

Aplikasi Graf dan Pohon dalam Sistem Pertandingan Turnamen Piala Dunia FIFA 2022

Jason Rivalino - 13521008
 Program Studi Teknik Informatika
 Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
 Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
 13521008@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—Makalah ini akan membahas mengenai aplikasi dari materi graf dan pohon yang ada pada Matematika Diskrit. Aplikasi yang ada terkait dengan sistem pertandingan pada turnamen Piala Dunia FIFA 2022 mulai dari sistem pertandingan yang ada pada babak penyisihan grup hingga sistem pertandingan pada babak gugur.

Kata Kunci—Graf, Pohon, Sepakbola, Piala Dunia FIFA 2022, Babak Penyisihan Grup, Tiebreaker, Babak Gugur

I. PENDAHULUAN

Sepakbola merupakan salah satu olahraga yang paling terkenal diseluruh dunia. Dalam sepakbola, terdapat berbagai macam turnamen atau kompetisi untuk menentukan kesebelasan yang terbaik dalam cabang olahraga ini. Turnamen yang ada terdiri dari berbagai macam tingkatan, mulai dari tingkatan lokal seperti Premier League dan FA Cup yang merupakan turnamen untuk klub-klub sepakbola yang berasal dari negara Inggris, lalu UEFA Champions League yang merupakan turnamen yang mempertemukan berbagai klub yang berasal dari negara-negara konfederasi Eropa, hingga yang terbesar adalah turnamen sepakbola internasional Piala Dunia FIFA yang mempertemukan berbagai negara-negara dari seluruh dunia.

Pada berbagai macam turnamen sepakbola, tentunya turnamen yang ada sudah memiliki sistem yang terstruktur untuk menentukan calon juara dari turnamen. Seperti pada turnamen Piala Dunia FIFA, khususnya edisi Piala Dunia FIFA 2022, turnamen ini sudah memiliki sistem pertandingan yang terdiri atas babak penyisihan grup (*Group Stage*) dan juga babak gugur (*knock-out*). Tentunya hasil akhir dari sistem pertandingan ini adalah untuk mendapatkan satu negara dengan kesebelasan terbaik yang berhasil menjuarai turnamen ini.

Dalam sistem pertandingan yang ada pada Piala Dunia FIFA 2022, terdapat aplikasi yang terkait dengan materi yang ada pada Matematika Diskrit yaitu mengenai graf dan pohon. Aplikasi dari graf dan pohon yang ada pada turnamen ini yaitu seperti sistem untuk menentukan pertandingan antar negara dan sistem untuk mengeliminasi negara yang mengalami kekalahan dari negara lainnya dalam pertandingan.

Pada makalah ini, penulis mencoba untuk membahas dan menganalisa mengenai penerapan graf dan pohon dalam sistem pertandingan Piala Dunia FIFA 2022.

II. TEORI DASAR

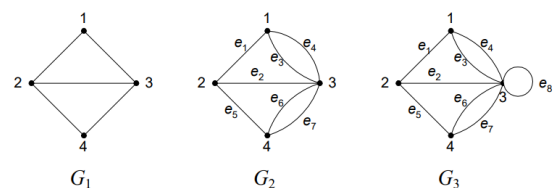
A. Graf (Graph)

Graf merupakan himpunan tidak kosong yang dipergunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Komponen yang ada dari graf sendiri terdiri atas simpul (*vertex*) dan juga sisi (*edge*) yang dapat direpresentasikan dalam bentuk $G = (V,E)$ yang dalam bentuk ini:

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices) = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

E = himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Contoh dari bentuk representasi graf adalah sebagai berikut:



Gambar 2.1 Contoh bentuk representasi Graf

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Graf-graf tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $G = (V,E)$ yaitu sebagai berikut:

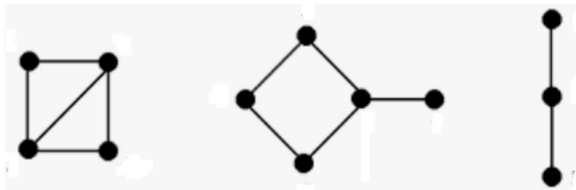
$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E_1 = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
 $G_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\})$

$V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E_2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,4)\}$
 $G_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,4)\})$

$V_3 = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E_3 = \{(1,2), (2,3), (1,3), (1,3), (2,4), (3,4), (3,4), (3,3)\}$
 $G_3 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1,2), (2,3), (1,3), (1,3), (2,4), (3,4), (3,4), (3,3)\})$

Berdasarkan ada tidaknya sisi gelang dan sisi ganda, graf dapat dibedakan sebagai berikut:

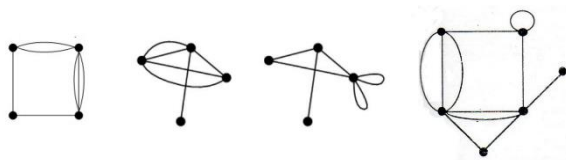
1. Graf sederhana (*simple graph*)
Graf yang tidak mengandung sisi gelang dan sisi ganda



Gambar 2.2 Contoh graf sederhana

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

2. Graf tidak sederhana (*unsimple graph*)
Graf yang mengandung sisi gelang dan sisi ganda

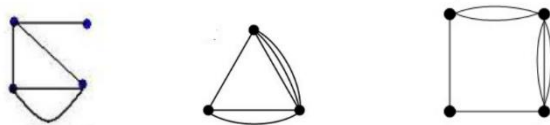


Gambar 2.3 Contoh graf tidak sederhana

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Graf bentuk tidak sederhana dapat dibedakan lagi menjadi dua yaitu:

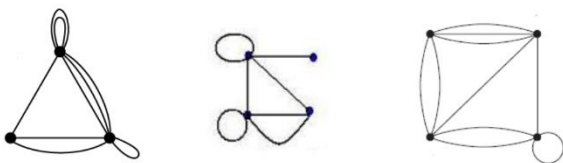
- a) Graf ganda
Graf yang mengandung sisi ganda



Gambar 2.4 Contoh graf ganda

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

- b) Graf semu
Graf yang mengandung sisi gelang

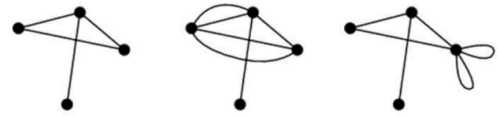


Gambar 2.5 Contoh graf semu

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Berdasarkan orientasi arah pada sisinya, graf dapat dibedakan sebagai berikut:

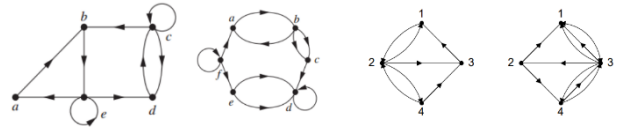
1. Graf tidak berarah
Graf yang tidak mempunyai orientasi arah



Gambar 2.6 Contoh graf tidak berarah

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

2. Graf berarah
Graf yang mempunyai orientasi arah pada setiap sisinya



Gambar 2.7 Contoh graf berarah

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Tabel dari jenis-jenis perbedaan graf:

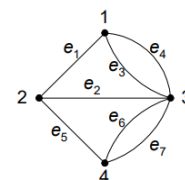
Jenis	Sisi	Sisi ganda diperbolehkan?	Sisi gelang diperbolehkan?
Graf sederhana	Tidak berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tidak berarah	Boleh	Tidak
Graf semu	Tidak berarah	Boleh	Boleh
Graf berarah	Berarah	Tidak	Boleh
Graf-ganda berarah	Berarah	Boleh	Boleh

Tabel 2.1 Jenis-Jenis Graf

Pada sebuah bentuk graf, terdapat beberapa terminologi yang cukup umum, diantaranya:

1. Ketetanggaan (*adjacent*)

Ketetanggaan adalah kondisi ketika dua buah simpul terhubung langsung satu sama lain. Seperti contohnya pada graf dibawah ini. Pada graf ini simpul 4 bertetangga dengan simpul 2 dan 3. Akan tetapi, simpul 4 tidak bertetangga dengan simpul 1.



Gambar 2.8 Contoh model ketetanggaan graf

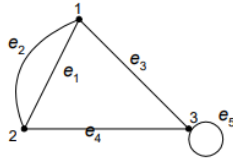
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

2. Bersisian (*incidency*)

Bersisian adalah kondisi ketika suatu sisi menghubungkan simpul yang disinggung dengan simpul lainnya. Bentuk dari kondisi bersisian dapat dinyatakan

dengan $e = (v_j, v_k)$ dengan kondisi e bersisian dengan simpul v_j atau simpul v_k .

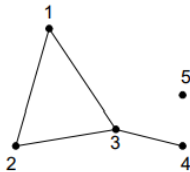
Contoh dari kondisi graf yang bersisian terdapat pada graf dibawah ini. Pada graf ini sisi (1,3) bersisian dengan simpul 1 dan simpul 3. Akan tetapi, sisi (1,3) tidak bersisian dengan simpul 2.



Gambar 2.9 Contoh model graf yang bersisian
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

3. Simpul Terpencil (*isolated vertex*)

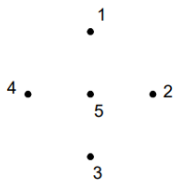
Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Seperti contohnya pada graf dibawah ini. Pada graf dibawah ini, simpul 5 merupakan simpul terpencil.



Gambar 2.10 Contoh model simpul terpencil pada graf
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n). Contohnya adalah seperti pada graf dibawah ini:



Gambar 2.11 Contoh model simpul terpencil pada graf
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

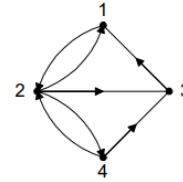
5. Derajat (*degree*)

Derajat dalam graf adalah jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul. Derajat dari suatu simpul memiliki notasi $d(v)$.

Tinjau kembali gambar 2.10. Pada graf tersebut, kondisi dari derajat grafnya adalah sebagai berikut:

- $d(1) = 2 \rightarrow$ bersisian dengan simpul 2 dan 3
- $d(2) = 2 \rightarrow$ bersisian dengan simpul 1 dan 3
- $d(3) = 3 \rightarrow$ bersisian dengan simpul 1, 2, dan 4
- $d(4) = 1 \rightarrow$ bersisian dengan simpul 3
- $d(5) = 0 \rightarrow$ simpul terpencil

Untuk graf yang berarah, derajat simpul juga dibedakan lagi berdasarkan derajat masuk dan derajat keluar. Contohnya adalah seperti graf berikut:



Gambar 2.12 Contoh model derajat pada graf berarah
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Pada graf dari gambar 2.11, kondisi dari derajat grafnya adalah sebagai berikut:

- $d_{in}(1) = 2; d_{out}(1) = 1$
- $d_{in}(2) = 2; d_{out}(2) = 3$
- $d_{in}(3) = 2; d_{out}(3) = 1$
- $d_{in}(4) = 1; d_{out}(4) = 2$

Perhitungan jumlah total derajat semua simpul pada suatu graf dapat dihitung dengan menggunakan Lemma Jabat Tangan dengan persamaan rumus:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Dalam rumus ini, $d(v)$ menyatakan jumlah total semua derajat dan E menyatakan banyaknya jumlah sisi. Sehingga, jumlah total derajat semua simpul pada suatu graf tak lain adalah $2 \times$ jumlah sisi pada graf.

6. Lintasan (*path*)

Lintasan adalah gabungan kumpulan sisi yang menggambarkan perpindahan pada suatu graf. Tinjau kembali gambar 2.10. Pada graf tersebut, lintasan 1,2,3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2) dan (2,3).

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan graf. Pada contoh kondisi lintasan 1,2,3 dari graf gambar 2.10, lintasan ini memiliki panjang sebesar 2.

7. Siklus (*cycle*) atau Sirkuit (*circuit*)

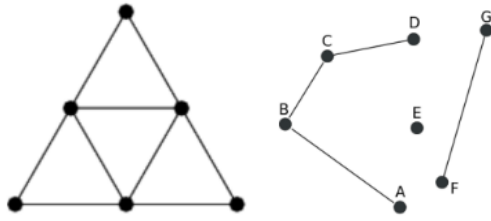
Siklus atau sirkuit adalah lintasan yang memiliki awalan dan akhiran pada suatu simpul yang sama. Tinjau kembali gambar 2.10. Pada graf tersebut, 1,2,3,1 merupakan sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sebuah sirkuit. Pada contoh kondisi sirkuit 1,2,3,1 dari graf gambar 2.10, sirkuit ini memiliki panjang sebesar 3.

8. Keterhubungan (*connected*)

Keterhubungan adalah kondisi ketika suatu graf terhubung dan dapat membentuk suatu lintasan yang mencakup semua simpul pada graf tersebut. Jika kondisi tidak terpenuhi, maka graf disebut sebagai graf tidak terhubung (*disconnected graph*).

Contoh dari graf terhubung yaitu pada gambar 2.12 di sebelah kiri dan contoh dari graf yang tidak terhubung yaitu pada gambar 2.12 di sebelah kanan.

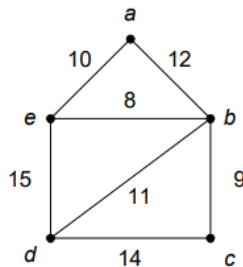


Gambar 2.13 Contoh graf terhubung dan tidak terhubung
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Untuk keterhubungan pada graf yang berarah, keterhubungan dapat dibagi menjadi graf terhubung kuat, yaitu kondisi ketika terdapat lintasan berarah dari simpul u ke v dan juga lintasan berarah dari simpul v ke u . Jika simpul u dan v tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka keterhubungan ini dikatakan sebagai graf terhubung lemah.

9. Graf Berbobot (*weighted graph*)

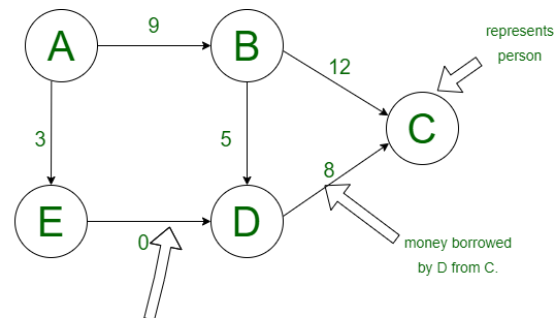
Graf berbobot adalah graf yang pada setiap sisinya diberi sebuah harga atau bobot.



Gambar 2.14 Contoh graf berbobot

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Pada graf berbobot, umumnya harga atau bobot yang ada pada sisi graf memiliki nilai yang positif. Akan tetapi, dalam beberapa kondisi tertentu, bobot pada graf boleh bernilai 0 untuk membantu memudahkan representasi dari sebuah graf. Contohnya sebagai berikut:

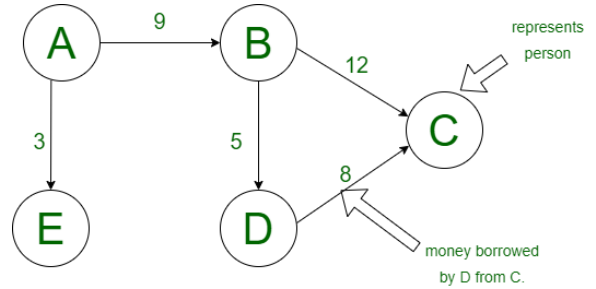


It implies E has borrowed 0 rupees from D which is same as having no edge between them.

Gambar 2.15 Contoh kondisi bobot bernilai 0

(Sumber: <https://www.geeksforgeeks.org/in-a-weighted-graph-is-zero-allowed-as-an-edges-weight/>)

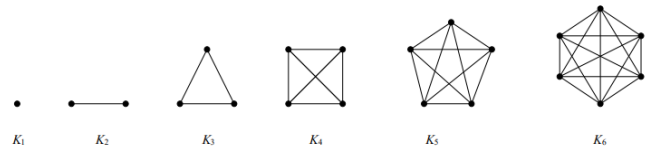
Graf pada gambar 2.14 merepresentasikan peminjaman uang dari satu orang ke orang lain. Pada graf ini, sisi dari E ke D memiliki nilai 0 yang berarti E tidak meminjam uang ke D. Untuk memudahkan penggambaran agar semua simpul terhubung satu sama lain, maka penggunaan sisi dengan bobot 0 diperbolehkan. Bentuk lain dari graf pada gambar 2.14 adalah sebagai berikut:



Gambar 2.16 Bentuk lain gambar graf 2.15^[2]

(Sumber: <https://www.geeksforgeeks.org/in-a-weighted-graph-is-zero-allowed-as-an-edges-weight/>)

Beberapa graf memiliki bentuk yang khusus. Salah satu graf dengan bentuk yang khusus yaitu graf lengkap. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap sisinya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap yang memiliki banyak simpul n dilambangkan dengan K_n .



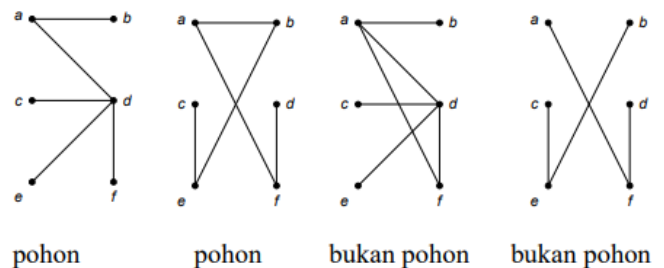
Gambar 2.17 Graf lengkap $n=1$ sampai $n=6$

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

Adapun jumlah sisi yang ada pada graf lengkap yang terdiri atas n buah simpul adalah sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$.

B. Pohon (Tree)

Pohon adalah graf tidak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit.



Gambar 2.18 Contoh graf yang merupakan pohon dan yang bukan merupakan pohon

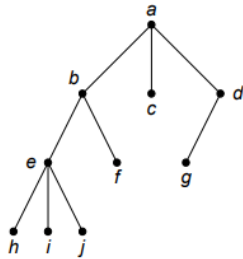
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Pohon-2020-Bag1.pdf>)

Misalkan $G = (V,E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dengan jumlah simpul sebanyak n , maka G memiliki beberapa property yaitu:

1. G adalah pohon

2. G terhubung dengan satu lintasan dan semua sisinya adalah jembatan
3. Jumlah sisi G sebanyak simpul – 1
4. G tidak mengandung sirkuit

Salah satu bentuk pohon yang paling umum adalah pohon dengan bentuk pohon berakar (*rooted tree*). Pohon berakar adalah pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah.



Gambar 2.19 Contoh gambar pohon berakar

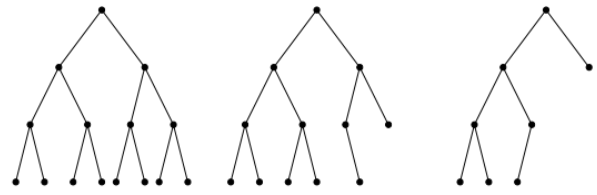
(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Pohon-2020-Bag2.pdf>)

Beberapa terminologi yang ada pada pohon berakar antara lain:

1. Anak (*child* atau *children*) dan Orangtua (*parent*)
Pada pohon di gambar 2.15, b,c, dan d merupakan anak-anak dari simpul a dan a merupakan orangtua dari simpul anak-anak itu.
2. Lintasan (*path*)
Pada pohon di gambar 2.15, lintasan dari a ke g adalah a,d,g dan panjang lintasannya adalah sebesar 2.
3. Saudara Kandung (*sibling*)
Pada pohon di gambar 2.15, e adalah saudara kandung f, tetapi e bukan saudara kandung g karena orangtua mereka berbeda.
4. Derajat (*degree*)
Derajat adalah jumlah anak dari suatu simpul. Pada pohon di gambar 2.15, derajat dari a dan e adalah 3, derajat dari b adalah 2, dan derajat dari d adalah 1.
5. Daun (*leaf*)
Daun adalah simpul yang berderajat nol atau tidak mempunyai anak. Pada pohon di gambar 2.15, simpul h,i,j,f,c,g adalah daun.
6. Simpul dalam (*internal nodes*)
Simpul dalam adalah simpul yang mempunyai anak. Pada pohon di gambar 2.15, simpul b,d,e adalah simpul dalam.
7. Aras (*level*) atau Tingkat
Aras adalah tingkatan yang ada pada pohon. Pada pohon di gambar 2.15, simpul a berada pada tingkat 0, simpul b,c,d berada pada tingkat 1, simpul e,f,g berada pada tingkat 2, dan simpul h,i,j berada pada tingkat 3.
8. Tinggi (*height*) atau kedalaman (*depth*)
Tinggi atau kedalaman adalah aras maksimum dari suatu pohon. Pada pohon di gambar 2.15, pohon tersebut mempunyai tinggi sebesar 3.

Terdapat beberapa tipe pohon akar yang cukup terkenal yaitu pohon terurut (*ordered tree*), pohon *n*-ary, dan juga pohon yang paling banyak aplikasinya yaitu pohon biner (*binary tree*).

Pohon Biner adalah pohon *n*-ary dengan $n=2$, yaitu pohon yang mempunyai paling banyak dua buah anak. Pohon ini akan dibedakan antara anak kiri (*left child*) dan anak kanan (*right child*). Karena ada perbedaan urutan anak, maka pohon biner adalah pohon terurut.



Gambar 2.20 Contoh gambar pohon biner

(Sumber: <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Pohon-2020-Bag2.pdf>)

C. Piala Dunia FIFA 2022

Piala Dunia FIFA 2022 adalah turnamen edisi ke-22 dari turnamen Piala Dunia FIFA yang diselenggarakan setiap empat tahun sekali. Turnamen ini diorganisir oleh FIFA yang merupakan federasi pengelola sepakbola internasional. Pada tahun 2022 ini, turnamen Piala Dunia FIFA diselenggarakan dari tanggal 20 November 2022 hingga 18 Desember 2022 di negara Qatar.



Gambar 2.21 Logo Piala Dunia FIFA 2022

(Sumber: <https://www.fifa.com/fifaplus/en/tournaments/mens/worldcup/qatar2022>)

Peserta dari Piala Dunia FIFA 2022 terdiri dari 32 negara yang berasal dari 5 konfederasi (13 negara dari konfederasi Eropa, 6 negara termasuk tuan rumah dari konfederasi Asia, 5 negara dari konfederasi Afrika, dan 4 negara masing-masing dari konfederasi Amerika Utara dan Amerika Selatan).^[5]



Gambar 2.22 Negara-negara yang mengikuti turnamen Piala Dunia FIFA 2022

(Sumber: https://www.youtube.com/watch?v=_dILXOkJoQ)

III. PENERAPAN GRAF DAN POHON PADA TURNAMEN PIALA DUNIA FIFA 2022

Sistem pertandingan yang ada pada turnamen Piala Dunia FIFA 2022 ini terdiri atas babak penyisihan grup (*Group Stage*) dan babak gugur (*Knock-Out*)^[6]. Pada kedua babak ini, sistem pertandingan akan direpresentasikan dengan cara yang berbeda. Pada babak penyisihan grup, sistem pertandingan dan perhitungan poin akan direpresentasikan dalam bentuk graf. Sedangkan, pada babak gugur, sistem pertandingan akan direpresentasikan dalam bentuk pohon.

A. Sistem Pertandingan pada Babak Penyisihan Grup (*Group Stage*)

Pada babak penyisihan grup, 32 negara yang berpartisipasi dalam turnamen piala dunia ini akan dibagi menjadi 8 grup dengan satu grup terdiri dari 4 negara. Pada babak penyisihan grup, akan dicari dua negara teratas dalam klasemen grup yang kemudian akan lolos menuju ke babak gugur.



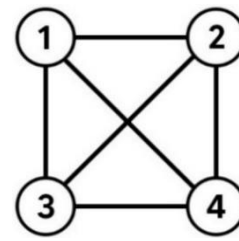
GROUP A	GROUP B	GROUP C	GROUP D
QATAR	ENGLAND	ARGENTINA	FRANCE
ECUADOR	IRAN	SAUDI ARABIA	AUSTRALIA
SENEGAL	UNITED STATES	MEXICO	DENMARK
NETHERLANDS	WALES	POLAND	TUNISIA
GROUP E	GROUP F	GROUP G	GROUP H
SPAIN	BELGIUM	BRAZIL	PORTUGAL
COSTA RICA	CANADA	SERBIA	GHANA
GERMANY	MOROCCO	SWITZERLAND	URUGUAY
JAPAN	CROATIA	CAMEROON	SOUTH KOREA

Gambar 3.1 Babak Penyisihan Grup Piala Dunia FIFA 2022
(Sumber: <https://www.marca.com/en/world-cup/2022/06/14/62a8fcc246163fdc138b45f1.html>)

Sistem pertandingan yang ada pada babak penyisihan grup ini menggunakan format *round-robin*. Dalam format *round-robin*, semua negara yang tergabung dalam satu grup akan saling bertemu dan bertanding satu sama lain sebanyak satu pertandingan^[7]. Setelah bertanding, negara akan mendapatkan poin berdasarkan hasil pertandingan dengan ketentuan sebagai berikut:

- Negara yang memenangkan pertandingan akan mendapatkan 3 poin
- Negara yang meraih hasil imbang masing-masing akan mendapatkan 1 poin
- Negara yang kalah dalam pertandingan tidak akan mendapatkan poin

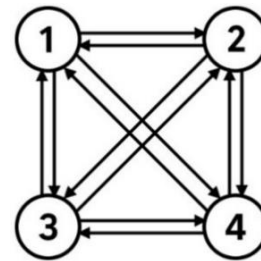
Sistem *round-robin* dalam Piala Dunia FIFA 2022 ini dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yaitu sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf sistem *round-robin*
(Sumber: Dokumen Pribadi)

Pada graf ini, setiap simpul mewakili banyaknya negara yang tergabung dalam suatu grup dan setiap sisi mewakili pertandingan antara dua negara. Banyaknya pertandingan yang ada dalam babak penyisihan grup ini dapat dihitung dengan rumus $\frac{n(n-1)}{2}$, dengan n menyatakan banyaknya negara dalam satu grup. Sehingga jika dilakukan perhitungan, akan didapat hasil sebagai berikut: $\frac{4(4-1)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pertandingan. Karena total semua grup ada 8, maka total pertandingan yang dimainkan dalam babak penyisihan grup ini adalah sebanyak 48 pertandingan.

Selain banyaknya jumlah pertandingan, hasil perhitungan poin dan jumlah gol yang ada pada babak grup juga dapat direpresentasikan dengan graf berarah yaitu sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf sistem perhitungan poin dan selisih gol pada babak penyisihan grup
(Sumber: Dokumen Pribadi)

Pada graf ini, arah yang ada bersifat bolak-balik untuk setiap pertandingan yang berlangsung. Untuk hasil perhitungan poin, simpul asal menyatakan negara 1 dan simpul tujuan menyatakan negara 2, dan sisi yang berarah dari simpul 1 ke simpul 2 menyatakan jumlah poin yang didapat ketika negara 1 bertanding dengan negara 2.

Sama seperti pada hasil perhitungan poin, sistem untuk menghitung jumlah gol bisa dicari dari graf pada gambar 3.3 dengan simpul asal menyatakan negara 1 dan simpul tujuan menyatakan negara 2, dan sisi yang berarah dari simpul 1 ke simpul 2 menyatakan jumlah gol yang dicetak oleh negara 1 saat bertanding dengan negara 2.

Pada babak penyisihan grup juga, terdapat sistem *tiebreaker* untuk menentukan klasemen akhir dengan urutan tingkatan sebagai berikut^[8]:

- Jumlah poin, dalam representasi graf berarti jumlah terbesar dari total bobot yang ada pada seluruh sisi keluar pada suatu simpul (tinjau graf sistem perhitungan poin)

- Jumlah selisih gol, dalam representasi graf berarti selisih terbesar antara total bobot yang ada pada seluruh sisi keluar dikurangi dengan total bobot yang ada pada seluruh sisi masuk pada suatu simpul (tinjau graf sistem perhitungan gol)
- Jumlah memasukkan gol, dalam representasi graf berarti jumlah terbesar dari total bobot yang ada pada seluruh sisi keluar pada suatu simpul (tinjau graf sistem perhitungan gol)
- Head-to-Head*, dalam representasi graf berarti jumlah poin yang lebih besar antara dua graf yang jumlah poinnya imbang dengan kondisi kedua graf saling bolak-balik. Pada Piala Dunia FIFA 2022 ini, tidak ada babak grup yang mencapai kondisi *tiebreak* ini sehingga ini hanya untuk tambahan penjelasan saja.
- Fairplay*, yaitu perhitungan jumlah kartu yang didapat selama proses babak penyisihan grup.

Sistem pertandingan dan *tiebreaker* ini berlaku untuk semua grup dalam turnamen Piala Dunia FIFA 2022. Dalam makalah ini, hanya akan dibahas sampel contoh representasi graf dari salah satu grup yang ada dalam turnamen Piala Dunia FIFA 2022 yaitu analisis terhadap hasil pertandingan yang ada pada grup H yang terdiri dari negara Ghana, Korea Selatan, Portugal, dan Uruguay. Pada hasil pertandingan dan klasemen akhir dari grup H sendiri terjadi kondisi *tiebreaker* ketiga dengan klasemen akhir adalah sebagai berikut:

Group H										
Team	MP	W	D	L	GF	GA	GD	Pts	Last 5	
1 Portugal	3	2	0	1	6	4	2	6	●●●●○	
2 South Korea	3	1	1	1	4	4	0	4	●●●○●	
3 Uruguay	3	1	1	1	2	2	0	4	●●○●●	
4 Ghana	3	1	0	2	5	7	-2	3	●●○●●	

Group H results

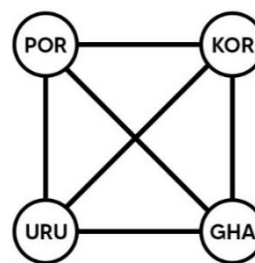
Nov 24					
FT	Uruguay	0	v	0	South Korea
FT	Portugal	3	v	2	Ghana
Nov 28					
FT	South Korea	2	v	3	Ghana
FT	Portugal	2	v	0	Uruguay
Dec 2					
FT	Ghana	0	v	2	Uruguay
FT	South Korea	2	v	1	Portugal

Gambar 3.4 dan 3.5 Hasil pertandingan dan klasemen akhir grup H Piala Dunia FIFA 2022

(Sumber: Google dan

<https://www.skysports.com/football/news/12098/12702687/world-cup-2022-state-of-play-live-group-tables-results-and-fixtures-in-qatar>)

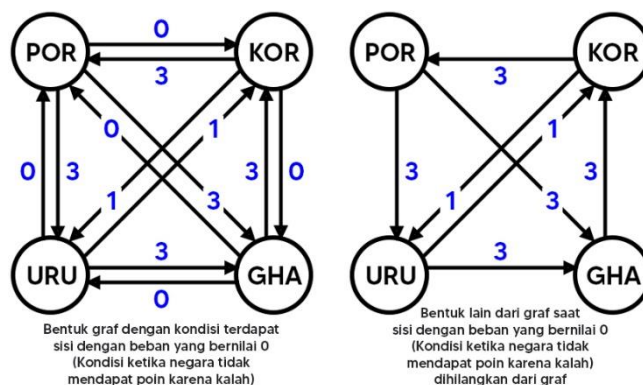
Pada grup H, pertandingan yang terjadi dalam grup ini dapat dinyatakan dengan representasi graf berikut:



Gambar 3.6 Graf pertandingan pada Grup H

(Sumber: Dokumen Pribadi)

Untuk hasil poin yang didapatkan dari pertandingan, bentuk representasi grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf hasil perhitungan poin pada Grup H

(Sumber: Dokumen Pribadi)

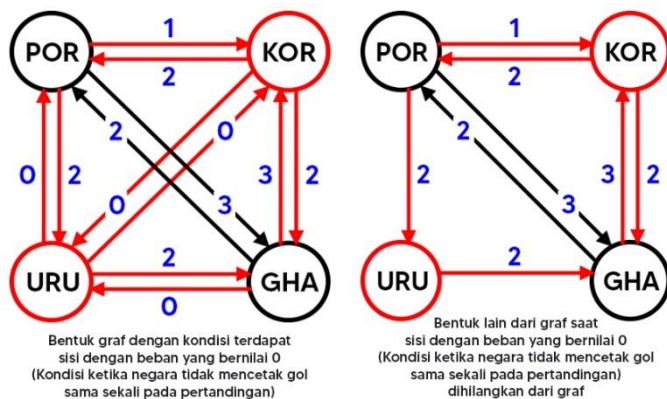
Penjelasan dari graf:

- Pada simpul negara Portugal:
 - Sisi yang menuju Korea Selatan memiliki bobot 0 karena Portugal kalah 1-2.
 - Sisi yang menuju Uruguay memiliki bobot 3 karena Portugal menang 2-0.
 - Sisi yang menuju Ghana memiliki bobot 3 karena Portugal menang 3-2.
 - Total bobot pada seluruh sisi keluarnya sebanyak 6.
- Pada simpul negara Korea Selatan:
 - Sisi yang menuju Uruguay memiliki bobot 1 karena Korea Selatan seri 0-0.
 - Sisi yang menuju Ghana memiliki bobot 0 karena Korea Selatan kalah 2-3.
 - Sisi yang menuju Portugal memiliki bobot 3 karena Korea Selatan menang 2-1.
 - Total bobot pada seluruh sisi keluarnya sebanyak 4.
- Pada simpul negara Uruguay:
 - Sisi yang menuju Ghana memiliki bobot 3 karena Uruguay menang 2-0.
 - Sisi yang menuju Portugal memiliki bobot 0 karena Uruguay kalah 0-2.
 - Sisi yang menuju Korea Selatan memiliki bobot 1 karena Uruguay seri 0-0.
 - Total bobot pada seluruh sisi keluarnya sebanyak 4.

4. Pada simpul negara Ghana:
 - a. Sisi yang menuju Portugal memiliki bobot 0 karena Ghana kalah 2-3.
 - b. Sisi yang menuju Uruguay memiliki bobot 0 karena Ghana kalah 0-2.
 - c. Sisi yang menuju Korea Selatan memiliki bobot 3 karena Ghana menang 3-2.
 - d. Total bobot pada seluruh sisi keluaranya sebanyak 3.

Berdasarkan hasil representasi graf ini, didapatkan bahwa simpul Portugal memiliki nilai bobot pada sisi keluar paling besar jika dibandingkan dengan simpul negara lain sehingga Portugal menjadi juara grup. Begitupun pada simpul Ghana yang mendapatkan nilai bobot pada sisi keluar paling kecil sehingga Ghana berada di posisi paling bawah klasemen.

Akan tetapi, nilai bobot pada sisi keluar dari simpul Korea Selatan dan Uruguay masih sama yaitu sebanyak 4. Dari kondisi ini kemudian akan masuk dalam kondisi *tiebreaker* kedua yaitu membandingkan selisih gol. Untuk representasi graf jumlah gol pada grup H dapat dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf hasil perhitungan jumlah gol pada Grup H (Sumber: Dokumen Pribadi)

Penjelasan dari graf:

1. Pada simpul negara Korea Selatan:
 - a. Untuk sisi keluaranya, sisi yang menuju Uruguay memiliki bobot 0 karena Korea Selatan tidak mencetak gol sama sekali.
 - b. Sisi yang menuju Ghana memiliki bobot 2 karena Korea Selatan mencetak 2 gol.
 - c. Sisi yang menuju Portugal memiliki bobot 2 karena Korea Selatan mencetak 2 gol.
 - d. Total bobot pada seluruh sisi keluaranya sebanyak 4.
 - e. Untuk sisi masuknya, sisi yang berasal dari Uruguay memiliki bobot 0 karena Korea Selatan tidak kebobolan gol sama sekali.
 - f. Sisi yang berasal dari Ghana memiliki bobot 3 karena Korea Selatan kebobolan 3 gol.
 - g. Sisi yang berasal dari Portugal memiliki bobot 1 karena Korea Selatan kebobolan 1 gol.

- h. Total bobot pada seluruh sisi masuknya juga sebanyak 4.
 - i. Selisih total bobot seluruh sisi keluar dengan total bobot seluruh sisi masuk: $4-4 = 0$.
2. Pada simpul negara Uruguay:
 - a. Sisi yang menuju Ghana memiliki bobot 2 karena Uruguay mencetak 2 gol.
 - b. Sisi yang menuju Portugal memiliki bobot 0 karena Uruguay tidak mencetak gol sama sekali.
 - c. Sisi yang menuju Korea Selatan memiliki bobot 0 karena Uruguay tidak mencetak gol sama sekali.
 - d. Total bobot pada seluruh sisi keluaranya sebanyak 2.
 - e. Untuk sisi masuknya, sisi yang berasal dari Ghana memiliki bobot 0 karena Uruguay tidak kebobolan gol sama sekali.
 - f. Sisi yang berasal dari Portugal memiliki bobot 2 karena Uruguay kebobolan 2 gol.
 - g. Sisi yang berasal dari Korea Selatan memiliki bobot 0 karena Uruguay tidak kebobolan gol sama sekali.
 - h. Total bobot pada seluruh sisi masuknya juga sebanyak 2.
 - i. Selisih total bobot seluruh sisi keluar dengan total bobot seluruh sisi masuk: $2-2 = 0$.

Berdasarkan hasil tersebut, didapatkan bahwa selisih total bobot seluruh sisi keluar dan total bobot seluruh sisi masuk antara negara Korea Selatan dan Uruguay juga masih sama yaitu 0. Sehingga, masuk kedalam kondisi *tiebreaker* ketiga yaitu menghitung jumlah memasukkan gol. Pada negara Korea Selatan, total bobot pada seluruh sisi keluaranya sebanyak 4 sedangkan pada negara Uruguay, total bobot pada seluruh sisi keluaranya hanya sebanyak 2. Atau dengan kata lain, Korea Selatan mencetak gol lebih banyak dibandingkan dengan Uruguay. Dari kondisi inilah, maka Korea Selatan yang akhirnya lolos menuju babak gugur bersama dengan Portugal.

B. Sistem Pertandingan pada Babak Gugur (*Knock-Out*)

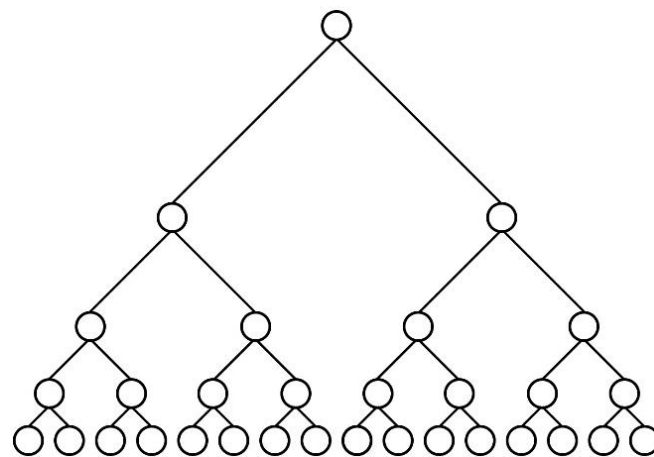
Pada babak gugur, 16 negara yang sudah lolos akan bertanding satu sama lain untuk memperebutkan gelar juara Piala Dunia. Sistem pertandingan yang ada pada babak gugur ini menggunakan format *single-elimination*. Dalam format ini, negara akan dipasangkan dengan negara lainnya dan kedua negara akan saling bertanding. Negara yang menang akan maju ke babak selanjutnya dan negara yang kalah akan langsung tersingkir dari turnamen.

Untuk penentuan negara yang saling bertanding di babak 16 besar adalah negara yang mendapatkan peringkat 1 dari grup A akan berhadapan dengan negara yang mendapatkan peringkat 2 dari grup B dan negara yang mendapatkan peringkat 1 dari grup B akan berhadapan dengan negara yang

mendapatkan peringkat 2 dari grup A, begitupun seterusnya hingga sampai ke grup H.

Pada turnamen Piala Dunia FIFA 2022, pertandingan babak gugur dengan format *single-elimination* akan berlangsung dimulai dari babak 16 besar (*Round Of 16*), 8 besar (*Quarter-Final*), 4 besar (*Semi-Final*), hingga menyisakan dua negara atau sudah mencapai babak Final. Pada babak Final ini, kedua negara yang tersisa akan bertanding untuk memperebutkan juara dari turnamen ini. Susunan pertandingan babak gugur ini dapat dinyatakan dalam bentuk *bracket*.

Untuk *bracket* pada sistem pertandingan babak gugur, terdapat 4 blok dengan setiap blok terdiri atas negara yang berbeda. Blok pertama diisi oleh pemenang grup A dan C beserta peringkat kedua grup B dan D, blok kedua diisi oleh pemenang grup E dan G beserta peringkat kedua grup F dan H, blok ketiga diisi oleh pemenang grup B dan D beserta peringkat kedua grup A dan C, dan blok keempat diisi oleh pemenang grup F dan H beserta peringkat kedua grup E dan G. Adanya sistem blok ini bertujuan untuk menghindari tim yang berasal dari grup yang sama untuk kembali bertemu^[9]. Representasi dari *bracket* pada sistem pertandingan babak gugur adalah sebagai berikut



Gambar 3.10 Pohon Biner sistem *single-elimination* pada Babak Gugur Piala Dunia FIFA 2022
(Sumber: Dokumen Pribadi)

Beberapa terminologi dalam pohon biner jika direpresentasikan kedalam bentuk *Bracket* babak gugur adalah sebagai berikut:

1. Pohon direpresentasikan berupa sistem babak gugur secara keseluruhan.
2. Akar direpresentasikan berupa negara yang menjuarai Piala Dunia FIFA 2022.
3. Daun direpresentasikan berupa negara yang lolos menuju fase Babak Gugur.
4. Saudara kandung direpresentasikan berupa negara yang saling berhadapan satu sama lain dalam babak gugur.
5. Panjang lintasan direpresentasikan berupa banyaknya babak yang harus dilalui untuk menjadi juara Piala Dunia FIFA 2022, pada pohon ini, panjang lintasanya yaitu sebesar 4 yang merepresentasikan babak 16 besar hingga mencapai negara yang menjuarai turnamen.
6. Simpul dalam direpresentasikan berupa pertandingan-pertandingan yang terjadi pada babak gugur.
7. Aras atau tingkat direpresentasikan berupa tingkatan-tingkatan babak dalam fase gugur ini. Untuk babak 16 berada pada tingkat 4, babak 8 besar berada pada tingkat 3, babak 4 besar berada pada tingkat 2, dan babak Final berada pada tingkat 1, serta negara yang menjuarai turnamen berada pada tingkat 0.

Banyaknya pertandingan yang ada dalam babak gugur ini dapat dihitung dengan rumus $2^n - 1$ dengan n menyatakan panjang lintasan dari pohon. Berdasarkan hal ini, maka jumlah pertandingan pada babak gugur ini seharusnya ada sebanyak $2^4 - 1 = 15$ pertandingan. Akan tetapi, karena ada satu pertandingan khusus untuk memperebutkan juara ketiga, maka total pertandingan ditambah 1 sehingga total keseluruhan pertandingan pada babak gugur Piala Dunia FIFA 2022 menjadi 16 pertandingan.



Gambar 3.9 *Bracket* Babak Gugur Piala Dunia FIFA 2022
(Sumber: Google)

Bracket dalam babak gugur turnamen Piala Dunia FIFA 2022 ternyata memiliki bentuk pohon biner (*binary tree*) dengan representasi bentuknya adalah sebagai berikut:

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa teori graf dan pohon yang ada pada Matematika Diskrit dapat digunakan untuk merepresentasikan sistem pertandingan yang ada pada turnamen Piala Dunia FIFA 2022, baik untuk babak penyisihan grup (*Group Stage*), maupun untuk babak gugur (*Knock-Out*).

Untuk babak grup, sistem pertandingan dan penentuan klasemen akhir pada grup dapat direpresentasikan dalam bentuk graf. Selain itu, jumlah pertandingan yang ada dalam babak penyisihan grup juga dapat dicari dan didapatkan total pertandingan pada babak ini adalah sebanyak 48 pertandingan.

Sedangkan, untuk sistem pertandingan yang ada pada babak gugur, sistemnya dapat direpresentasikan dalam bentuk pohon biner (*binary tree*) dengan jumlah pertandingan yang ada pada babak gugur juga bisa dicari dan didapatkan total pertandingan pada babak ini adalah sebanyak 16 pertandingan.

Berdasarkan hasil analisa ini, maka didapat juga total pertandingan keseluruhan yang ada pada turnamen Piala Dunia FIFA 2022 adalah sebanyak 64 pertandingan.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmatnya, penulis dapat menyelesaikan makalah ini. Penulis juga menyampaikan terima kasih kepada keluarga dan teman-teman yang telah membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam proses pembuatan makalah ini. Tidak lupa juga, penulis menyampaikan terima kasih terhadap Bapak dan Ibu dosen pengampu mata kuliah Matematika Diskrit yang senantiasa membimbing dan mendidik dalam mata kuliah ini. Terakhir, penulis juga meminta maaf jika makalah yang ada masih terdapat kesalahan dan belum sempurna.

REFERENSI

- [1] R. Munir. *Graf (Bagian 1)*: “Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit.” Bandung, Indonesia, 2022. Diakses pada 6 Desember 2022.
- [2] Geeksforgeeks, “In a weighted graph, Is zero allowed as an edge’s weight?”, <https://www.geeksforgeeks.org/in-a-weighted-graph-is-zero-allowed-as-an-edges-weight/#discuss>, 2021. Diakses pada 6 Desember 2022.
- [3] R. Munir. *Pohon (Bagian 1)*: “Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit.” Bandung, Indonesia, 2022. Diakses pada 6 Desember 2022.
- [4] R. Munir. *Pohon (Bagian 2)*: “Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit.” Bandung, Indonesia, 2022. Diakses pada 6 Desember 2022.
- [5] FIFA. <https://www.fifa.com/fifaplus/en/tournaments/mens/worldcup/qatar2022>, 2022. Diakses pada 8 Desember 2022.
- [6] P. Lavender, “Yuk, Kenalan dengan Sistem Pertandingan di FIFA World Cup”, <https://mediaindonesia.com/sepak-bola/483883/yuk-kenalan-dengan-sistem-pertandingan-di-fifa-world-cup>, 2022. Diakses pada 9 Desember 2022.
- [7] M. J. Adhikresna, “Apa yang Dimaksud dengan Turnamen Round-Robin?”, <https://www.kompas.com/sports/read/2021/05/19/23000048/apa-yang-dimaksud-dengan-turamen-round-robin-?page=all>, 2021. Diakses pada 9 Desember 2022.
- [8] A. Joseph, “2022 FIFA World Cup: What are the tiebreaker rules for the group stage?”, <https://ftw.usatoday.com/lists/2022-fifa-world-cup-tiebreaker-group-stage-qatar>, 2022. Diakses pada 9 Desember 2022.
- [9] F. Firdaus, “Bracket 16 Besar Piala Dunia 2022 Sampai Final: Siapa Juara?”, <https://tirto.id/bracket-16-besar-piala-dunia-2022-sampai-final-siapa-juara-gznA>, 2022. Diakses pada 9 Desember 2022.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2022



Jason Rivalino (13521008)