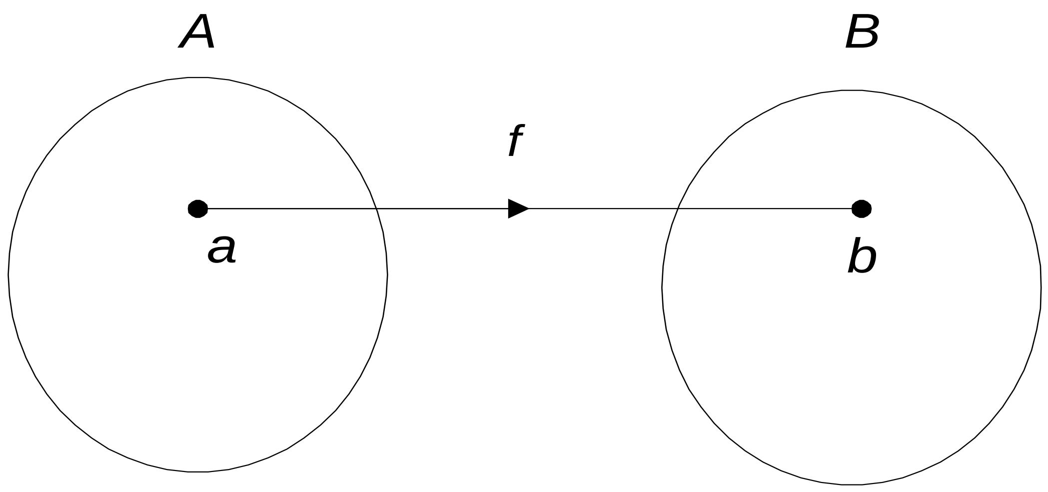


- A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah tujuan** (*codomain*) dari f.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.

- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  1. Tiap elemen di dalam himpunan *A* harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan *f*.

  2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.

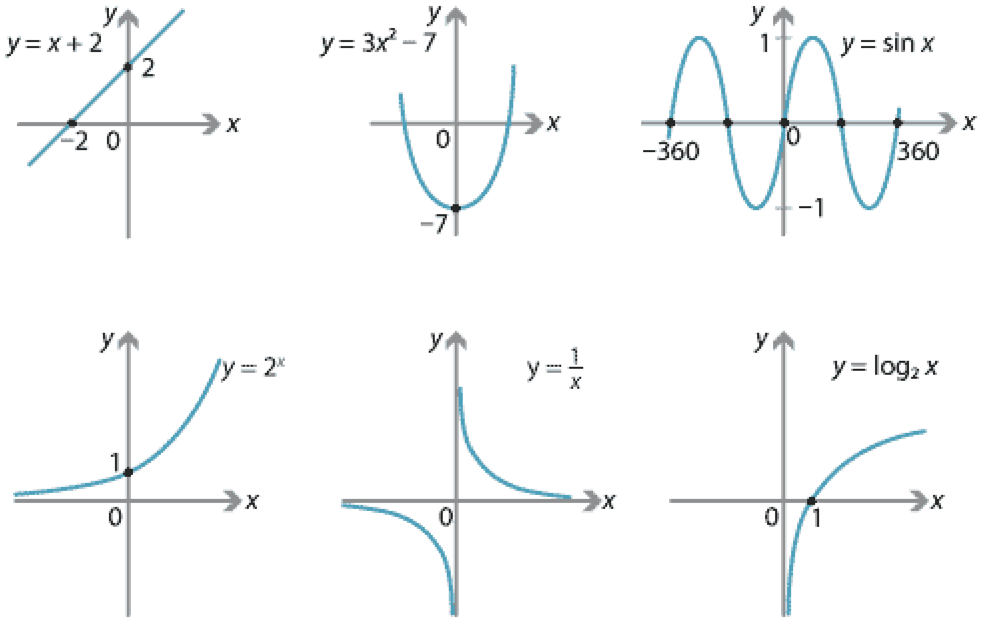
  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

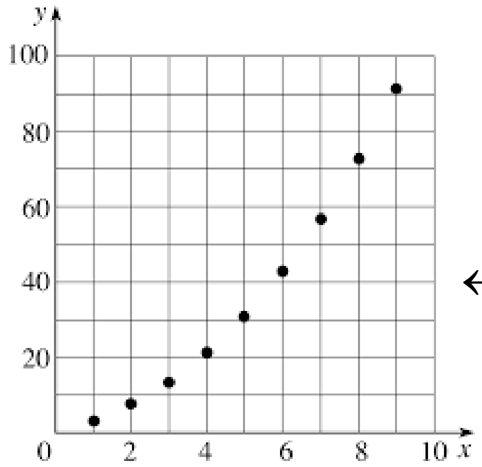
  3. Kata-kata
     Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

  4. Kode program (*source code*)
     Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
   if x < 0 then
      abs:=-x
   else
      abs:=x;
end;
```

5. Kurva/grafik dalam bidang kartesian





← fungsi diskrit

Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah tujuan adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah tujuannya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 30. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah tujuan dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

Contoh 31. Misalkan *A* adalah himpunan mahasiswa di ITB. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan *A*?

(i) Setiap mahasiswa memetakan NIM (Nomor Induk Mahasiswa).
(ii) Setiap mahasiswa memetakan nomor *handphone*-nya.
(iii) Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya.
(iv) Setiap mahasiswa memetakan anaknya.

<u>Jawaban</u>:

(i) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai satu buah NIM.
(ii) Tidak, karena ada mahasiswa yang mempunyai lebih dari satu nomor HP atau tidak mempunyai HP sama sekali.
(iii) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai 1 orang dosen wali.
(iv) Tidak, jika ada mahasiwa yang belum menikah.

Contoh 32. Misalkan f : **R** $\rightarrow$ **R** didefinisikan oleh $f(x) = \sqrt{x}$. Apakah f sebuah fungsi? Mengapa?

Jawaban:

- Persamaan $f(x) = \sqrt{x}$ bukanlah sebuah fungsi di dalam himpunan bilangan riil, karena tidak semua nilai x di dalam **R** dipetakan oleh f ke **R**. Relasi f hanya terdefinisi untuk nilai-nilai $x \geq 0$, untuk nilai x negatif tidak ada akar pangkat duanya.

- Namun, jika daerah asal dan daerah tujuan fungsi diubah, misalnya f : $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ atau diubah menjadi $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, dalam hal ini $D = \{x \mid x \geq 0\}$, maka $f(x) = \sqrt{x}$ adalah sebuah fungsi.
- Perhatikan bahwa $f(x) = \sqrt{x}$ berbeda artinya dengan $f(x) = \pm\sqrt{x}$. Penulisan $f(x) = \sqrt{x}$ artinya hanya untuk akar bernilai positif *(principal root)*

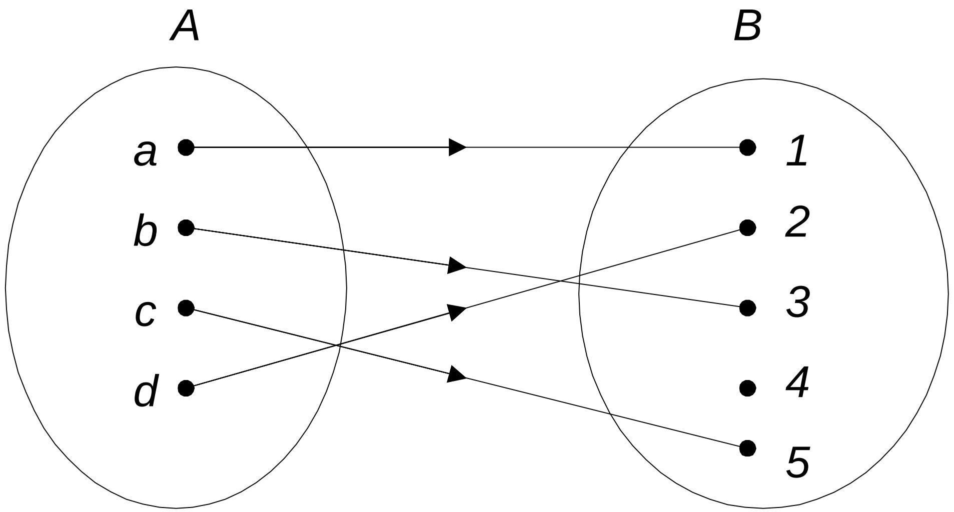
Contoh 33. Tentukan daerah asal fungsi yang berbentuk $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

Jawaban: Fungsi f hanya terdefinisi untuk $x^2 - 5x + 6 > 0$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$
$$(x - 2)(x - 3) > 0$$
$$x < 2 \text{ atau } x > 3$$

Jadi, daerah asal f adalah $\{ x \mid x < 2 \text{ atau } x > 3, x \in \mathbf{R}\}$

- Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.



Contoh 34. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu,
karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh 35. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

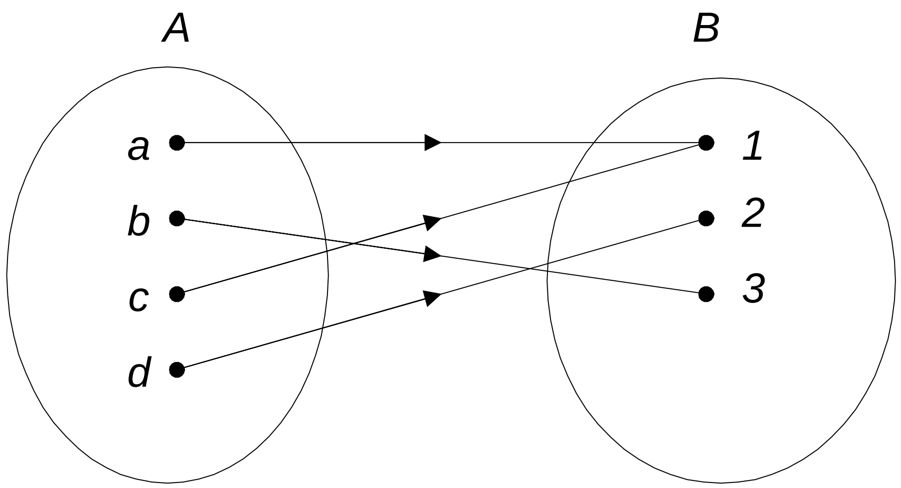
(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,

$a - 1 \neq b - 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.

- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



Contoh 36. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh 37. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijektif** (*bijective*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

Contoh 38. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

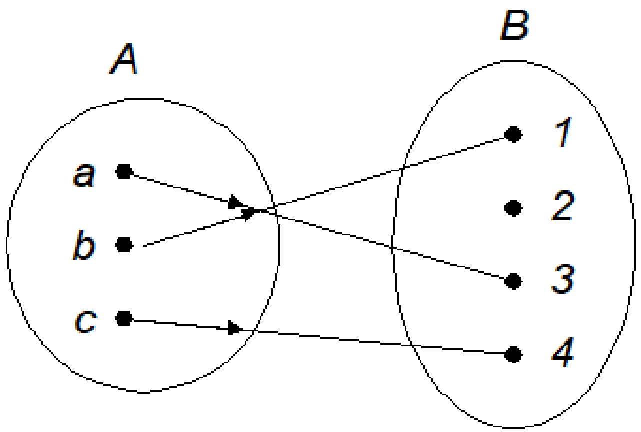
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 39. Fungsi

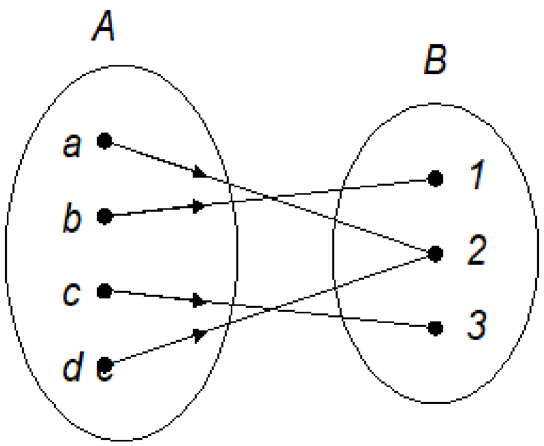
$$f(x) = x - 1$$

merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

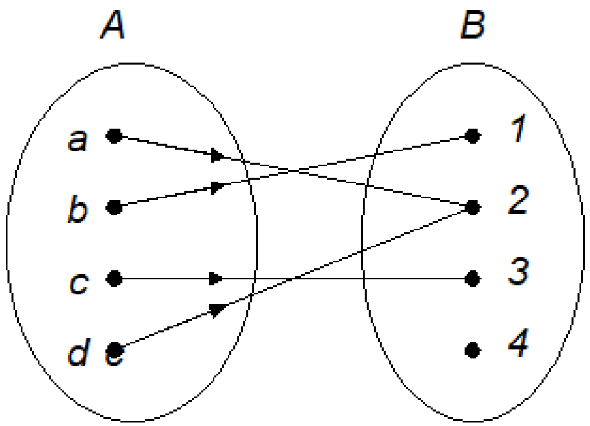
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



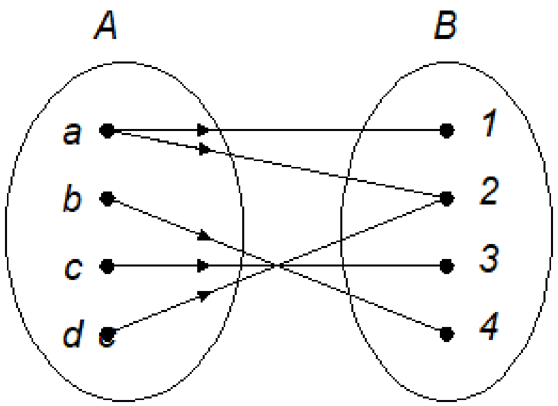
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu

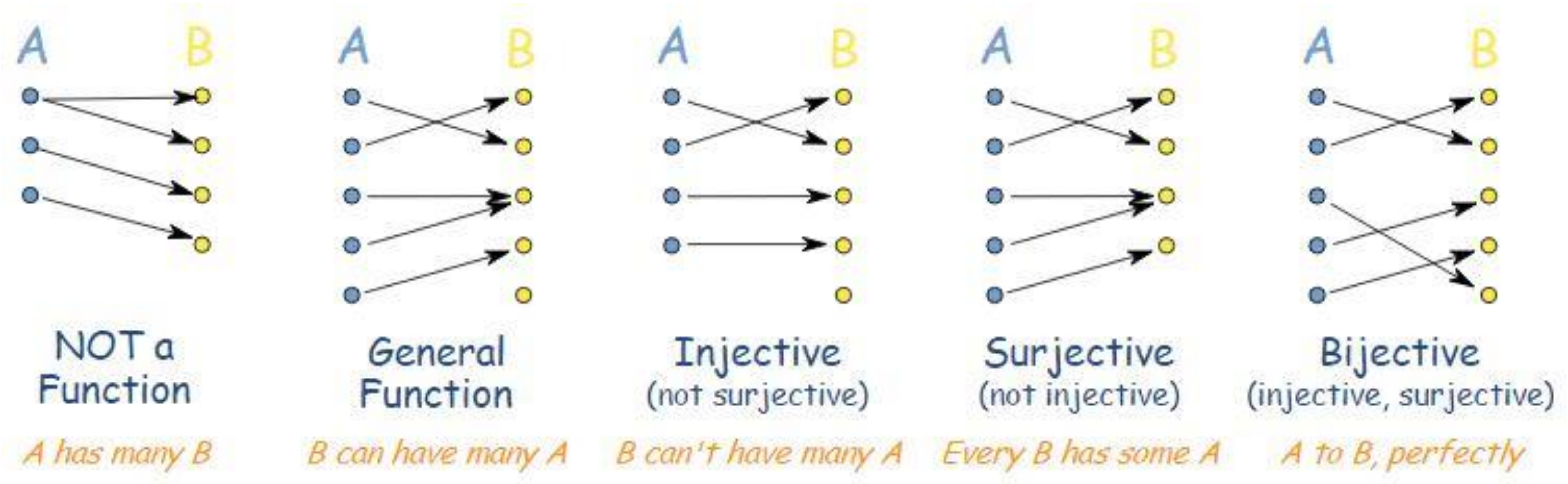


Bukan fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi





https://www.aplustopper.com/injective-surjective-bijective/

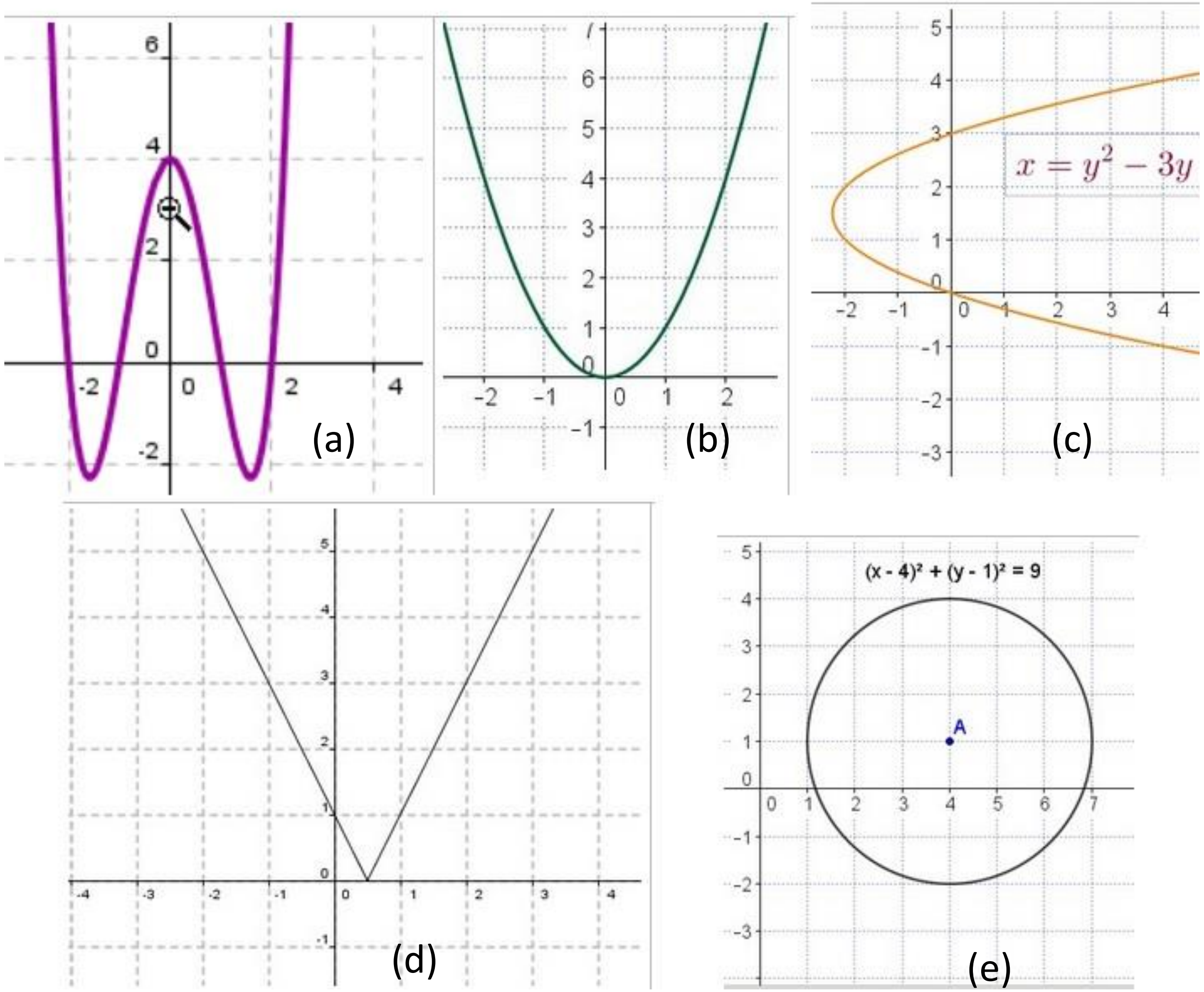
Contoh 40 (Kuis 2022). Tentukan apakah fungsi dibawah ini injektif, surjektif, bijektif, bukan fungsi, atau bukan keempatnya. Tuliskan juga alasannya! (fungsi memetakan himpunan yang disebutkan pertama ke himpunan yang disebutkan kedua).

a) Fungsi “memiliki” pada himpunan mahasiswa ITB dengan himpunan NIM ITB
b) Fungsi “mengambil” pada himpunan mahasiswa semester 3 Informatika ITB dengan himpunan mata kuliah wajib semester 3 Program Studi Informatika ITB.
c) Fungsi “terdaftar di kelas” pada himpunan mahasiswa yang mengambil Matdis dengan himpunan kelas K1,K2,K3.

Jawaban:

a) Bijektif karena setiap mahasiswa pasti memiliki NIM dan setiap NIM pasti dimiliki oleh seorang mahasiswa. NIM mahasiswa juga unik sehingga tidak ada 2 mahasiswa yang dipetakan pada NIM yang sama
b) Bukan fungsi karena satu orang mahasiswa dipetakan ke lebih dari satu buah mata kuliah wajib semester 3
c) Surjektif karena setiap mahasiswa yang mengambil matdis pasti terdaftar di salah satu kelas K1,K2, atau K3. Lalu setiap kelas pasti memiliki mahasiswa yang terdaftar dan bisa lebih dari 1 mahasiswa pada setiap kelas (bukan injektif).

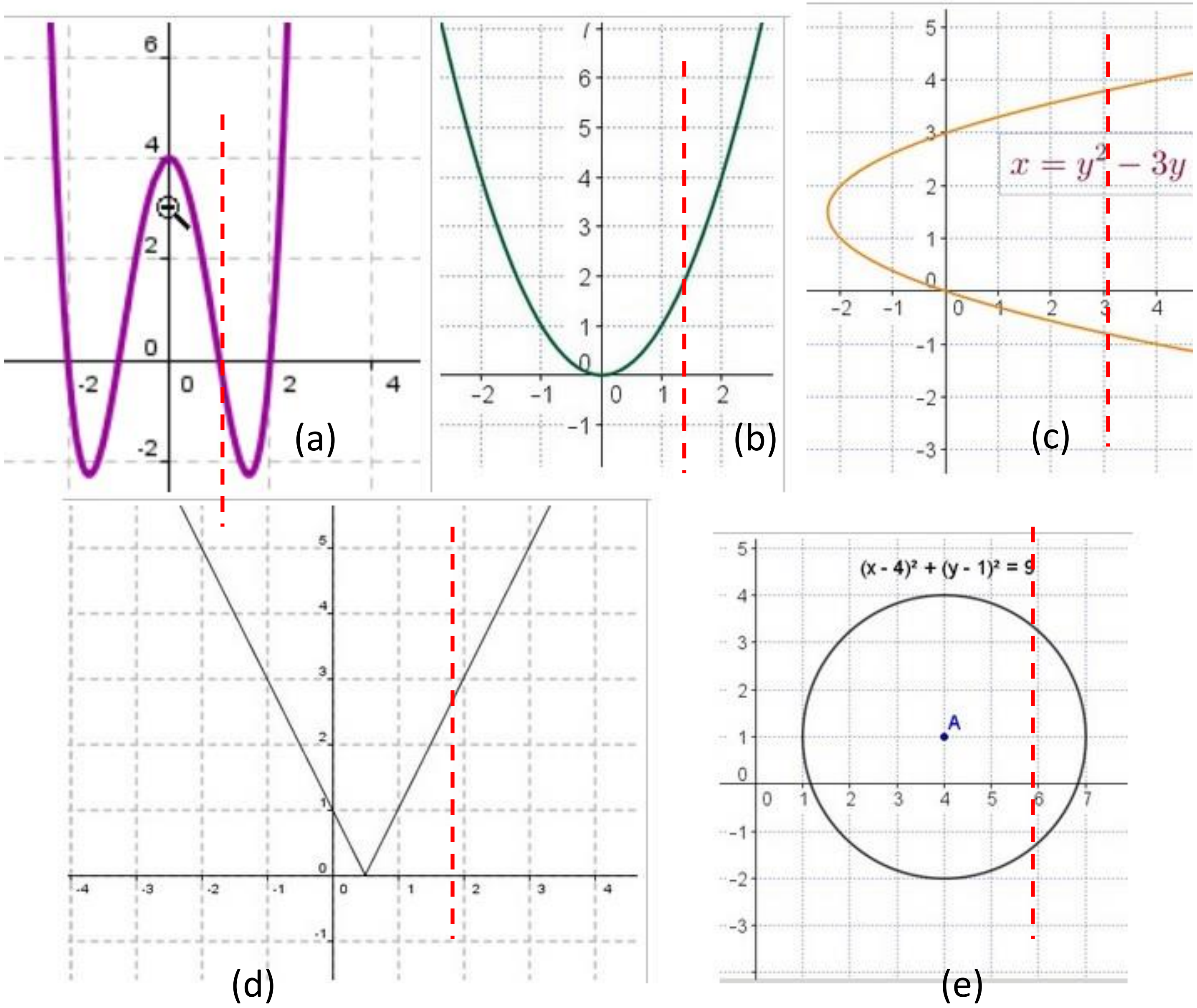
Contoh 41. Dari lima buah grafik di bawah ini, mana yang merupakan fungsi?



<u>Jawaban</u>: Defenisi fungsi menyatakan bahwa setiap nilai x $\in$ A dipetakan hanya tepat ke satu buah nilai y $\in$ B. Jadi x tidak boleh memiliki dua buah nilai y berbeda.

Tariklah garis vertikal (diperlihatkan dnegan garis putus-putus berwarna merah) melalui kurva fungsi *f*, jika garis berpotongan pada dua buah titik maka *f* **bukan** fungsi.

Berdasarkan cara di atas, maka (c) dan (e) **bukan** fungsi karena garis vertikal berpotongan pada dua buah titik pada kurva.



Balikan Fungsi

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.

- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya.

- Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 42. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$

Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh 43. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x – 1$.

<u>Penyelesaian</u>:
Fungsi $f(x) = x – 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x – 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y +1$.

Contoh 44. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 35 dan 37 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 45. Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

Contoh 46. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

Latihan (Kuis 2021). Tentukan (a) sifat dari fungsi f(x) $f(x) = |x^2 + x + 1|$, f: **R** → **R** apakah injektif, surjektif, bijektif, atau bukan ketiganya, (b) tentukan balikan dari fungsi tersebut jika ada, dan (c) hasil komposisi fungsi $(f \circ g)(x)$ dengan $g(x)= x - 2$ dalam bentuk paling sederhana.

Jawaban:

$f(x) = |x^2 + x + 1|$, f: **R** → **R**

(a) Bukan ketiganya,

- R tidak injektif, karena terdapat dua nilai x berbeda memiliki bayangan yang sama (ingatlah f(x) adalah fungsi parabola).
- R tidak surjektif, karena tidak semua bilangan real merupakan jelajah dari f(x), contoh tidak ada f(x) yang menghasilkan nilai -1.
- R tidak bijektif, karena tidak injektif dan tidak surjektif.

(b) Tidak ada balikan karena fungsi tidak bijektif.

(c) $(f \circ g)(x) = |(x-2)^2 + (x-2) + 1| = |x^2 -3x + 3|$

Latihan (Soal UTS 2022) Diberikan tiga buah fungsi f, g, dan h yang masing-masing memetakan dari A ke A, dalam hal ini $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Fungsi $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$, $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$, dan $h = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)$, dan $(4, 3)\}$.

(a) Manakah dari ketiga fungsi tersebut memiliki balikan (invers)? Tentukan fungsi balikannya.

(b) Tentukan hasil $f \circ h \circ g$

<u>Jawaban:</u>

(a) Fungsi yang memiliki balikan hanyalah fungsi g karena berkoresponden satu-ke-satu (periksalah bahwa g satu-ke-satu dan pada). Fungsi f dan h tidak berkoreponden satu-ke-satu sehingga tidak dapat dibalikkan (periksalah bahwa f dan h bukan fungsi satu-ke-satu dan bukan fungsi pada). Balikan fungsi g adalah $g^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4)\}$.

(b) $(f \circ h \circ g)(a) = f(h(g(a)))$ dicari sebagai berikut:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1, \quad 2 \to 4 \to 3 \to 1, \quad 3 \to 1 \to 1 \to 2, \quad 4 \to 3 \to 1 \to 2$$

Maka, $f \circ h \circ g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$