

Penerapan Teori Graf dalam Keamanan Jaringan dengan Cara Meminimalisir Tingkat Interferensi

Hansel Valentino Tanoto - 13520046¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹13520046@std.stei.itb.ac.id

Abstract—Kehidupan manusia saat ini hampir tidak terlepas dari *gadget*. Untuk mendukung mobilitas manusia yang cukup besar, maka tercipta perangkat komunikasi bergerak (*mobile device*) yang dapat digunakan dan dibawa ke manapun. Perangkat tersebut tentunya bekerja dengan menggunakan jaringan seluler. Dalam jaringan seluler, keamanan merupakan salah satu bagian penting yang perlu diperhatikan. Interferensi sinyal merupakan salah satu faktor yang berakibat dengan keamanan jaringan tersebut dan dalam makalah ini akan dibahas lebih lanjut mengenai pemodelan keamanan jaringan seluler sebagai suatu *graph coloring problem* guna mengurangi interferensi jaringan.

Kata kunci—Graf, Keamanan Jaringan Seluler, Pewarnaan Graf, Interferensi.

I. PENDAHULUAN

Pada zaman yang modern ini, teknologi telah berkembang dengan sangat cepat, terutama dalam teknologi komunikasi dan informasi. Saat ini, kehidupan hampir seluruh lapisan masyarakat tidak terlepas dari perangkat komunikasi bergerak (*mobile device*) yang memanfaatkan jaringan seluler. Perkembangan teknologi ini tentu memberikan banyak kemudahan bagi manusia dalam menjalankan kesehariannya. Segala informasi bisa diperoleh oleh semua orang kapanpun dan di mana pun dengan mudah dan cepat hanya dengan menggunakan gawai masing-masing.

Seiring berkembangnya teknologi tersebut, faktor keamanan jaringan, menjadi hal yang sangat penting untuk diperhatikan dan dikembangkan karena di balik kemudahan dan kenyamanan yang ditawarkan, dapat tersimpan banyak ancaman yang mengintai. Salah satu faktor yang dapat mempengaruhi keamanan jaringan adalah tingkat interferensi.

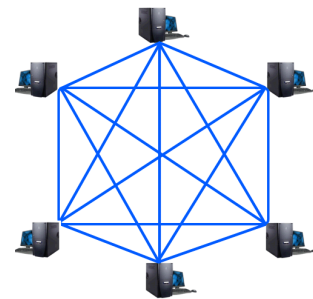
Pada makalah ini akan dibahas mengenai pemodelan keamanan jaringan sebagai suatu permasalahan pewarnaan graf (*Graph Coloring Problem*).

II. TEORI GRAF

A. Definisi Graf

Graf merupakan sebuah struktur diskrit yang terdiri atas simpul-simpul (*vertex*) yang dihubungkan dengan sisi-sisi (*edge*) yang masing-masing menggambarkan adanya hubungan antara sepasang simpul (Kenneth H. Rosen, 2019: 673). Graf

dapat dinyatakan dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V merupakan himpunan yang tidak kosong dari simpul-simpul dan E merupakan himpunan dari sisi-sisi pada graf tersebut. Graf pertama kali diterapkan oleh matematikawan Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736 untuk memodelkan persoalan 7 Jembatan Königsberg. Teori Graf pun akhirnya berkembang hingga saat ini dan banyak diterapkan di berbagai bidang untuk memodelkan dan menyederhanakan suatu persoalan. Misalnya, jaringan dapat dimodelkan sebagai sebuah graf dengan node sebagai *vertex* dan adanya *channel* komunikasi atau koneksi antara sepasang *node* digambarkan sebagai *edge*.



Gambar 1. Pemodelan jaringan sebagai sebuah graf
(Sumber: <https://docplayer.info/docs-images/61/45775600/images/5-1.png>)

B. Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf yang dikenal dalam matematika diskrit yaitu:

1. Graf sederhana (*simple graph*)

Graf yang tidak memiliki sisi gelang maupun sisi ganda. Terdapat beberapa graf sederhana khusus (istimewa), yaitu:

a. Graf lengkap (*complete graph*)

Graf yang semua simpulnya saling terhubung satu sama lain.

b. Graf lingkaran (*cycle graph*)

Graf yang semua simpulnya memiliki derajat sebesar 2 sehingga membentuk struktur seperti lingkaran.

c. Graf teratur (*regular graph*)

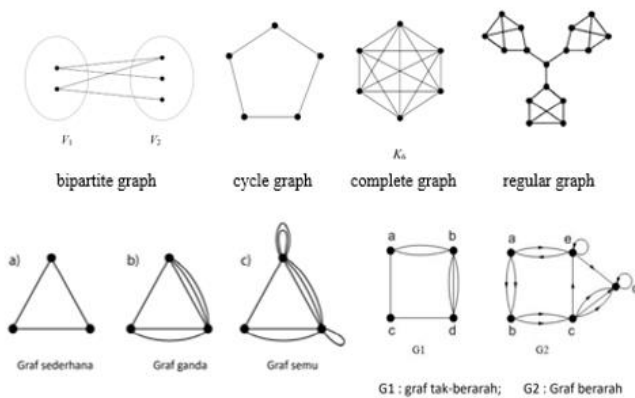
Graf yang semua simpulnya memiliki derajat yang sama.

d. Graf bipartite (*bipartite graph*)

Graf yang simpul-simpulnya dapat dikelompokkan

menjadi 2 bagian sehingga bisa berbentuk seperti relasi.

2. Graf tidak sederhana
 - a. Graf ganda (*multi-graph*)
Graf yang memiliki sisi ganda, yaitu terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua simpul yang sama.
 - b. Graf semu (*pseudo-graph*)
Graf yang memiliki sisi gelang (*loop*), yaitu terdapat sisi yang keluar dan masuk pada satu simpul yang sama.
3. Graf tak berarah (*undirected graph*)
Graf yang sisi-sisinya tidak memiliki arah.
4. Graf berarah (*directed graph*)
Graf yang sisi-sisinya memiliki arah yang digambarkan dengan panah. Graf berarah juga dapat memiliki atau tidak memiliki sisi ganda dan sisi gelang.



Gambar 2. Jenis-jenis graf
(Sumber:

<https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>)

C. Terminologi Graf

Beberapa istilah (*term*) dasar yang digunakan dalam teori graf yaitu:

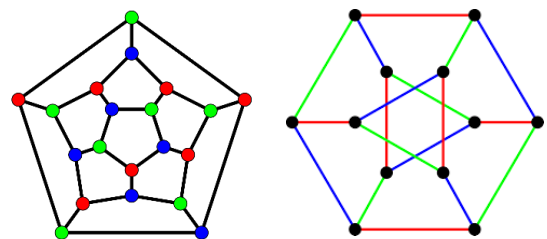
1. Ketetanggaan (*adjacent*)
Tetangga adalah istilah yang digunakan untuk dua buah simpul yang saling terhubung secara langsung dengan satu sisi.
2. Bersisian (*incidency*)
Sebuah sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v dan w jika sisi e menghubungkan v dengan w .
3. Simpul terpencil (*isolated vertex*)
Simpul terpencil adalah simpul yang tidak terhubung dengan simpul manapun atau tidak bersisian dengan sisi.
4. Wilayah / muka (*region / face*)
Wilayah adalah daerah pada graf yang dibatasi oleh sisi-sisi graf tertentu.
5. Graf kosong (*null graph*)
Graf yang hanya memiliki simpul, tanpa adanya sisi.
6. Derajat (*degree*)
Sebuah simpul memiliki derajat n jika ia terhubung (bersisian) dengan n buah sisi. Pada graf berarah, ada 2 macam derajat yaitu derajat masuk dan derajat keluar.
7. Lintasan (*path*)

Lintasan adalah sekuens dari sisi-sisi yang dilewati untuk pergi dari suatu simpul ke simpul lainnya.

8. Sirkuit (*cycle / circuit*)
Sirkuit adalah lintasan yang simpul akhirnya sama dengan simpul awalnya.
9. Keterhubungan (*connected*)
Keterhubungan adalah istilah untuk dua buah simpul terhubung oleh suatu lintasan. Pada graf berarah terdapat istilah terhubung kuat yaitu apabila dua buah simpul terhubung secara bolak-balik dan terhubung lemah yaitu apabila dua buah simpul hanya terhubung dalam satu arah.
10. Upagraf (*subgraph*)
Graf G_1 disebut upagraf dari Graf G jika simpul-simpul dan sisi-sisi graf G_1 merupakan himpunan bagian dari himpunan simpul dan himpunan sisi graf G . Sedangkan, komplemen upagraf adalah hasil pengurangan himpunan sisi dan simpul graf G dengan graf G_1 .
11. Upagraf merentang (*spanning subgraph*)
Upagraf merentang adalah upagraf yang memiliki semua simpul dari graf awalnya.
12. Cut-Set
Cut-set adalah himpunan sisi-sisi dari suatu graf yang jika dihapus, akan membuat graf tersebut menjadi tidak terhubung.
13. Graf berbobot (*weighted graph*)
Graf yang sisi-sisinya memiliki nilai atau bobot tertentu.

D. Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf (*graph coloring*) adalah suatu metode untuk melakukan pewarnaan pada elemen graf yaitu simpul (*vertex*), sisi (*edge*), atau wilayah (*face / region*). Pewarnaan sisi adalah proses memberikan warna pada sisi-sisi dari graf sehingga setiap simpul pada graf tidak bersisian (*incident*) dengan dua sisi berwarna sama. Pewarnaan sisi adalah proses memberikan warna pada wilayah-wilayah graf sehingga setiap wilayah yang bersinggungan tidak memiliki warna yang sama. Pewarnaan simpul adalah proses memberi warna pada simpul-simpul graf dengan syarat dua buah simpul yang bertetangga (*adjacent*) tidak memiliki warna yang sama. Dalam makalah ini, pewarnaan graf yang akan dilakukan adalah pewarnaan simpul.



Gambar 3. Contoh pewarnaan simpul (kiri) dan sisi (kanan)
(Sumber:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2c/01_Dodecahedral_graph_vertex_coloring.svg/1200px-01_Dodecahedral_graph_vertex_coloring.svg.png)

Banyaknya jenis warna yang digunakan dalam pewarnaan graf direpresentasikan sebagai bilangan kromatik yang diberi lambang $\chi(G)$. Terdapat beberapa graf yang bilangan

kromatiknya dapat ditentukan secara langsung, yaitu:

1. Graf kosong (*null graph*) akan memiliki bilangan kromatik bernilai 1 karena semua simpulnya tidak ada yang bertetangga.
2. Graf lingkaran (*cycle graph*) akan memiliki bilangan kromatik sebesar 3 jika simpulnya berjumlah ganjil dan sebesar 2 jika jumlah simpulnya genap.
3. Graf lengkap (*complete graph*) akan memiliki bilangan kromatik sebesar jumlah simpulnya karena setiap simpul saling terhubung satu sama lain.
4. Graf bipartite akan memiliki bilangan kromatik sebesar 2 karena simpul-simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua grup.
5. Graf planar (*planar graph*) adalah graf yang dapat digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan atau bersilangan. Graf bidang (*plane graph*) adalah penggambaran graf dalam bentuk planarnya. Berdasarkan *Four Color Theorem* yang dicetuskan Kenneth Appel and Wolfgang Haken pada tahun 1976, graf planar dapat diwarnai hanya dengan empat buah warna berbeda sehingga bilangan kromatiknya adalah 4.

Banyak sekali pemanfaatan pewarnaan graf, seperti untuk penjadwalan, pewarnaan peta, dan pemodelan keamanan jaringan yang akan dibahas lebih lanjut pada makalah ini.

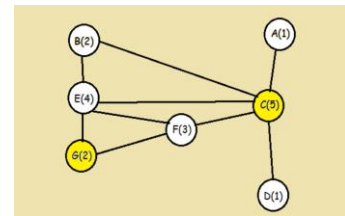
III. ALGORITMA PEWARNAAN SIMPUL GRAF

Terdapat banyak algoritma yang digunakan untuk melakukan pewarnaan simpul graf. Dua buah algoritma yang cukup umum (populer) digunakan adalah sebagai berikut:

1. Algoritma *Welsh Powell*

Algoritma *Welsh Powell* merupakan algoritma pewarnaan simpul graf yang dilakukan berdasarkan derajat simpul tertinggi pada graf atau LDO (*Largest Degree Ordering*). Untuk menggunakan algoritma ini, pertama-tama harus dibuat sebuah *list* yang berisi semua simpul-simpul pada graf yang sudah diurutkan secara menurun (*descending order*) berdasarkan derajatnya. Lalu akan dipilih simpul dengan derajat tertinggi dan warnai dengan satu warna tertentu. Selanjutnya akan dicari simpul-simpul lain yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan simpul tersebut dengan masih memperhitungkan urutan derajatnya, kemudian simpul tersebut akan diberi warna yang sama dengan warna simpul pertama tadi. Setelah itu, lakukan lagi langkah-langkah tersebut untuk simpul berderajat terbesar berikutnya hingga semua simpul sudah diwarnai dan tidak ada simpul yang memiliki warna sama dengan simpul tetangganya. Berikut adalah contoh pewarnaan simpul graf menggunakan algoritma ini:

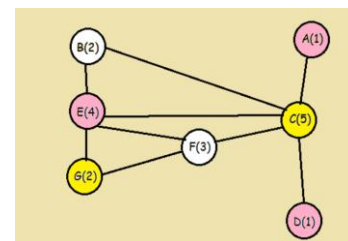
- a. Pada graf di bawah ini, *list* urutan simpulnya adalah $V = \{C, E, F, B, G, A, D\}$. Simpul dengan derajat terbesar adalah C sehingga simpul ini akan diwarnai lebih dulu dan simpul yang bukan tetangganya (simpul G) juga diberikan warna yang sama.



Gambar 4. Pewarnaan graf dengan algoritma *Welsh Powell* (1)

(Sumber: <https://iq.opengenus.org/welsh-powell-algorithm/>)

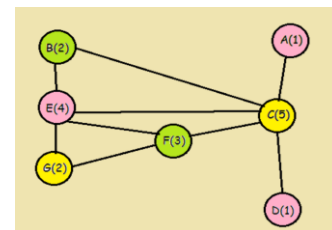
- b. Saat ini list simpul yang belum diwarnai adalah $V = \{E, F, B, A, D\}$. Jadi, simpul berderajat terbesar selanjutnya adalah E sehingga E akan diwarnai dengan warna selanjutnya. Simpul yang tidak bertetangga dengannya, yaitu simpul A dan D, juga diberi warna yang sama dengan simpul E.



Gambar 5. Pewarnaan graf dengan algoritma *Welsh Powell* (2)

(Sumber: <https://iq.opengenus.org/welsh-powell-algorithm/>)

- c. Saat ini simpul yang belum diwarnai adalah $V = \{F, B\}$. Jadi, simpul berderajat terbesar selanjutnya adalah F sehingga simpul F akan diwarnai dengan warna selanjutnya. Simpul yang tidak bertetangga dengannya, yaitu simpul B, juga diberi warna yang sama dengan simpul F.



Gambar 6. Pewarnaan graf dengan algoritma *Welsh Powell* (3)

(Sumber: <https://iq.opengenus.org/welsh-powell-algorithm/>)

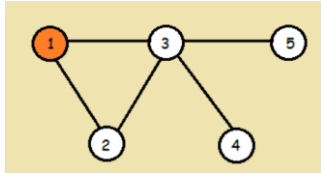
- d. Karena semua simpul sudah diwarnai, algoritma selesai.

2. Algoritma *Greedy*

Algoritma *Greedy* atau biasa disebut juga pewarnaan sekuensial adalah algoritma pewarnaan yang dilakukan dengan memilih pilihan terbaik yang tersedia berdasarkan kondisi saat itu (*First Fit*) sehingga diharapkan pada akhirnya dapat dicapai solusi / pilihan yang terbaik. Pertama-tama akan disiapkan terlebih dahulu sebuah *list* vertex dan sebuah *list* berisi warna yang sudah digunakan. Kemudian akan dipilih satu simpul yang akan diwarnai dan warna tersebut akan ditambahkan ke dalam *list* warna sebagai elemen

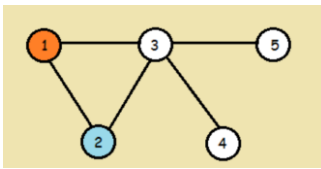
terakhir. Selanjutnya akan dilakukan pewarnaan pada tetangga dari simpul sebelumnya. Pemilihan warna dilakukan berdasarkan urutan dari warna yang terdapat pada list warna dan warna tidak boleh sama dengan warna tetangganya. Langkah-langkah tersebut diulang hingga semua simpul sudah diwarnai. Berikut ini adalah contoh proses pewarnaan simpul graf menggunakan algoritma ini:

- a. Pada graf di bawah ini, himpunan simpulnya adalah $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan pada awalnya himpunan warnanya masih kosong ($C = \{\}$). Pertama-tama, akan simpul 1 akan diwarnai, misalnya dengan warna oranye.



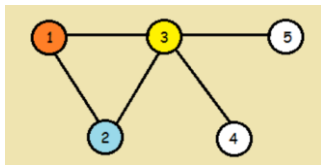
Gambar 7. Pewarnaan graf dengan algoritma *Grredy* (1)
(Sumber: <https://iq.opengenus.org/graph-colouring-greedy-algorithm/>)

- b. Saat ini simpul yang belum diwarnai adalah $V = \{2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan warnanya adalah $C = \{\text{oranye}\}$. Selanjutnya simpul 2 akan diwarnai, awalnya warna akan dipilih dari warna yang tersedia pada himpunan C. Namun, karena simpul 2 memiliki tetangga yang sudah berwarna oranye (simpul 1), maka akan dicari warna yang lain, misalnya biru.



Gambar 8. Pewarnaan graf dengan algoritma *Grredy* (2)
(Sumber: <https://iq.opengenus.org/graph-colouring-greedy-algorithm/>)

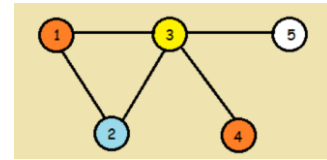
- c. Saat ini simpul yang belum diwarnai adalah $V = \{3, 4, 5\}$ dan himpunan warnanya adalah $C = \{\text{oranye}, \text{biru}\}$. Selanjutnya simpul 3 akan diwarnai, awalnya warna akan dipilih dari warna yang tersedia pada himpunan C. Namun, karena simpul 3 memiliki tetangga yang sudah berwarna oranye (simpul 1) dan biru (simpul 2), maka akan dicari warna yang lain, misalnya kuning.



Gambar 9. Pewarnaan graf dengan algoritma *Grredy* (3)
(Sumber: <https://iq.opengenus.org/graph-colouring-greedy-algorithm/>)

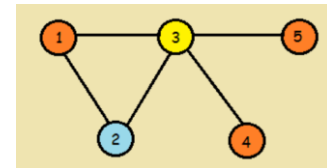
- d. Saat ini simpul yang belum diwarnai adalah $V = \{4, 5\}$ dan himpunan warnanya adalah $C = \{\text{oranye}, \text{biru}, \text{kuning}\}$. Selanjutnya simpul 4 akan diwarnai dan warnanya akan dipilih dari warna yang tersedia pada himpunan C. Warna pertama pada himpunan C

adalah oranye dan simpul 4 tidak memiliki tetangga berwarna itu sehingga simpul 4 bisa diberi warna oranye.



Gambar 10. Pewarnaan graf dengan algoritma *Grredy*(4)
(Sumber: <https://iq.opengenus.org/graph-colouring-greedy-algorithm/>)

- e. Saat ini simpul yang belum diwarnai adalah $V = \{5\}$ dan himpunan warnanya adalah $C = \{\text{oranye}, \text{biru}, \text{kuning}\}$. Selanjutnya simpul 5 akan diwarnai dan warnanya akan dipilih dari warna yang tersedia pada himpunan C. Warna pertama pada himpunan C adalah oranye dan simpul 5 tidak memiliki tetangga berwarna itu sehingga simpul 5 bisa diberi warna oranye juga.



Gambar 11. Pewarnaan graf dengan algoritma *Grredy*(5)
(Sumber: <https://iq.opengenus.org/graph-colouring-greedy-algorithm/>)

- f. Karena semua simpul sudah diwarnai, algoritma selesai.

Algoritma *Welsh Powell* pada *worst case scenario* memiliki kompleksitas waktu $O(V^2)$ sedangkan algoritma *Greedy* pada *worst case scenario* memiliki kompleksitas waktu $O(V^2+E)$ dengan V adalah jumlah simpul (*vertex*) dan E adalah jumlah sisi (*edge*). Jadi, dapat dikatakan algoritma *Welsh Powell* lebih efisien dibandingkan dengan algoritma *Greedy*. Selain itu, algoritma *Greedy* juga tidak menjamin akan dihasilkan bilangan kromatik yang minimum karena urutan pemilihan simpul akan berpengaruh terhadap bilangan kromatik tersebut.

IV. JARINGAN SELULER

A. Definisi GSM

GSM (*Global System for Mobile Communications*) adalah suatu standar internasional untuk sistem teknologi komunikasi seluler yang bersifat digital. Pembentukan GSM dipelopori oleh negara-negara di Eropa pada tahun 1980-an dikarenakan sistem komunikasi seluler yang beroperasi di sana pada masa itu masih bersifat analog dan jenis teknologinya terbatas dalam lingkup regional untuk tiap negara sehingga masih terdapat isu kompatibilitas saat digunakan antar negara. Oleh karenanya, setelah melalui proses penelitian yang panjang, akhirnya pada tahun 1992, GSM mulai diterapkan secara komersil untuk menggantikan teknologi sebelumnya dimulai dari negara-negara Eropa, lalu mulai menyebar dan diadopsi oleh negara-negara lain sehingga menjadi teknologi seluler yang paling banyak digunakan oleh orang-orang di seluruh dunia. Seiring kemajuan zaman, teknologi ini pun juga mengalami perkembangan dan

penyempurnaan, terutama dalam hal kecepatan transfer data yaitu mulai dari generasi awal (2G), 3G, 4G, hingga 5G yang saat ini sudah mulai digunakan di beberapa negara di dunia. Teknologi GSM digunakan pada alat komunikasi bergerak (*mobile device*) yang dapat dibawa kemana-mana seperti telepon seluler (ponsel), laptop, dan lain-lain dengan memanfaatkan gelombang mikro sebagai medium pengiriman sinyal.

B. Arsitektur Jaringan GSM

Secara umum, arsitektur jaringan GSM dapat dibagi menjadi empat yaitu:

1. Mobile Station

Mobile Station (MS) merupakan perangkat yang digunakan oleh pelanggan, misalnya telepon seluler (ponsel) yang berfungsi sebagai penerima dan pengirim sinyal (transceiver) untuk berkomunikasi dengan perangkat GSM atau MS lainnya. Setiap perangkat MS akan terhubung dengan BTS pada area yang sedang ditempati saat itu. Jadi, ketika suatu perangkat keluar dari jangkauan suatu BTS, perangkat tersebut akan direkoneksi ke BTS lain di lokasinya sekarang. Setiap ponsel yang menggunakan teknologi GSM akan dilengkapi dengan *Subscriber Identity Module Card* atau biasa dikenal dengan *SIM Card* yang berfungsi untuk:

- Mengidentifikasi pelanggan melalui data IMSI (*International Mobile Subscriber Identity*) yang tersimpan di dalam *SIM Card*.
- Melakukan otentikasi untuk menandakan pelanggan yang sah dan berhak masuk ke dalam jaringan untuk menggunakan layanan yang tersedia.
- Menyimpan data nomor telepon dan SMS.

2. Base Station System

Base Station System (BSS) dapat dibagi lagi menjadi 2, yaitu *Base Transceiver Station* (BTS) dan *Base Station Controller* (BSC). BTS adalah arsitektur GSM yang berfungsi untuk mengirim sinyal dari *Mobile Station* (MS) atau dapat disebut *access point* dari MS ke jaringan, sedangkan BSC berfungsi untuk mengatur dan menghubungkan beberapa BTS yang berada dalam lingkungannya dengan MSC (*Mobile Switching Centre*).

3. Network Sub System

Network Sub System (NSS) merupakan kumpulan dari perangkat-perangkat GSM yang berfungsi sebagai switching dan basis data pelanggan. NSS dapat dibagi menjadi 5, yaitu:

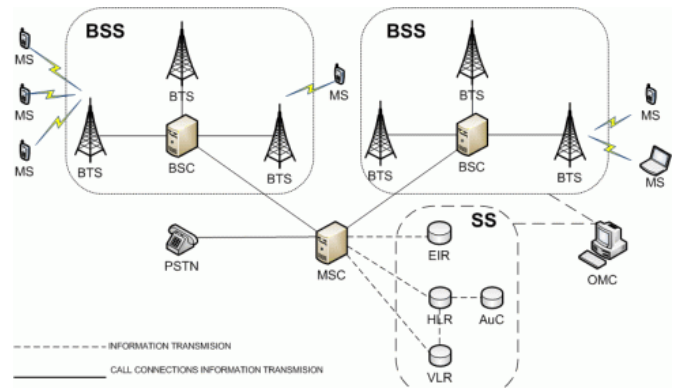
- Mobile Switching Centre* (MSC) yang berfungsi sebagai pusat atau sentral penyambungan antara jaringan seluler, jaringan kabel, maupun jaringan data.
- Home Location Register* (HLR) merupakan basis data yang menyimpan data-data pelanggan yang tetap.
- Visitor Location Register* (VLR) merupakan basis data yang menyimpan data-data sementara dari pelanggan yang tidak terdaftar di MSC pada area tersebut.
- Authentication Centre* (AuC) berfungsi menyimpan

data rahasia dalam bentuk kode untuk memvalidasi pelanggan yang sah dan mencegah pelanggan melakukan tindak kecurangan (ilegal).

e. *Equipment Identity Registration* (EIR) yang berfungsi menyimpan data pelanggan dan memvalidasi IMEI pelanggan.

4. Operation and Support System

Operation and Support System (OSS) berfungsi sebagai pusat pengendalian seperti *fault management*, *performance management*, dan lain-lain.



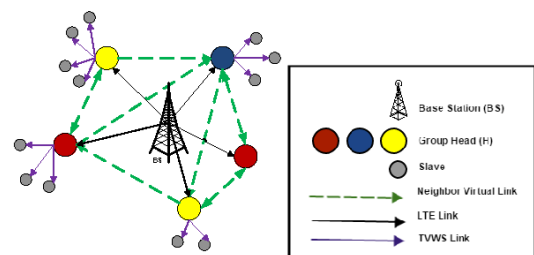
Gambar 12. Arsitektur jaringan GSM

(Sumber:

<https://telecompreneur.files.wordpress.com/2014/03/gprs.gif>)

V. PEMODELAN KEAMANAN JARINGAN SELULER SEBAGAI GRAPH COLORING PROBLEM

Jaringan seluler dapat dimodelkan sebagai graf dengan simpul-simpul (*vertex*) berupa sejumlah BTS pada suatu wilayah dan sisi (*edge*) menandakan dua buah BTS yang area lingkungannya saling beririsan atau bertetangga. Dalam kenyataannya, cukup sulit untuk menentukan posisi dan membangun dua BTS yang area lingkungannya tidak saling beririsan sehingga akan dimungkinkan area lingkup dari dua buah BTS atau lebih saling beririsan. Kedua area yang beririsan tersebut tidak boleh memiliki frekuensi yang sama karena dapat menyebabkan terjadinya interferensi. Interferensi adalah sinyal-sinyal yang saling mempengaruhi dalam suatu frekuensi yang sama sehingga dapat mengubah sinyal atau menghilangkannya akibat interferensi destruktif. Interferensi ini dapat berpengaruh terhadap performa dan keamanan jaringan karena dapat menyebabkan ketersediaan layanan menjadi terbatas dan memudahkan serangan DOS (*Denial of Service*).



Gambar 13. Penerapan pewarnaan graf pada jaringan seluler

(Sumber:

<https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.sema>

nticscholar.org%2Fpaper%2FResource-allocation-using-graph-coloring-for-dense-Basloom-Nazar)

Permasalahan ini dapat dimodelkan sebagai *Graph Coloring Problem* yaitu dengan menganggap warna adalah frekuensi yang digunakan suatu simpul (BTS) dan bilangan kromatik merepresentasikan minimal jumlah frekuensi berbeda yang diperlukan untuk menghindari adanya interferensi. Jadi, dengan menerapkan algoritma pewarnaan simpul graf, interferensi sinyal dapat diminimalisir atau dihindari. Hasil pewarnaan tersebut juga dapat dioptimasi dengan menggunakan algoritma-algoritma pewarnaan graf yang lain sehingga bisa diperoleh bilangan kromatik yang minimum atau dengan kata lain dapat diperoleh *cost* atau biaya yang minimum.

VI. KESIMPULAN

Banyak sekali aplikasi teori graf yang digunakan dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah pemodelan keamanan jaringan seluler sebagai suatu permasalahan pewarnaan graf. Salah satu faktor yang mempengaruhi keamanan jaringan adalah minimnya tingkat interferensi, karena interferensi dapat berpengaruh terhadap performa jaringan. Performa jaringan yang baik dapat meminimalisir tingkat serangan DOS (*Denial of Service*). Dengan menggunakan algoritma pewarnaan graf, dapat diperoleh bilangan kromatik yang merepresentasikan jumlah frekuensi berbeda yang diperlukan untuk mencegah terjadinya interferensi.

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin memanjatkan puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan pembuatan makalah ini. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang sudah membantu penulis dalam menyelesaikan pengerjaan makalah ini. Dimulai dari ucapan terima kasih kepada kedua orang tua yang sudah memberi dukungan baik fisik maupun mental. Kemudian ucapan terima kasih juga diberikan kepada Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir M.T. selaku dosen mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit K-01 atas segala ilmu dan bimbingan yang telah diberikan selama satu semester ini, termasuk kumpulan materi dan makalah yang terdapat pada *website* beliau yang telah menjadi referensi penulis dalam pembuatan makalah ini. Tidak lupa, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada teman-teman yang telah membantu penulis selama forum diskusi. Penulis juga ingin meminta maaf apabila terdapat kekurangan dalam penulisan makalah ini. Semoga isi dari makalah ini dapat bermanfaat dan bisa menambah wawasan pembaca.

REFERENSI

- [1] Rosen, K. H. 2019. *Discrete Mathematics and Its Applications, 8th edition*. New York: McGraw-Hill
- [2] <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf>, diakses pada tanggal 7 Desember 2021

- [3] <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian2.pdf>, diakses pada tanggal 9 Desember 2021
- [4] <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian3.pdf>, diakses pada tanggal 9 Desember 2021
- [5] <https://iq.opengenus.org/welsh-powell-algorithm/>, diakses pada 11 Desember 2021
- [6] <https://iq.opengenus.org/graph-colouring-greedy-algorithm/>, diakses pada 11 Desember 2021
- [7] <https://www.uky.edu/~jclark/mas355/GSM.PDF>, diakses pada 9 Desember 2021.
- [8] Webb, Jonathan and Docemilli, Fernando and Bonin, Mikhail, Graph 2015. *Theory Applications in Network Security*. Dapat diakses pada SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2765453> atau <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2765453>
- [9] Siegmund M. Redl, Matthias K. Weber, Malcolm W. Oliphant. 1995. *An Introduction to GSM*. Artech House.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 14 Desember 2021



Hansel Valentino Tanoto 13520046