Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Kuis 3 Matematika Diskrit

Kamis, 4 November 2021

Waktu: 50 menit

1. Tentukan bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi kondisi berikut: Jika dibagi 5 bersisa 3, jika dibagi 7 bersisa 2, dan jika dibagi 3 bersisa 1.

Jawaban:

Solusi umum untuk sistem kekongruenan linier adalah:

Dari soal, didapatkan:

$a_1 = 3$; $M_1 = 7 \bullet 3 = 21$
$a_2 = 2$; $M_2 = 5 \bullet 3 = 15$
$a_3 = 1$; $M_3 = 5 \bullet 7 = 35$

$y_1 = 1$ karena $21 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 5$
$y_2 = 1$ karena $15 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 7$
$y_3 = 2$ karena $35 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$

$m = 5 \bullet 7 \bullet 3 = 105$

Maka, solusi unik dari sistem kekongruenan tersebut adalah

$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3$
$x = 3 \bullet 21 \bullet 1 + 2 \bullet 15 \bullet 1 + 1 \bullet 35 \bullet 2$
$x = 163$
$x \equiv 58 \pmod{105}$

2. Suku X mengatakan bahwa pada tahun 2^{1952} dunia akan kiamat. Menanggapi pernyataan tersebut, ahli teologi mengatakan bahwa di atas 100000 tahun masehi, memang terdapat kemungkinan bahwa dunia akan kiamat apabila tahun tersebut habis dibagi 79, namun tidak terdapat kemungkinan kiamat di luar tahun dengan spesifikasi tersebut. Apakah pernyataan suku X memiliki kemungkinan benar menurut para ahli teologi?

Jawaban:

Dengan menggunakan teorema Fermat:

$$2^{79-1} = 2^{78} \equiv 1 \pmod{79}$$

$$2^{1952} \equiv (2^{78 * 25 + 2}) \pmod{79}$$

$$2^{1952} \equiv (2^{78})^{25} * 2^2 \pmod{79}$$

$$2^{1952} \equiv (1)^{25} * 2^2 \pmod{79}$$

$$2^{1952} \equiv 4 \pmod{79} = 4$$

Karena sisa baginya 4 ≠ 0, maka pernyataan suku tidak memiliki kemungkinan benar menurut para ahli teologi

3. Dalam rangka mata kuliah olahraga, seluruh mahasiswa Universitas Sukamatdis dari K02 mata kuliah olahraga diminta untuk membentuk 7 barisan. Barisan ini dinomori dari nomor 1 sampai 7 (**Perhatikan**: nomor urut dimulai dari 1, bukan dari 0). Barisan yang dimasuki oleh seorang mahasiswa ditentukan dengan sebuah fungsi hash. Fungsi hash tersebut menentukan nomor barisan yang dimasuki tiap mahasiswa berdasarkan 3 angka terakhir dari NIM mahasiswa tersebut.

   a. Tentukan fungsi hash(h) untuk penentuan barisan yang dimasuki setiap mahasiswa.

   b. Misalkan setiap barisan hanya boleh diisi oleh 2 mahasiswa saja, tentukan barisan yang ditempati mahasiswa-mahasiswa yang memasuki barisan secara berturut-turut dengan NIM 13519096, 13217031, 16519011, 18218157, 10818013, 10517112, 10219024, 13816194, 16219242. Asumsi barisan kosong dan jika barisan sudah penuh, mahasiswa memasuki barisan setelahnya.

Jawaban:

a. Terdapat 7 barisan dengan penomoran 1 sampai 7. Maka fungsi hash yang didapat adalah h = (x mod 7) + 1, dengan x berupa nomor barisan.
b.
13519096 -> 3 angka terakhir = 96 -> (96 mod 7) + 1 = 6
13217031 -> 3 angka terakhir = 31 -> (31 mod 7) + 1 = 4
16519011 -> 3 angka terakhir = 11 -> (11 mod 7) + 1 = 5
18218157 -> 3 angka terakhir = 157 -> (157 mod 7) + 1 = 4
10818013 -> 3 angka terakhir = 13 -> (13 mod 7) + 1 = 7
10517112 -> 3 angka terakhir = 112 -> (112 mod 7) + 1 = 1
10219024 -> 3 angka terakhir = 24 -> (24 mod 7) + 1 = 4, namun barisan 4 sudah penuh maka memasuki barisan selanjutnya yaitu barisan 5.
13816194 -> 3 angka terakhir = 194 -> (194 mod 7) + 1 = 6

16219242 -> 3 angka terakhir = 242 -> (242 mod 7) + 1 = 5, namun barisan 5 sudah penuh, barisan selanjutnya yaitu barisan 6 juga sudah penuh, maka memasuki barisan selanjutnya yaitu barisan 7.

4. Tentukan banyaknya cara mengacak kata SURABAYA jika harus diawali huruf mati (huruf konsonan).

Jawaban:

Banyaknya huruf mati pada kata SURABAYA adalah 4.

Banyaknya cara: 4*7!/3! = 4*840 = 3360

Jadi, ada 3360 cara mengacak kata SURABAYA jika harus diawali huruf mati.

5. Berapa banyak solusi bilangan bulat dari x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 27 jika 1 < x1 ≤ 5, dan x4 ≥ 17?

Jawaban:

Sisihkan terlebih dahulu 17 dari x4 sehingga pertanyaan menjadi
x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 27-17 = 10, dengan 1 < x1 ≤ 5
Tinjau untuk setiap kasus x1
Kasus x1 = 2
Sisihkan 2 dari x1 terlebih dahulu
r = 10 – 2 = 8
n = x2, x3, x4, x5 = 4
C(n + r - 1, r) = C(11, 8) = 165
Kasus x1 = 3
Sisihkan 3 dari x1 terlebih dahulu
r = 10 – 3 = 7
n = x2, x3, x4, x5 = 4
C(10, 7) = 120
Kasus x1 = 4
Sisihkan 4 dari x1 terlebih dahulu
r = 10 – 4 = 6
n = x2, x3, x4, x5 = 4
C(9, 6) = 84
Kasus x1 = 5
Sisihkan 5 dari x1 terlebih dahulu
r = 10 – 5 = 5
n = x2, x3, x4, x5 = 4
C(8, 5) = 56
Maka didapat hasil berupa 165 + 120 + 84 + 56 = 425 buah solusi.

6. Berapa banyak kata baru yang dapat dibentuk dari “HIGHLIGHT”:
   a) semua huruf dipakai

   b) tidak ada huruf ‘I’ yang berurutan

Jawaban:

a.) $P(9;3,2,2) = \frac{9!}{3!.2!.2!} = 15120\ kata$

b.)

- Pertama hilangkan semua huruf ‘I’ dari kata tersebut menjadi “HGHLGHT”, dengan banyak kata baru yang dapat disusun

$$P(7;3,2) = \frac{7!}{3!.2!} = 420\ kata$$

- Siapkan tempat kosong diantara setiap huruf untuk menaruh salah satu dari kedua huruf ‘I’ menjadi _H_G_H_L_G_H_T_. Maka ada 8 tempat kosong untuk menaruh 2 huruf ‘I’, jadi banyak pilihan untuk menaruh huruf ‘I’,

$$C(8;2) = \frac{8!}{2!.6!} = 28$$

Jadi banyaknya kata baru yang dapat dibentuk dengan tidak ada ‘I’ yang berurutan adalah

$$420\ x\ 28 = 11760\ kata$$