

UTS IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS)  
Dosen: Nur Ulfa Maulidevi, Fariska Zakhralatifa Ruskanda, Rinaldi Munir  
Jumat, 14 Oktober 2022  
Waktu: 100 menit

1. Tunjukkan apa yang SALAH dalam pembuktian dengan induksi matematik berikut ini? **(Nilai 10)**

**Teorema.** Untuk setiap integer positif  $n$ , jika  $a$  dan  $b$  adalah integer positif dengan  $\text{MAX}(a, b) = n$ , maka  $a = b$ .

*Basis:* Misalkan bahwa  $n = 1$ . Jika  $\text{MAX}(a, b) = 1$  dan  $a$  dan  $b$  integer positif, maka diperoleh  $a = 1$  dan  $b = 1$ .

*Langkah induksi:* Misalkan  $n$  adalah *integer* positif. Asumsikan bahwa bilamana  $\text{MAX}(a, b) = n$  dan  $a$  dan  $b$  adalah integer positif, maka  $a = b$  (hipotesis induksi). Sekarang misalkan  $\text{MAX}(a, b) = n + 1$ , yang dalam hal ini  $a$  dan  $b$  adalah *integer* positif. Maka  $\text{MAX}(a - 1, b - 1) = n$ , sehingga dari hipotesis induksi,  $a - 1 = b - 1$ . Dari sini diperoleh  $a = b$ .

Karena langkah dan basis dan langkah induksi sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa Teorema di atas benar.

2. Terdapat sebuah relasi R pada himpunan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , yang direpresentasikan dengan matriks sebagai berikut. **(Nilai 20)**

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 1 \quad \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

- Jelaskan apakah relasi R tersebut relasi pengurutan parsial atau tidak, dengan melihat semua sifat relasi pengurutan parsial.
- Buatlah klosur relasi dari relasi R, sehingga bersifat relasi kesetaraan.
- Jika pada himpunan A tersebut dibuat relasi biner ke himpunan  $B = \{1, 8, 27, 64\}$  berupa relasi  $S = \{(1,1), (2,8), (3,27), (4,64)\}$ ; tentukan apakah relasi tersebut merupakan fungsi berkoresponden satu-ke-satu atau bukan. Jelaskan jawaban anda.

3. Diberikan tiga buah fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  yang masing-masing memetakan dari  $A$  ke  $A$ , dalam hal ini  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Fungsi  $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$ ,  $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ , dan  $h = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), \text{ dan } (4, 3)\}$ . **(Nilai 15)**

- (a) Manakah dari ketiga fungsi tersebut memiliki balikan (invers)? Tentukan fungsi balikannya.  
(b) Tentukan hasil  $f \circ h \circ g$

4. Pengguna e-commerce di Indonesia tiap tahun bertambah cukup pesat. Prediksi pengguna e-commerce pada suatu tahun diperkirakan sejumlah banyaknya pengguna tahun sebelumnya ditambah dengan pengguna dua tahun sebelumnya dan kenaikan 100% dari pengguna dua tahun sebelumnya.

**(Nilai 15)**

- a. Jika prediksi pengguna e-commerce diselesaikan dengan relasi rekurens, tentukan representasi relasi rekurensnya.  
b. Selesaikan relasi rekurens tersebut, jika diketahui tahun ke-0 pengguna e-commerce adalah 4 juta, dan pada tahun ke-1 pengguna berjumlah 5 juta.  
c. Tentukan prediksi banyaknya pengguna e-commerce pada tahun ke 5 berdasarkan jawaban anda pada butir (b).

5. Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa:

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)$$

Tuliskan lengkap dengan nama hukum yang digunakan.

**(Nilai 15)**

6. Fakultas Teknik di Universitas Bangsaku sedang mendaftarkan kebutuhan prasarana hardware baru dari prodi-prodinya. Prodi Teknik Industri (TI) membutuhkan 100 personal computer (PC), 40 router, dan 5 server. Sedangkan prodi Teknik Mesin (MS) membutuhkan 10 PC, 7 router, dan 2 mainframe. Kebutuhan tersebut dinyatakan dalam bentuk multiset  $A$  (prodi TI) dan multiset  $B$  (prodi MS). Tentukan hardware apa saja dan jumlahnya yang harus disediakan fakultas pada kondisi: **(Nilai 10)**

- a. Prodi TI dan prodi MS dapat saling berbagi prasarana.  
b. Prodi TI dan prodi MS tidak dapat berbagi prasarana.  
c. Pengadaan hanya bisa untuk kebutuhan prodi MS dan alat tsb tidak dibutuhkan prodi TI.

Nyatakan jawaban Anda dalam bentuk operasi himpunan dan hasil perhitungannya.

Petunjuk: Multiset dapat juga dituliskan dalam bentuk  $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$ , dengan  $m$  adalah multiplisitas dari setiap elemen  $a$ .

7. Diberikan dua buah fungsi Boolean  $f$  dan  $g$ . Maka, fungsi  $h = f + g$  diperoleh dengan meng-OR-kan dua buah fungsi  $f$  dan  $g$ . **(Nilai 15)**

$$f = wxy' + y'z + w'yz' + x'yz'$$

$$g = (w + x + y' + z')(x' + y' + z)(w' + y + z')$$

Dengan menggunakan peta Karnaugh, temukan bentuk yang paling sederhana dari  $h = f + g$ . Gambarkan juga rangkaian logika hasil akhirnya.