

Solusi UTS IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS)
Dosen: Nur Ulfa Maulidevi, Fariska Zakhralatifa Ruskanda, Rinaldi Munir
Jumat, 14 Oktober 2022
Waktu: 100 menit

1. Tunjukkan apa yang SALAH dalam pembuktian dengan induksi matematik berikut ini? (Nilai 10)

Teorema. Untuk setiap integer positif n , jika a dan b adalah integer positif dengan $\text{MAX}(a, b) = n$, maka $a = b$.

Basis: Misalkan bahwa $n = 1$. Jika $\text{MAX}(a, b) = 1$ dan a dan b integer positif, maka diperoleh $a = 1$ dan $b = 1$.

Langkah induksi: Misalkan n adalah integer positif. Asumsikan bahwa bilamana $\text{MAX}(a, b) = n$ dan a dan b adalah integer positif, maka $a = b$ (hipotesis induksi). Sekarang misalkan $\text{MAX}(a, b) = n + 1$, yang dalam hal ini a dan b adalah integer positif. Maka $\text{MAX}(a - 1, b - 1) = n$, sehingga dari hipotesis induksi, $a - 1 = b - 1$. Dari sini diperoleh $a = b$.

Karena langkah dan basis dan langkah induksi sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa Teorema di atas benar.

Jawaban:

Ada kesalahan pada induksi matematika di atas. Di dalam bagian basis disebutkan, untuk $n = 1$, jika a dan b integer positif dengan $\text{MAX}(a,b) = 1$, maka $a = b = 1$. Langkah induksi akan salah ketika $n + 1 = 2$, sebab $\text{MAX}(a - 1, b - 1) = \text{MAX}(1 - 1, 1 - 1) = \text{MAX}(0, 0) = 0$, padahal 0 bukan integer positif.

2. Terdapat sebuah relasi R pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, yang direpresentasikan dengan matriks sebagai berikut. (Nilai 20)

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Jelaskan apakah relasi R tersebut relasi pengurutan parsial atau tidak, dengan melihat semua sifat relasi pengurutan parsial.
- Buatlah klosur relasi dari relasi R, sehingga bersifat relasi kesetaraan.
- Jika pada himpunan A tersebut dibuat relasi biner ke himpunan $B = \{1, 8, 27, 64\}$ berupa relasi $S = \{(1,1), (2,8), (3,27), (4,64)\}$; tentukan apakah relasi tersebut merupakan fungsi berkoresponden satu-ke-satu atau bukan. Jelaskan jawaban anda.

Jawaban:

a. Relasi bersifat pengurutan parsial jika relasi tersebut refleksif, menghantar, dan tolak setangkep.

Relasi R tidak refleksif karena $(1,1)$ dan $(4,4)$ tidak menjadi elemennya.

Relasi R tidak menghantar karena terdapat $(2,1)$ dan $(1,4)$ tetapi tidak ada elemen $(2,4)$. Boleh contoh elemen yang lain asal sesuai matriks.

Relasi R tidak tolak setangkup karena terdapat (1,3) dan (3,1) tapi $1 \neq 3$

b. Agar bersifat relasi kesetaraan, maka relasi harus memiliki sifat refleksif, menghantar, dan setangkup. Agar bersifat refleksif, buat klosur refleksif.

Klosur refleksif: $T = R \cup \Delta = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$

Relasi T belum setangkup, karena ada (2,1) tapi tidak ada (1,2), ada (2,3) tapi tidak ada (3,2), jadi harus dibuat klosur setangkup

Agar bersifat setangkup, buat klosur setangkup dari hasil klosur refleksif.

$$\begin{aligned} V = T \cup T^{-1} &= \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\} \cup \\ &\quad \{(1,1),(3,1),(4,1),(1,2),(2,2),(3,2),(1,3),(3,3),(1,4),(3,4),(4,4)\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\} \end{aligned}$$

Relasi V belum menghantar, karena terdapat (4,1) dan (1,2), tetapi tidak ada (4,2). Oleh karena itu perlu dibuat klosur menghantar. Pertama kita representasikan dulu relasi V ke dalam bentuk matriks.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Kemudian kita cari bentuk V^2, V^3, V^4 .

$$\begin{matrix} V^2 = & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V^3 = & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V^4 = & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Maka klosur menghantar yang membuat relasi bersifat kesetaraan:

$$\begin{aligned} V^* &= V \cup V^2 \cup V^3 \cup V^4 \\ = & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cup & 1 & 1 & 1 & 1 & & \cup & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ V & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Jadi relasi bersifat kesetaraan = semua terhubung ke semua.

c. relasi $S = \{(1,1), (2,8), (3,27), (4,64)\}$

Relasi S merupakan fungsi, karena setiap elemen di A dihubungkan dengan tepat 1 elemen di B .

Relasi S bersifat injektif karena setiap elemen pada A tidak memiliki bayangan yang sama.

Relasi S bersifat pada atau surjektif karena setiap elemen B merupakan bayangan dari elemen di A .

Jadi relasi S merupakan fungsi yang bersifat koresponden satu-satu karena bersifat injektif dan surjektif.

3. Diberikan tiga buah fungsi f , g , dan h yang masing-masing memetakan dari A ke A , dalam hal ini $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Fungsi $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$, $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$, dan $h = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), \text{ dan } (4, 3)\}$. **(Nilai 15)**

- (a) Manakah dari ketiga fungsi tersebut memiliki balikan (invers)? Tentukan fungsi balikannya.
- (b) Tentukan hasil $f \circ h \circ g$

Jawaban:

(a) Fungsi yang memiliki balikan hanyalah fungsi g karena berkoresponden satu-ke-satu (periksalah bahwa g satu-ke-satu dan pada). Fungsi f dan h tidak berkoreponden satu-ke-satu sehingga tidak dapat dibalikkan (periksalah bahwa f dan h bukan fungsi satu-ke-satu dan bukan fungsi pada). Balikan fungsi g adalah $g^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4)\}$.

(b) $(f \circ h \circ g)(a) = f(h(g(a)))$ dicari sebagai berikut:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \quad 3 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

$$\text{Maka, } f \circ h \circ g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$$

4. Pengguna e-commerce di Indonesia tiap tahun bertambah cukup pesat. Prediksi pengguna e-commerce pada suatu tahun diperkirakan sejumlah banyaknya pengguna tahun sebelumnya ditambah dengan pengguna dua tahun sebelumnya dan kenaikan 100% dari pengguna dua tahun sebelumnya. **(Nilai 15)**

- a. Jika prediksi pengguna e-commerce diselesaikan dengan relasi rekurens, tentukan representasi relasi rekurensnya.
- b. Selesaikan relasi rekurens tersebut, jika diketahui tahun ke-0 pengguna e-commerce adalah 4 juta, dan pada tahun ke-1 pengguna berjumlah 5 juta.
- c. Tentukan prediksi banyaknya pengguna e-commerce pada tahun ke 5 berdasarkan jawaban anda pada butir (b).

Jawaban:

a. $a_n = a_{n-1} + 2 a_{n-2}$

b. Penyelesaian relasi rekurens:

Relasi rekurens adalah homogen linjar derajat 2, jadi menggunakan persamaan karakteristik.

$$a_n = a_{n-1} + 2 a_{n-2} \text{ maka } c_1 = 1, c_2 = 2$$

$$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r - 2).(r + 1) = 0 \Rightarrow \text{akar-akar persamaan: } r_1 = 2; r_2 = -1$$

Mencari nilai α_1 dan α_2

$$\text{Untuk } n=0 \Rightarrow 4 = \alpha_1.1 + \alpha_2.1 \Rightarrow \alpha_1 = 4 - \alpha_2$$

$$\text{Untuk } n=1 \Rightarrow 5 = \alpha_1.2 + \alpha_2.(-1) \Rightarrow \alpha_2 = (4 - \alpha_2).2 - 5 \Rightarrow 3\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 3.$$

Jadi solusi relasi rekurensnya adalah: $a_n = 3.2^n + (-1)^n$

c. Untuk $n = 5$, maka prediksi pengguna e-commerce:

$$a_5 = 3.2^5 + (-1)^5 \Rightarrow a_5 = 3.32 + (-1) \Rightarrow a_5 = 95$$

Jadi prediksi pengguna e-commerce = 95 jt.

5. Misalkan A dan B adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa:

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)$$

Tuliskan lengkap dengan nama hukum yang digunakan.

(Nilai 15)

Jawaban:

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (U \cap B) && \text{Hukum Identitas} \\ &= A \cup ((A \cup A') \cap B) && \text{Hukum Komplemen} \\ &= A \cup ((A \cap B) \cup (A' \cap B)) && \text{Hukum Distributif} \\ &= (U \cap A) \cup ((A \cap B) \cup (A' \cap B)) && \text{Hukum Identitas} \\ &= ((B \cup B') \cap A) \cup ((A \cap B) \cup (A' \cap B)) && \text{Hukum Komplemen} \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap B')) \cup ((A \cap B) \cup (A' \cap B)) && \text{Hukum Distributif} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) && \text{Hukum Idempoten} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $A \cup B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)$.

6. Fakultas Teknik di Universitas Bangsaku sedang mendaftarkan kebutuhan prasarana hardware baru dari prodi-prodinya. Prodi Teknik Industri (TI) membutuhkan 100 personal computer (PC), 40 router, dan 5 server. Sedangkan prodi Teknik Mesin (MS) membutuhkan 10 PC, 7 router, dan 2 mainframe. Kebutuhan tersebut dinyatakan dalam bentuk multiset A (prodi TI) dan multiset B (prodi MS). Tentukan hardware apa saja dan jumlahnya yang harus disediakan fakultas pada kondisi: (Nilai 10)

- Prodi TI dan prodi MS dapat saling berbagi prasarana.
- Prodi TI dan prodi MS tidak dapat berbagi prasarana.
- Pengadaan hanya bisa untuk kebutuhan prodi MS dan alat tsb tidak dibutuhkan prodi TI.

Nyatakan jawaban Anda dalam bentuk operasi himpunan dan hasil perhitungannya.

Petunjuk: Multiset dapat juga dituliskan dalam bentuk $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$, dengan m adalah multiplisitas dari setiap elemen a .

Jawaban:

Diketahui: A adalah himpunan multi set kebutuhan hardware prodi TI, dan B adalah himpunan multi set kebutuhan hardware prodi MS.

Misalkan: p = banyak kebutuhan PC (unit); r = banyak kebutuhan router (unit); s = banyak kebutuhan server (unit); m = banyak kebutuhan mainframe (unit). Maka,

$$A = \{100p, 40r, 5s\}$$

$$B = \{10p, 7r, 2m\}$$

- $A \cup B = \{100p, 40r, 5s\} \cup \{10p, 7r, 2m\} = \{100p, 40r, 5s, 2m\}$
Penyediaan fakultas: 100 PC, 40 router, 5 server, 2 mainframe
- $A + B = \{100p, 40r, 5s\} + \{10p, 7r, 2m\} = \{110p, 47r, 5s, 2m\}$
Penyediaan fakultas: 110 PC, 47 router, 5 server, 2 mainframe
- $B \cap A' = B - A = \{10p, 7r, 2m\} - \{100p, 40r, 5s\} = \{2m\}$
Penyediaan fakultas: 2 mainframe

7. Diberikan dua buah fungsi Boolean f dan g . Maka, fungsi $h = f + g$ diperoleh dengan meng-OR-kan dua f dan g .

(Nilai 15)

$$f = wxy' + y'z + w'yz' + x'yz'$$

$$g = (w + x + y' + z')(x' + y' + z)(w' + y + z')$$

Dengan menggunakan peta Karnaugh, temukan bentuk yang paling sederhana dari $h = f + g$. Gambarkan juga rangkaian logika hasil akhirnya.

Jawaban:

Tabel Kebenaran

w	x	y	z	Sigma	f	g	h = (f OR g)
---	---	---	---	-------	---	---	--------------

1	1	1	1	15	0	1	1
1	1	1	0	14	0	0	0
1	1	0	1	13	1	0	1
1	1	0	0	12	1	1	1
1	0	1	1	11	0	1	1
1	0	1	0	10	1	1	1
1	0	0	1	9	1	0	1
1	0	0	0	8	0	1	1
0	1	1	1	7	0	1	1
0	1	1	0	6	1	0	1
0	1	0	1	5	1	1	1
0	1	0	0	4	0	1	1
0	0	1	1	3	0	0	0
0	0	1	0	2	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1

Peta Karnaugh:

	y'z'	y'z	yz	yz'
w'x'	1	1	0	1
w'x	1	1	1	1
wx	1	1	1	0
wx'	1	1	1	1

Hasil penyederhanaan:

$$h(w,x,y,z) = y' + w'x + wz + x'z'$$

Rangkaian Logika

