

Solusi Kuis 2 Matematika Diskrit

Kamis, 7 Oktober 2021

Waktu: 50 menit

1. Alexander adalah seorang petani buah di desa Sukasehat. Dia memiliki sangat banyak buah apel dan mangga dari kebun buahnya. Karena terlilit hutang, Alexander kehilangan tokonya dan seluruh uangnya sehingga ia hanya memiliki buah-buahan hasil kebunnya. Karena kehilangan toko, ia pun tidak bisa menjual buah-buahnya untuk mendapatkan uang yang ia butuhkan untuk membeli kebutuhan sehari-hari. Untungnya, desa Sukasehat menerima pembelian barang melalui barter barang. Sebuah apel dinilai berharga 7 dolar Sukasehat per buahnya dan sebuah mangga dinilai berharga 8 dolar Sukasehat per buahnya. Jika semua barang harganya berupa bilangan bulat dalam satuan dolar Sukasehat, buktikan bahwa Alexander selalu dapat membeli semua barang berharga n ($n \geq 42$ dolar Sukasehat) melalui barter dengan buah-buah apel dan mangganya.

Jawaban:

- Basis Induksi: Untuk membeli barang seharga 42 dolar, dapat dibarter dengan enam buah apel seharga 7 dolar. Maka $p(42)$ benar
- Langkah Induksi: Andai $p(n)$ benar maka butuh untuk menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu untuk membeli barang seharga $n+1$ dapat dilakukan melalui barter apel dan mangga. Perlu memeriksa dua kemungkinan:
 - Kemungkinan pertama, misalkan dibeli sebuah barang berharga n dengan sedikitnya satu buah apel berharga 7 dolar. Dengan mengganti satu buah apel ini dengan satu buah mangga yang berharga 8 dolar, diperoleh susunan buah senilai $n+1$ dolar.
 - Kemungkinan kedua, misalkan dibeli sebuah barang berharga n dengan tidak ada buah apel yang dibarterkan sehingga harus menggunakan buah mangga saja. Karena $n \geq 42$, maka dibutuhkan sedikitnya 6 buah mangga dengan total harga 48 dolar untuk membelinya, 6 buah mangga ini dapat diganti dengan 7 buah apel seharga 49 dolar sehingga diperoleh susunan buah senilai $n+1$ dolar.

Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar.

2. Ibu Miranda menyebarkan suatu spesies jamur invasive bernama *Megamycete* pada suatu desa di Eropa. Spesies jamur ini menginfeksi manusia-manusia yang ada di desa tersebut dan membuat mereka bermutasi menjadi monster yang dapat menginfeksi

manusia lainnya. *Megamycete* terus menyebar dengan banyaknya orang yang tertular bertambah sebesar 25% setiap bulannya. Jika pada awalnya Ibu Miranda menginfeksi 300 orang, maka tentukanlah

- Relasi rekursif P_n yang merepresentasikan banyaknya orang yang terinfeksi *Megamycete* pada bulan ke- n .
- Solusi dari P_n dengan metode pemecahan relasi rekures homogen linier.
- Berapa banyak orang yang terinfeksi *Megamycete* pada bulan ke-5? Gunakan pembulatan ke atas jika dibutuhkan.

Jawaban:

a.

$$P_n = \begin{cases} 300, & n = 0 \\ P_{n-1} + 0.25P_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

b.

$$P_n = P_{n-1} + 0.25P_{n-1} = 1.25P_{n-1}$$

Persamaan karakteristik: $r - 1.25 = 0$

Didapat $r = 1.25$

$$P_n = \alpha_1 r_1^n$$

$$P_n = \alpha_1 1.25^n$$

$$P_0 = \alpha_1 1.25^0 = 300$$

$$\alpha_1 = 300$$

$$\text{Maka, } P_n = 300(1.25)^n$$

c.

$$P_5 = 300(1.25)^5 = 915.5, \text{ dibulatkan ke atas menjadi } 916 \text{ orang.}$$

3. Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = x'y + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS

Jawaban:

a. SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama

$$\begin{aligned} x'y &= x'y(z + z') \\ &= x'yz + x'yz' \end{aligned}$$

$$y'z = y'z (x+x')$$

$$= xy'z + x'y'z$$

Sehingga $f(x,y,z) = x'yz + x' yz' + xy'z + x'y'z$

atau $f(x,y,z) = m_3 + m_2 + m_5 + m_1 = \Sigma(1,2,3,5)$

b. POS

Dari jawaban yang diperoleh melalui langkah (a) dan menggunakan konversi antar kanonik menggunakan hukum De Morgan, maka

$$f(x,y,z) = (f'(x,y,z))'$$

$$f(x,y,z) = (0,4,6,7) = (x+y+z)(x'+y+z)(x'+y'+z)(x'+y'+z')$$

4. Rancanglah sebuah rangkaian logika yang dapat menentukan apakah sebuah angka desimal di bawah 10 yang direpresentasikan oleh 4-bit biner merupakan kelipatan 3 atau bukan!

Jawaban:

Angka desimal direpresentasikan dalam 4-bit biner (misalnya w, x, y, z)

Fungsi $f(w, x, y, z)$ bernilai 1 jika representasi angka desimal dari 4-bit biner tersebut merupakan faktor dari 3, dan bernilai 0 jika bukan.

Tabel kebenaran :

w	x	y	z	Desimal	$f(w, x, y, z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	2	0

0	0	1	1	3	1
0	1	0	0	4	0
0	1	0	1	5	0
0	1	1	0	6	1
0	1	1	1	7	0
1	0	0	0	8	0
1	0	0	1	9	1
1	0	1	0	10	X
1	0	1	1	11	X
1	1	0	0	12	X
1	1	0	1	13	X
1	1	1	0	14	X
1	1	1	1	15	X

Peta Karnaugh :

wx	yz	00	01	11	10
00	0	0	1	0	
01	0	0	0	1	
11	X	X	X	X	
10	0	1	X	X	

$$f(w, x, y, z) = wz + x'yz + xyz'$$

Rangkaian Logika :

