

UTS IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Nur Ulfa Maulidevi, Fariska Zakhralatifa Ruskanda, Rinaldi Munir
Jumat, 14 Oktober 2022
Waktu: 100 menit

1. Tunjukkan apa yang SALAH dalam pembuktian dengan induksi matematik berikut ini? **(Nilai 10)**

Teorema. Untuk setiap integer positif n , jika a dan b adalah integer positif dengan $\text{MAX}(a, b) = n$, maka $a = b$.

Basis: Misalkan bahwa $n = 1$. Jika $\text{MAX}(a, b) = 1$ dan a dan b integer positif, maka diperoleh $a = 1$ dan $b = 1$.

Langkah induksi: Misalkan n adalah *integer* positif. Asumsikan bahwa bilamana $\text{MAX}(a, b) = n$ dan a dan b adalah integer positif, maka $a = b$ (hipotesis induksi). Sekarang misalkan $\text{MAX}(a, b) = n + 1$, yang dalam hal ini a dan b adalah *integer* positif. Maka $\text{MAX}(a - 1, b - 1) = n$, sehingga dari hipotesis induksi, $a - 1 = b - 1$. Dari sini diperoleh $a = b$.

Karena langkah dan basis dan langkah induksi sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa Teorema di atas benar.

2. Terdapat sebuah relasi R pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, yang direpresentasikan dengan matriks sebagai berikut. **(Nilai 20)**

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Jelaskan apakah relasi R tersebut relasi pengurutan parsial atau tidak, dengan melihat semua sifat relasi pengurutan parsial.
- Buatlah klosur relasi dari relasi R, sehingga bersifat relasi kesetaraan.
- Jika pada himpunan A tersebut dibuat relasi biner ke himpunan $B = \{1, 8, 27, 64\}$ berupa relasi $S = \{(1,1), (2,8), (3,27), (4,64)\}$; tentukan apakah relasi tersebut merupakan fungsi berkoresponden satu-ke-satu atau bukan. Jelaskan jawaban anda.

3. Diberikan tiga buah fungsi f , g , dan h yang masing-masing memetakan dari A ke A , dalam hal ini $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Fungsi $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$, $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$, dan $h = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), \text{ dan } (4, 3)\}$. **(Nilai 15)**

- (a) Manakah dari ketiga fungsi tersebut memiliki balikan (invers)? Tentukan fungsi balikannya.
- (b) Tentukan hasil $f \circ h \circ g$

4. Pengguna e-commerce di Indonesia tiap tahun bertambah cukup pesat. Prediksi pengguna e-commerce pada suatu tahun diperkirakan sejumlah banyaknya pengguna tahun sebelumnya ditambah dengan pengguna dua tahun sebelumnya dan kenaikan 100% dari pengguna dua tahun sebelumnya.

(Nilai 15)

- a. Jika prediksi pengguna e-commerce diselesaikan dengan relasi rekurens, tentukan representasi relasi rekurensnya.
- b. Selesaikan relasi rekurens tersebut, jika diketahui tahun ke-0 pengguna e-commerce adalah 4 juta, dan pada tahun ke-1 pengguna berjumlah 5 juta.
- c. Tentukan prediksi banyaknya pengguna e-commerce pada tahun ke 5 berdasarkan jawaban anda pada butir (b).

5. Misalkan A dan B adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa:

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)$$

Tuliskan lengkap dengan nama hukum yang digunakan.

(Nilai 15)

6. Fakultas Teknik di Universitas Bangsaku sedang mendaftarkan kebutuhan prasarana hardware baru dari prodi-prodinya. Prodi Teknik Industri (TI) membutuhkan 100 personal computer (PC), 40 router, dan 5 server. Sedangkan prodi Teknik Mesin (MS) membutuhkan 10 PC, 7 router, dan 2 mainframe. Kebutuhan tersebut dinyatakan dalam bentuk multiset A (prodi TI) dan multiset B (prodi MS). Tentukan hardware apa saja dan jumlahnya yang harus disediakan fakultas pada kondisi: **(Nilai 10)**

- a. Prodi TI dan prodi MS dapat saling berbagi prasarana.
- b. Prodi TI dan prodi MS tidak dapat berbagi prasarana.
- c. Pengadaan hanya bisa untuk kebutuhan prodi MS dan alat tsb tidak dibutuhkan prodi TI.

Nyatakan jawaban Anda dalam bentuk operasi himpunan dan hasil perhitungannya.

Petunjuk: Multiset dapat juga dituliskan dalam bentuk $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$, dengan m adalah multiplisitas dari setiap elemen a .

7. Diberikan dua buah fungsi Boolean f dan g . Maka, fungsi $h = f + g$ diperoleh dengan meng-OR-kan dua buah fungsi f dan g . **(Nilai 15)**

$$f = wxy' + y'z + w'yz' + x'yz'$$

$$g = (w + x + y' + z')(x' + y' + z)(w' + y + z')$$

Dengan menggunakan peta Karnaugh, temukan bentuk yang paling sederhana dari $h = f + g$. Gambarkan juga rangkaian logika hasil akhirnya.