Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Kuis 1 Matematika Diskrit

Kamis, 16 September 2021

Waktu: 55 menit

1. Misalkan X dan Z merupakan himpunan pada universal U yang tidak terukur besarnya (banyaknya anggota U tidak terhingga), dengan anggota masing himpunan berbeda (X dan Z saling lepas). Urutkan kardinalitas di bawah ini secara terurut membesar (dari kecil ke besar)!

   | P(X ∩ Z) |

   | X - Z |

   | X ⊕ Z |

   | X ∩ Z |

   | P(X) ∪ P(Z) |

   | $\overline{P(X) \cup P(Z)}$ |

   (15)

   Jawaban:

   | X ∩ Z |, | P(X ∩ Z) |, | X - Z |, | X ⊕ Z |, | P(X) U P(Z) |, | $\underline{P(X)\ U\ P(Z)}$ |

   Penjelasan:

   | X ∩ Z | = 0, karena saling lepas

   | P(X ∩ Z) | = 1, karena saling lepas dan P(Ø) = {Ø}

   | X - Z | = |X|

   | X ⊕ Z | = |X + Z| atau |X U Z|

   | P(X) U P(Z) | = $2^{|X|} + 2^{|Z|}$

   | $\underline{P(X)\ U\ P(Z)}$ | = ∞ - $2^{|X|} + 2^{|Z|}$ = ∞

2. Misalkan A dan B adalah sebuah himpunan, buktikanlah persamaan berikut dengan menggunakan hukum-hukum himpunan dan sebutkan hukum yang dipakai.

$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$ (15)

<u>Jawaban</u>:

$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)$ (definisi selisih)

$= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A^c) \cup A) \cap ((B \cap A^c) \cup B)$ (hukum distributif)

$= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A^c) \cup A) \cap B)$ (hukum absorpsi)

$= (A \cap B^c) \cup (((B \cap A) \cup (A^c \cap A)) \cap B)$ (hukum distributif)

$= (A \cap B^c) \cup (((B \cap A) \cup \emptyset) \cap B)$ (hukum komplemen)

$= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A) \cap B)$ (hukum identitas)

$= (A \cap B^c) \cup (B)$ (hukum absorpsi)

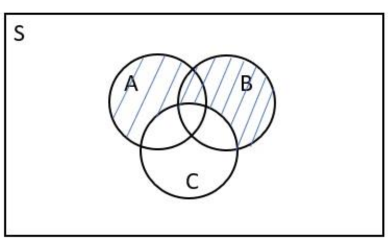
$= (A \cup B) \cap (B^c \cup B)$ (hukum distributif)

$= (A \cup B) \cap U = A \cup B$ (hukum komplemen & identitas)

Terbukti

3. Berapakah banyak bilangan di antara 1-500 (inklusif) yang dapat dibagi 7 atau 5, tetapi tidak dapat dibagi 3? (15)

<u>Jawaban</u>:



Misalkan:

S = himpunan bilangan dari 1 sampai 500

A = himpunan bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 7

B = himpunan bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 5

C = himpunan bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 3

Dari Diagram Venn di atas, banyak bilangan dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 7 atau 5, tetapi tidak habis dibagi oleh 3 didefinisikan sebagai (A U B U C) – C atau yang diarsir biru pada Diagram Venn.

n(A) = Banyak bilangan yang habis dibagi 7 = 500 div 7 =71

n(B) = Banyak bilangan yang habis dibagi 5 = 500 div 5 = 100

n(C) = Banyak bilangan yang habis dibagi 3 = 500 div 3 = 166

$n(A \cap B)$ = Banyak bilangan yang habis dibagi 7 dan 5 = 500 div 35 = 14

$n(B \cap C)$ = Banyak bilangan yang habis dibagi 5 dan 3 = 500 div 15 = 33

$n(A \cap C)$ = Banyak bilangan yang habis dibagi 7 dan 3 = 500 div 21 = 23

$n(A \cap B \cap C)$ = Banyak bilangan yang habis dibagi 7, 5, dan 3 = 500 div 105 =4

Dengan prinsip eksklusi-inklusi dalam perhitungan A U B U C, maka

$n((A \cup B \cup C)) – n(C) \quad = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) - n(C)$

= 71 + 100 + 166 - 14 - 33 - 23 + 4 - 166

= 105 bilangan

4. Tentukanlah apakah relasi $R = \{(x,y) \mid x^3 = y, x \in Z, y \in Z \}$ bersifat refleksif/tidak, menghantar/tidak, setangkup/tidak, atau tolak setangkup/tidak? (15)

   Jawaban:

   Tidak refleksif, karena tidak ada (2,2), (3,3), dan seterusnya

   Tidak menghantar, karena jika $x^3 = y$, lalu selanjutnya terdapat $y^3 = z$, maka tidak mungkin ada $x^3 = z$

   Tidak setangkup, karena ada (2,8) namun tidak ada (8,2)

   Tolak setangkup, karena jika $x^3 = y$, tidak ada $y^3 = x$

5. Buatlah klosur refleksif, klosur setangkup, dan klosur menghantar dari relasi R = {(1,2), (2,1), (2, 3), (3,3)} pada himpunan S = {1,2,3}. (20)

   Jawaban:

   Klosur refleksif

   Klosur refleksif dari R adalah $R \cup \Delta$

$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$

$\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$R \cup \Delta = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3,3)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$R \cup \Delta = \{(1, 1), (1,2), (2,1), (2, 2), (2, 3), (3,3)\}$

Klosur setangkup

Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$

$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$

$R^{-1} = \{(2, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 3)\}$

$R \cup R^{-1} = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3,3)\} \cup \{(2, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 3)\}$

$R \cup R^{-1} = \{(1,2), (2,1), (2, 3), (3, 2), (3,3)\}$

Klosur menghantar

Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Klosur menghantar dari R adalah $R^* = R \cup R2 \cup R3$

Matriks klosur menghantar R^* adalah $M_{R^*} = M_R \vee M_{R2} \vee M_{R3}$

Dicari dahulu nilai M_{R2} dan M_{R3}

$$M_R{}^2 = M_R . M_R$$

$$M_R{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R{}^3 = M_R{}^2 . M_R$$

$$M_R{}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks klosur menghantar, didapatkan klosur menghantar dari R yaitu R* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}

6. Tentukan sifat dari fungsi f(x) f(x) = $|x^2 + x + 1|$, f: **R** → **R** (injektif, surjektif, bijektif, tidak ketiganya), balikan dari fungsinya jika ada, dan hasil komposisi fungsi (f o g)(x) dengan g(x)= x - 2 dalam bentuk paling sederhana. (20)

<u>Jawaban</u>:

f(x) = $|x^2 + x + 1|$, f: **R** ⟶ **R**

i. Tidak ketiganya
   1. Tidak injektif, karena ada nilai x yang memiliki bayangan yang sama karena f(x) fungsi parabola.
   2. Tidak surjektif, karena tidak semua bilangan real merupakan jelajah dari f(x), contoh tidak ada f(x) yang menghasilkan nilai -1.
   3. Tidak bijektif, karena tidak injektif dan tidak surjektif.

ii. Tidak ada balikan karena fungsi tidak bijektif.

iii. (f o g)(x) = $|(x-2)^2 + (x-2) + 1| = |x^2 - 3x + 3|$