

Bahan kuliah
IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 3 - Update 2023)

Oleh: Rinaldi Munir



Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

Partisi

- Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, \dots dari A sedemikian sehingga:
 - (i) $A_1 \cup A_2 \cup \dots = A$, dan
 - (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$
- **Contoh 26.** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A .

Himpunan-ganda (Multiset)

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan-ganda** (*multiset*).

Contoh: $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{\}$.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1\}$, multiplisitas 0 adalah 4.
- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas setiap elemennya adalah 0 atau 1.
- Kardinalitas suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan yang ekuivalen dengannya, dengan mengasumsikan semua elemen di dalam *multiset* berbeda. Contoh: $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, maka $|A| = 6$

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$,

$$P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

$$P \cap Q = \{ a, a, c \}$$

3. $P - Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:
- multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q , jika selisihnya positif
 - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
 $P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Latihan (soal UTS 2022)

Fakultas Teknik di Universitas Bangsaku sedang mendaftarkan kebutuhan prasarana hardware baru dari prodi-prodinya. Prodi Teknik Industri (TI) membutuhkan 100 personal computer (PC), 40 *router*, dan 5 *server*. Sedangkan prodi Teknik Mesin (MS) membutuhkan 10 PC, 7 *router*, dan 2 *mainframe*. Kebutuhan tersebut dinyatakan dalam bentuk *multiset* A (prodi TI) dan *multiset* B (prodi MS).

Tentukan *hardware* apa saja dan jumlahnya yang harus disediakan fakultas pada kondisi:

- Prodi TI dan prodi MS dapat saling berbagi prasarana.
- Prodi TI dan prodi MS tidak dapat berbagi prasarana.
- Pengadaan hanya bisa untuk kebutuhan prodi MS dan alat tsb tidak dibutuhkan prodi TI.

Nyatakan jawaban Anda dalam bentuk operasi himpunan dan hasil perhitungannya.

Petunjuk: *Multiset* dapat juga dituliskan dalam bentuk $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$, dengan m adalah multiplisitas dari setiap elemen a .

Jawaban:

Misalkan A adalah himpunan *multiset* kebutuhan *hardware* prodi TI, dan B adalah himpunan *multiset* kebutuhan *hardware* prodi MS.

Misalkan: p = banyak kebutuhan PC (unit); r = banyak kebutuhan *router* (unit); s = banyak kebutuhan *server* (unit); m = banyak kebutuhan *mainframe* (unit). Maka,

$$A = \{100p, 40r, 5s\}$$

$$B = \{10p, 7r, 2m\}$$

a) $A \cup B = \{100p, 40r, 5s\} \cup \{10p, 7r, 2m\} = \{100p, 40r, 5s, 2m\}$

Penyediaan oleh fakultas: 100 PC, 40 *router*, 5 *server*, 2 *mainframe*

b) $A + B = \{100p, 40r, 5s\} + \{10p, 7r, 2m\} = \{110p, 47r, 5s, 2m\}$

Penyediaan fakultas: 110 PC, 47 *router*, 5 *server*, 2 *mainframe*

c) $B \cap A' = B - A = \{10p, 7r, 2m\} - \{100p, 40r, 5s\} = \{2m\}$

Penyediaan oleh fakultas: 2 *mainframe*

Pembuktian Proposisi Perihal Himpunan

- Proposisi himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Proposisi dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

Contoh: Buktikan “ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ”

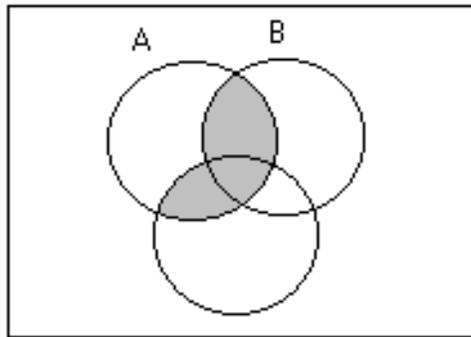
2. Implikasi

Contoh: Buktikan bahwa “Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$ ”.

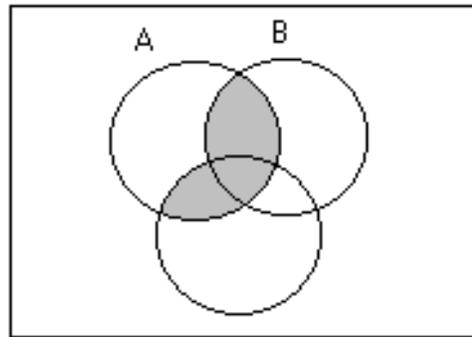
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Kedua diagram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.
- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta.
- Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktian dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

1 berarti “x adalah elemen dari himpunan ini”

0 berarti “x adalah bukan elemen dari himpunan ini”

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 28. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

Bukti:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) &= A \cap (B \cup \bar{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= A \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A && \text{(Hukum identitas)}\end{aligned}$$

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \bar{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B , bahwa

$$(i) A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B \quad \text{dan}$$

$$(ii) A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (i) \quad A \cup (\bar{A} \cap B) &= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) && \text{(H. distributif)} \\ &= U \cap (A \cup B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

(ii) adalah dual dari (i)

$$\begin{aligned} A \cap (\bar{A} \cup B) &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) && \text{(H. distributif)} \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cap B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

- **Latihan.** Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Gunakan hukum-hukum aljabar himpunan dan prinsip dualitas untuk menentukan hasil dari operasi himpunan berikut:

(a) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

(b) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$

Jawaban:

a. $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
 $= ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) \cup ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))$ [Hukum Asosiatif]
 $= (B \cap (A \cup \bar{A})) \cup (\bar{B} \cap (A \cup \bar{A}))$ [Hukum Distributif]
 $= (B \cap U) \cup (\bar{B} \cap U)$ [Hukum Komplemen]
 $= U \cap (B \cup \bar{B})$ [Hukum Distributif]
 $= U \cap U$ [Hukum Komplemen]
 $= U$ [Hukum Idempoten]

b. $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$
 $= \emptyset$ [Hukum Dualitas dari jawaban a]

- **Latihan.** Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan bahwa

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C).$$

(Jawaban pada halaman berikut)

Jawaban:

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) \quad (\text{Definisi Selisih}) \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \quad (\text{Hukum Distributif}) \\ &= A \cap \overline{B \cup C} \quad (\text{Hukum DeMorgan}) \\ &= A - (B \cup C) \quad (\text{Definisi Selisih})\end{aligned}$$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut?

(a) $A \oplus U$ (b) $A \oplus \bar{A}$ (c) $\bar{A} \oplus U$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A \oplus U &= (A - U) \cup (U - A) \\ &= (\emptyset) \cup (\bar{A}) \\ &= \bar{A} \end{aligned}$$

(Definisi operasi beda setangkup)

(Definisi operasi selisih)

(Hukum Identitas)

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad A \oplus \bar{A} &= (A - \bar{A}) \cup (\bar{A} - A) \\ &= (A \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{A}) \\ &= A \cup \bar{A} \\ &= U \end{aligned}$$

(Definisi operasi beda setangkup)

(Definisi operasi selisih)

(Hukum Idempoten)

(Hukum Komplemen)

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \bar{A} \oplus U &= (\bar{A} \cup U) - (\bar{A} \cap U) \\ &= U - \bar{A} \\ &= A \end{aligned}$$

(Definisi operasi beda setangkup)

(Hukum Null dan Hukum Identitas)

(Definisi operasi selisih)

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian (\subseteq atau \subset).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

- (i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.
- (ii) Dari definisi operasi gabungan (\cup), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$. Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Penggunaan Himpunan dalam Teori Bahasa Formal

- **Alfabet:** himpunan terbatas simbol-simbol

Contoh: alfabet latin , {a, b, c, ..., z}

alfabet Yunani, { α , β , γ , ..., ω }

alfabet biner, {0, 1}

- **String:** barisan yang disusun oleh simbol-simbol alfabet.

$$a_1a_2a_3\dots a_n, \quad a_j \in A \quad (A \text{ adalah alfabet})$$

Nama lain untuk string adalah **kalimat** atau ***word***

- Jika A adalah alfabet, maka A^n menyatakan himpunan semua string dengan panjang n yang dibentuk dari himpunan A .
- A^* adalah himpunan semua rangkaian simbol dari himpunan A yang terdiri dari 0 simbol (string kosong), satu simbol, dua simbol, dst.

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$$

Contoh: Misalkan $A = \{0, 1\}$, maka

$$A^0 = \{\varepsilon\}$$

$$A^1 = \{0, 1\}$$

$$A^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$A^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

...

- **Bahasa** (pada alfabet A) adalah himpunan bagian dari A^* .

Contoh: Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka berikut ini adalah contoh-contoh bahasa pada alfabet A :

$$L_1 = \{a, aaa, bc, ac, abc, cab\}$$

$$L_2 = \{aba, aabaa\}$$

$$L_3 = \{\varepsilon\}$$

$$L_4 = \{a^i c b^i \mid i \geq 1\}$$

Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

Bahasa Pascal menyediakan tipe data khusus untuk himpunan, yang bernama *set*. Tipe *set* menyatakan himpunan kuasa dari tipe ordinal (*integer, character*).

Contoh:

type

```
HurufBesar = 'A' .. 'Z' ; { enumerasi }
```

```
Huruf = set of HurufBesar;
```

var

```
HurufKu : Huruf;
```

Nilai untuk peubah HurufKu dapat diisi dengan pernyataan berikut:

```
HurufKu := [ 'A' , 'C' , 'D' ] ;
```

```
HurufKu := [ 'M' ] ;
```

```
HurufKu := [ ] ;      { himpunan kosong }
```

- Operasi yang dapat dilakukan pada tipe himpunan adalah operasi gabungan, irisan, dan selisih seperti pada contoh berikut:

```
{gabungan}  
HurufKu := [ 'A', 'C', 'D' ] + [ 'C', 'D', 'E' ] ;
```

```
{irisan}  
HurufKu := [ 'A', 'C', 'D' ] * [ 'C', 'D', 'E' ] ;
```

```
{selisih}  
HurufKu := [ 'A', 'C', 'D' ] - [ 'C', 'D', 'E' ] ;
```

- Uji keanggotaan sebuah elemen di dalam himpunan dilakukan dengan menggunakan operator *in* seperti contoh berikut:

```
if 'A' in HurufKu then ...
```

Tipe *Set* dalam Bahasa Python

- Bahasa Python menyediakan struktur data untuk *set* beserta operasi-operasinya.
- Membuat himpunan kosong dengan *set constructor*:

```
myset = set()  
myset2 = set([]) # both are empty sets
```

- Membuat sebuah himpunan dengan *set constructor* atau notasi { }

```
myset = set(sequence)
myset2 = {ekspresi for variabel in sequence}
myset3 = {daftar elemen}
```

```
>>> myset = set('matematika')           # cara pertama
>>> myset                                # Menampilkan himpunan
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
```

```
>>> myset = {x for x in 'matematika'} # cara kedua
>>> myset                                # Menampilkan himpunan
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
```

```
>>> myset2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
>>> myset2
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

```
>>> myset.add('z')      # Menambahkan elemen baru 'z'
>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't', 'z'}

>>> myset.remove('t')  # Menghapus elemen 't'
>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 'z'}

>>> myset.pop()        # Mengambil elemen teratas
'z'

>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm'}
```

- Operator \geq dan \leq adalah untuk menguji apakah sebuah himpunan merupakan *superset* atau *subset* terhadap himpunan yang lain
- Operator $>$ dan $<$ adalah operator untuk menguji *proper superset* atau *proper subset*.

```
>>> S1 = set('matematika')
>>> S2 = set('matika')
>>> S1 >= S2
True
>>> S1 <= S2
False
>>> S2 <= S1
True
>>> S2 < S1
True
```

Operasi Himpunan

- Gabungan: $set \cup other \cup \dots$
- Irisan: $set \cap other \cap \dots$
- Selisih: $set - other - \dots$
- Beda setangkup: $set \Delta other$

```
>>> S1 = set('matematika')
>>> S1
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
>>> S2 = set('diskrit')
>>> S2
{'d', 'i', 'k', 'r', 's', 't'}
>>> S1 | S2
{'a', 'd', 'e', 'i', 'k', 'm', 'r', 's', 't'}
>>> S1 & S2
{'i', 'k', 't'}
>>> S1 - S2
{'a', 'e', 'm'}
>>> S2 - S1
{'d', 'r', 's'}
>>> S1 ^ S2
{'a', 'd', 'e', 'm', 'r', 's'}
```

Latihan Soal-Soal Himpunan dari berbagai kuis 1

1. **(Kuis 2013)** Misalkan A dan B adalah sebuah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan, jangan lupa menyebutkan hukum yang dipakai.

$$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)} = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$$

Jawaban:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} &= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{\bar{B}}) && \text{(Hukum De Morgan)} \\ &= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) && \text{(Hukum Involusi)} \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) && \text{(Hukum Komutatif x2)} \\ &= B \cap (A \cup \bar{A}) && \text{(Hukum Distributif)} \\ &= B \cap U && \text{(Hukum Komplemen)} \\ &= B && \text{(Hukum Identitas)}\end{aligned}$$

2. **(Kuis 2014)** Hitunglah banyak bilangan genap diantara 1 sampai 2000 yang habis dibagi 7 tetapi tidak habis dibagi 9.

- **Jawaban:** Banyak bilangan tersebut adalah banyak bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 dikurangi banyak bilangan yang habis dibagi 2,7, dan 9.

$$\text{Banyak bilangan habis dibagi 2 dan 7} = \left\lfloor \frac{2000}{14} \right\rfloor = 142$$

$$\text{Banyak bilangan habis dibagi 2,7, dan 9 ada} \left\lfloor \frac{2000}{126} \right\rfloor = 15$$

Jadi, banyak bilangan tersebut adalah $142 - 15 = 127$.

3. **(Kuis 2022)** Ketua himpunan HMIF berencana membuat acara pertandingan olahraga untuk merayakan pelantikan anggota baru. Dari data yang didapat, jumlah peserta yang mengikuti pertandingan basket adalah $\frac{7}{2}$ kali jumlah peserta yang menyukai futsal dan basket. Jumlah peserta yang mengikuti pertandingan futsal adalah $\frac{5}{2}$ kali jumlah peserta yang menyukai futsal dan basket. Jika jumlah peserta ada sebanyak 300 orang dan peserta yang mengikuti lomba sudah pasti menyukai olahraga tersebut, maka berapa banyak peserta yang mengikuti pertandingan futsal tetapi tidak menyukai basket?

Jawaban:

F = Himpunan mahasiswa suka futsal

B = Himpunan mahasiswa suka basket

$F \cap B$ = Himpunan mahasiswa yang suka Futsal dan Basket

Ditanya: $n(F - (F \cap B)) = ?$

$$n(B) = 7/2 n(F \cap B)$$

$$n(F) = 5/2 n(F \cap B)$$

$$n(F \cup B) = 300$$

$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B)$$

$$300 = 5/2 n(F \cap B) + 7/2 n(F \cap B) - n(F \cap B)$$

$$300 = 5 n(F \cap B)$$

$$n(F \cap B) = 60$$

$$n(F) = 5/2 * 60 = 150$$

$$n(F - (F \cap B)) = 150 - 60 = 90 \text{ peserta}$$

4. **(Kuis 2011)** Hitung berapa bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9?

Jawaban: Misalkan :

A = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4,

B = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 7,

C = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 9

Dengan menggunakan prinsip inklusi eksklusif, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9 yaitu :

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{63} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{252} \right\rfloor \\ &= 50 + 28 + 22 - 7 - 5 - 3 + 0 = 85 \end{aligned}$$

5. **(Kuis 2021)** Dengan A, B, dan C berupa himpunan, buktikan bahwa

$$((A \oplus B - C) \cap A^c) = B - A - C$$

dengan menyertakan hukum-hukum himpunan yang digunakan! (Keterangan tanda “c” menyatakan operasi komplemen)

Jawaban:

$$((A \oplus B - C) \cap A^c) = (((A-B) \cup (B-A)) - C) \cap A^c$$

(Definisi operasi \oplus)

$$= (((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c) \cap A^c$$

(Definisi operasi -) 3x

$$= (((A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c))) \cap A^c$$

(Hukum Distributif)

$$= (((A \cap B^c \cap C^c \cap A^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c \cap A^c)))$$

(Hukum Distributif)

$$= (((A \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c \cap A^c)))$$

Hukum Komutatif

$$= (((\emptyset \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c)))$$

(Hukum Komplemen dan Idempoten)

$$= (\emptyset \cup (B \cap C^c \cap A^c))$$

(Hukum Dominansi)

$$= (B \cap C^c \cap A^c)$$

(Hukum Identitas)

$$= (B \cap A^c \cap C^c)$$

(Hukum Komutatif)

$$= B - A - C$$

(Definisi Operasi -) 2x

Terbukti

6. **(Kuis 2021)** Misalkan A dan B adalah sebuah himpunan, buktikanlah kesamaan berikut:

$$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

Jawaban:

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B) && \text{(definisi selisih)} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A^c) \cup A) \cap ((B \cap A^c) \cup B) && \text{(hukum distributif)} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A^c) \cup A) \cap B && \text{(hukum absorpsi)} \\ &= (A \cap B^c) \cup (((B \cap A) \cup (A^c \cap A)) \cap B) && \text{(hukum distributif)} \\ &= (A \cap B^c) \cup (((B \cap A) \cup \emptyset) \cap B) && \text{(hukum komplemen)} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A) \cap B) && \text{(hukum identitas)} \\ &= (A \cap B^c) \cup (B) && \text{(hukum absorpsi)} \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) && \text{(hukum distributif)} \\ &= (A \cup B) \cap U = A \cup B && \text{(hukum komplemen \& identitas)}\end{aligned}$$

Terbukti

(Keterangan tanda "c" menyatakan operasi komplemen)

5. **(UTS 2010)** Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
6. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 200 (termasuk 1 dan 200) yang habis dibagi 3, 5 atau 7 (3 atau 5 atau 7)?

Silakan cari jawabannya gaess...!

Tamat