

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika, Relasi rekurens, dan Aljabar Boolean
Dosen: Rinaldi Munir, Fariska Zakhralatifa, Nur Ulfa Maulidevi
Kamis, 6 Oktober 2022
Waktu: 50 menit

1. Suatu hari, dosen Matematika Diskrit mengeluarkan sebuah tugas besar (**Santai gaees, aslinya nggak ada kok**). Dosen meminta agar setiap kelompok terdiri dari tepat 5 atau 7 orang saja. Buktikan dengan induksi matematika bahwa apabila di kelas terdapat mahasiswa sebanyak 24 atau lebih, maka banyak kelompok dapat diatur sedemikian hingga tiap mahasiswa mendapatkan kelompok DAN tiap kelompok memiliki banyak anggota yang sesuai.

Jawaban:

(i) Basis induksi

Untuk $n = 24$ bisa dibentuk dengan adanya 2 kelompok beranggotakan 5 orang, dan 2 kelompok beranggotakan 7 orang.
 $2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 10 + 14 = 24$
Maka untuk basis, $P(24)$ terbukti benar

(ii) Langkah induksi

Asumsi $P(n)$ benar untuk $n \geq 24$

Pembuktian bahwa $P(n+1)$ adalah benar

Misalkan terdapat N mahasiswa di kelas. Akan terdapat 2 kasus

- 1) Terdapat 2 kelompok yang beranggotakan 7 orang. Maka untuk $n+1$ mahasiswa, dapat memecah 2 kelompok tersebut menjadi 3 kelompok beranggotakan 5 orang.
- 2) Kelompok yang beranggotakan 7 orang kurang dari 2. Dengan demikian, sudah dipastikan terdapat setidaknya 4 kelompok beranggotakan 5 orang. Maka untuk $n+1$ mahasiswa, dapat memecah 4 kelompok beranggotakan 5 orang menjadi 3 kelompok beranggotakan 7 orang

Jadi $P(n+1)$ terbukti benar. Karena basis dan Langkah induksi terbukti benar, maka pernyataan pada soal terbukti benar

2. Pada tahun 2022, kekayaan Bu Vio adalah Rp500.000.000,00. Jika kekayaan bu Vio tiap tahunnya naik 20%, tentukan:
- a. Relasi rekursif P_n yang merepresentasikan kekayaan Bu Vio pada tahun ke- n .
 - b. Solusi dari P_n
 - c. Berapa kekayaan Bu Vio pada tahun 2026? (Catatan: gunakan pembulatan ke atas bila dibutuhkan)

Jawaban:

$$P_n = Rp500.000.000, n = 0$$

a) $P_n = P_{n-1} + 0,2 P_{n-1}, n \geq 0$

b)
$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0,2 P_{n-1} = 1,2 P_{n-1} \\ &= 1,2(1,2P_{n-2}) = 1,2^2 P_{n-2} \\ &= 1,2^2(1,2P_{n-3}) = 1,2^3 P_{n-3} \\ &= \dots \\ &= 1,2^n P_0 \end{aligned}$$

c) $n = 2026 - 2022 = 4$

$$P_4 = 1,2^4 * 500.000.000$$

$$P_4 = 768.800.000$$

3. Doraemon sangat suka makan kue dorayaki. Namun karena ia tidak memiliki banyak uang, Ia hanya dapat membeli 3 dorayaki per bulan. Namun karena ia sangat suka kue tersebut, ia akhirnya memutuskan untuk membeli 3 buah kue

dorayaki dan memasukannya ke alat pengganda barang. Alat tersebut akan menggandakan barang secara rekursif dengan relasi rekurens: $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$ dengan $n =$ hari. Jika pada awalnya (hari ke-0) doraemon memiliki 3 kue dorayaki dan pada hari ke-1 ia memiliki 5 kue dorayaki, tentukan jumlah kue dorayaki yang ia miliki setelah 10 hari.

Jawaban:

Persamaan karakteristik : $r^2 - 2r + 3 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik: $(r-3)(r+1) = 0 \rightarrow r_1 = 3$ dan $r_2 = -1$

$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 (-1)^n$

$a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 (-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 3$

$a_1 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 = 5$

maka: $\alpha_1 = 2$ dan $\alpha_2 = 1$

Jadi solusi rekurens adalah $a_n = 2 \cdot 3^n + 1 \cdot (-1)^n$

Total kue dorayaki pada hari ke-10 adalah $2 \cdot 59049 - 1 = 118097$

4. Tentukan bentuk komplemen dari fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'y(x + z + yz')$

Jawaban:

$$\begin{aligned}
 f'(x, y, z) &= (x'y(x + z + yz'))' \\
 &= (x'y)' + (x + z + yz')' && \text{(Hukum De Morgan)} \\
 &= (x + y') + x'z'(yz')' && \text{(Hukum De Morgan)} \\
 &= x + y' + x'z'(y' + z) && \text{(Hukum De Morgan)} \\
 &= x + y' + x'y'z' + x'zz' && \text{(Hukum Distributif)} \\
 &= x + y' + x'y'z' + 0 \\
 &= x + y' + x'y'z'
 \end{aligned}$$

5. Buatlah sebuah rangkaian logika dengan memanfaatkan Peta Karnaugh untuk menentukan apakah suatu **angka desimal** (0 – 9) merupakan bilangan ganjil dan memiliki minimal dua buah bit 1.

Jawaban:

Misalkan desimal 4 bit direpresentasikan sebagai wxyz dengan w, x, y, z bernilai 1 atau 0.

Berikut ini adalah tabel kebenaran yang menentukan apakah susunan desimal dalam 4 bit memenuhi prinsip bilangan ganjil pada desimal dan memiliki minimal dua bit 1.

Angka Desimal	w	x	y	z	f(w, x, y, z)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
-	1	0	1	0	X

-	1	0	1	1	X
-	1	1	0	0	X
-	1	1	0	1	X
-	1	1	1	0	X
-	1	1	1	1	X

Berikut ini adalah Peta Karnaugh yang terbentuk dari tabel kebenaran di atas.

	yz				
		00	01	11	10
wx	00	0	0	1	0
	01	0	1	1	0
	11	X	X	X	X
	10	0	1	X	X

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = yz + xz + wz$

Rangkaian logika:

