

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Teori Bilangan dan Kombinatorial
Dosen: Rinaldi Munir, Fariska Zakhralativa, Nur Ulfa Maulidevi
Kamis, 3 November 2022
Waktu: 50 menit

1. Banyaknya pasir di pantai diprediksi menjadi sebanyak $5 * 128^{130}$ butir. Namun, data tersebut dikalkulasikan berdasarkan 17 pantai saja. Data tersebut terhitung valid apabila banyaknya butir habis dibagi dengan banyak pantai. Tentukan apakah prediksi tersebut valid? Jika tidak, tentukanlah sisa pembagiannya!

Jawaban:

$$5 * 128^{130} \text{ mod } 17 = ?$$

Menurut teorema Fermat, $128^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

$$\begin{aligned} 5 * 128^{130} \text{ mod } 17 &= 5 * (128^{16})^8 * 128^2 \text{ mod } 17 \\ &= 5 * (1)^5 * 128^2 \text{ mod } 17 \\ &= 5 * (9)^2 \text{ mod } 17 \\ &= 5 * 81 \text{ mod } 17 \\ &= 405 \text{ mod } 17 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Maka data tersebut tidak valid, sisa pembagiannya adalah 14.

2. Luffy baru saja menemukan harta karun wan pis. Setelah ia memperoleh harta karun tersebut, ia diminta melaporkan nilai harta karun tersebut untuk dipajak. Karena nilainya yang sangat besar, ia lupa berapa nilai pastinya, namun ia ingat jika harta karun tersebut dibagikan kepada 5 orang kru maka akan bersisa 2. Jika ia membagikannya kepada 7 orang kru maka akan bersisa 4. Jika ia membaginya kepada 11 orang kru maka akan bersisa 5. Bantulah Luffy untuk memperkirakan nilai terkecil harta karun tersebut.

Jawaban:

① $x \equiv 2 \pmod{5}$
② $x \equiv 4 \pmod{7}$
③ $x \equiv 5 \pmod{11}$

1 2 2 $5k_1 + 2 = 7k_2 + 4$
 $5k_1 = 7k_2 + 2$
 $k_1 = \frac{7}{5}k_2 + \frac{2}{5}, k_2 = 0, 1, 2, 3, 4$
 $k_1 = \frac{7}{5} \cdot 4 + \frac{2}{5}$
 $k_1 = 6 \pmod{7}$
 $k_1 = 6 + 7k_2 \dots$ ④

4 2 1 $2 + 5k_1 \rightarrow 2 + 5(6 + 7k_2)$
 $= 32 + 35k_2 \dots$ ⑤

5 8 3 $32 + 35k_2 = 5 + 11k_3$
 $35k_2 = -26 + 11k_3$
 $95k_2 = 6 + 11k_3$
 $k_2 = \frac{6}{95} + \frac{11}{95}k_3, k_3 = 0, 1, 2, \dots$ ⑥
 $k_2 = 3 \pmod{11}$
 $k_2 = 3 + 11k_3 \dots$ ⑥

6 3 5 $32 + 35k_2 \rightarrow 32 + 35(3 + 11k_3)$
 $= 32 + 105 + 385k_3$
 $= 137 + 385k_3$

\therefore nilai terkecil adalah 137

3. Panitia SPARTA HMIF berencana untuk membuat sebuah rangkaian puzzle yang harus dipecahkan oleh calon anggota HMIF. Salah satu puzzle tersebut adalah diberikan adalah dekripsi sandi untuk masuk ke dalam *zoom meeting*. Sandi dienkripsi menggunakan teknik caesar *cypher* dengan mengganti karakter sandi ke-12 berikutnya. Karakter pada sandi dapat berisi angka (0–9) atau huruf kapital (A–Z). Angka dikodekan sesuai dengan nilai angka tersebut sedangkan huruf dikodekan sesuai urutan huruf pada alfabet ditambah 10 ($A = 0+10, B=1+10, \dots Z=25+10$). Dari deskripsi diatas jawablah pertanyaan dibawah ini,
- Nyatakan fungsi enkripsi dan dekripsi pada permasalahan diatas sebagai persamaan aritmetika modulo dalam p dan c.
 - Bantu calon peserta HMIF untuk mendekripsi sandi “BFW3QX5G” tanpa tanda petik dua.

Jawaban:

$$\begin{aligned} a. \quad c &= E(p) = (p + 12) \bmod 36 \\ p &= D(c) = (c - 12) \bmod 36 \end{aligned}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B

b.

$$\begin{aligned} B &\rightarrow (11-12) \bmod 36 \rightarrow -1 (Z) \\ F &\rightarrow 3 \\ W &\rightarrow K \\ 3 &\rightarrow R \\ Q &\rightarrow E \\ X &\rightarrow L \\ 5 &\rightarrow T \\ G &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

Hasil: Z3KRELT4

4. Di kantin GKUB, dijual 4 jenis buah yakni Apel, Mangga, Pisang, Jeruk dengan masing - masing seharga 2.000 rupiah. Afan memiliki 20.000 rupiah dan ingin menghabiskannya membeli buah. Tentukan banyaknya susunan pembelian yang mungkin apabila Afan ingin membeli minimal 3 apel dan maksimal 2 jeruk! (Petunjuk: tentukan terlebih dahulu maksimal jumlah buah yang dapat dibeli dengan uang Rp20.000, lalu tuliskan persamaan *integer* nya)

Jawaban:

Misalkan x_1, x_2, x_3, x_4 masing - masing mewakili banyaknya buah apel, mangga, pisang, dan jeruk yang dibeli.

Karena uang 20000 dengan harga masing - masing 2000, maka Afan dapat membeli sepuluh buah dengan persamaan:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Karena membeli minimal 3 apel, maka masukkan ke persamaan x_1

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Terdapat 3 kasus :

- Membeli 0 jeruk: maka $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.
Banyak susunannya $C(3+7-1,7) = C(9,7) = 36$
- Membeli 1 jeruk: maka $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
Banyak susunannya $C(3+6-1,6) = C(8,6) = 28$
- Membeli 2 jeruk: maka $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.
Banyak susunannya $C(3+5-1,5) = C(7,5) = 21$

Maka total banyaknya kemungkinan adalah $36 + 28 + 21 = 85$

5. Sebuah *password* terdiri dari 6 buah karakter (0,1,2,...,9). Jika terdapat sebuah software yang dapat menebak password dengan kecepatan 0,001 detik per input, tentukanlah waktu maksimum yang diperlukan untuk memecahkan password jika diketahui 3 karakter terakhir password adalah bilangan prima dan password terdiri dari karakter yang berbeda-beda.

Jawaban:

Terdapat 4 bilangan prima pada rentang 0-9 sehingga jumlah kemungkinan adalah: $7*6*5*4*3*2=5040$ kemungkinan. Sehingga waktu maksimum yang diperlukan adalah $5040*0,001=5,040$ detik

6. Suatu hari, terdapat dosen yang ingin mencari 5 pelajar untuk membantunya mengerjakan proyek. Ada 10 mahasiswa dan 10 mahasiswi yang tertarik untuk ikut. Jika disyaratkan bahwa paling sedikit 3 anggota proyek harus laki-laki, maka tentukan banyak cara dosen untuk memilih anggota proyek.

Jawaban:

Terdapat perwakilan 5 orang yang harus paling sedikit terdapat 3 laki-laki, maka kemungkinan-kemungkinannya sebagai berikut

3 laki-laki dan 2 perempuan

$$C(10, 3) \times C(10, 2) = 10!/(7! \times 3!) \times 10!/(8! \times 2!) = 10 \times 3 \times 4 \times 45 = 5400$$

4 laki-laki dan 1 perempuan

$$C(10, 4) \times C(10, 1) = 10 \times 3 \times 7 \times 10 = 2100$$

5 laki-laki dan 0 perempuan

$$C(10, 5) \times C(10, 0) = 10!/(5! \times 5!) \times 1 = (10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6)/(5 \times 4 \times 3 \times 2) = 3 \times 2 \times 7 \times 6 = 252$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa cara seluruhnya adalah $5400 + 2100 + 252 = 7752$ cara