

# Aplikasi Pohon Merentang Minimum pada Instalasi Rangkaian Listrik di dalam Rumah

Hafidz Nur Rahman Ghozali - 13520117<sup>1</sup>

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

<sup>1</sup>13520117@std.stei.itb.ac.id

**Abstract**—Saat ini listrik telah menjadi kebutuhan primer bagi manusia. Hampir setiap rumah terdapat jaringan listrik yang terhubung dengan jaringan induk milik PT PLN Indonesia. Rangkaian listrik setiap rumah dapat dimodelkan menjadi graf. Makalah ini membahas mengenai aplikasi graf pada rangkaian listrik di dalam rumah dan penerapan pohon merentang minimum untuk mengoptimalkan instalasi jaringan listrik.

**Keywords**—Graf, Pohon, Rangkaian Listrik, Pohon Merentang Minimum.

## I. PENDAHULUAN

Saat ini listrik telah menjadi kebutuhan primer bagi manusia. Setiap hari, manusia membutuhkan pasokan listrik untuk menunjang kehidupan sehari-hari. Manusia menggunakan energi listrik untuk menghidupkan peralatan listrik seperti lampu, tv, radio, komputer, dll.

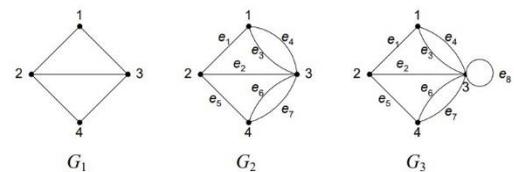
Menurut Kementerian Energi dan Sumber Daya Mineral (ESDM), rasio elektrifikasi atau jumlah rumah tangga yang telah terjangkau dengan jaringan listrik mencapai 99,4% pada Triwulan Ketiga tahun 2021. Jaringan listrik ini bersumber dari berbagai gardu induk milik PT PLN Indonesia. Dari gardu induk/pembangkit, listrik bertegangan tinggi disalurkan melalui kabel hingga ke gardu yang lebih kecil dan berakhir di rumah, kantor, atau lokasi industri.

Jaringan listrik merupakan contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari. Jaringan listrik direpresentasikan dalam bentuk graf  $G$  yang terhubung, tak berarah, dan berbobot. Dalam jaringan listrik dari gardu induk hingga ke rumah, gardu distribusi listrik atau tiang listrik dapat menjadi simpul (*vertex*) dan kabel listrik yang menghubungkannya dianggap sebagai sisi (*edge*). Rangkaian listrik di dalam rumah juga dapat dimodelkan menjadi graf seperti jaringan listrik di luar. Simpul di dalam graf merepresentasikan terminal atau ruangan di dalam rumah, sedangkan sisinya merepresentasikan kabel listrik.

Untuk menghemat biaya instalasi rangkaian listrik, perlu adanya pengoptimalan rangkaian listrik. Pengoptimalan ini dilakukan dengan memanfaatkan konsep Pohon Merentang Minimum (*minimum spanning tree*). Pohon merentang dapat diperoleh dengan menghilangkan sisi yang menimbulkan sirkuit pada graf. Pohon merentang minimum diperoleh dengan mencari pohon merentang yang memiliki bobot paling minimum.

## II. TEORI DASAR

### 1. Graf



Gambar 1.1. Graf

Sumber : Diktat Kuliah Graf (Bag 1)

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan ( $V, E$ ), yaitu:

$V$  = Himpunan tidak kosong dari simpul (*vertices*)

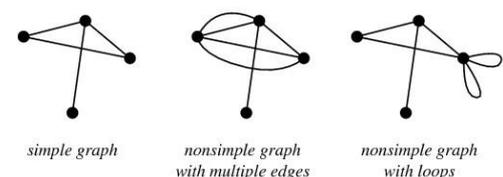
$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$E$  = Himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Berdasarkan keberadaan gelang atau sisi ganda, graf dibedakan menjadi 2 jenis, yaitu

- Graf sederhana (*simple graph*), yaitu graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.
- Graf tak sederhana (*unsimple graph*), yaitu graf yang memiliki gelang atau sisi ganda



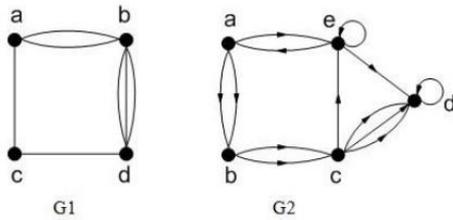
Gambar 1.2. Graf sederhana dan graf tak sederhana

Sumber : Diktat Kuliah Graf (Bag 1)

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dibedakan menjadi 2 jenis, yaitu:

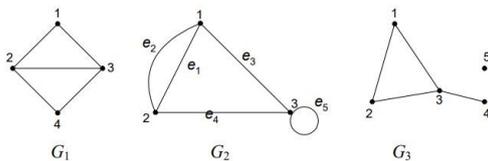
- Graf berarah (*directed graph*), yaitu graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.
- Graf tak-berarah (*undirected graph*), yaitu graf yang setiap sisinya tidak mempunyai

orientasi arah.



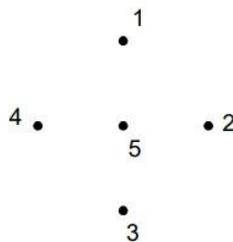
Gambar 1.3. Graf tak berarah dan graf berarah  
Sumber : Diktat Kuliah Graf (Bag 1)

## 2. Terminologi Graf



Gambar 1.4. Contoh graf  
Sumber : Diktat Kuliah Graf (Bag 1)

- Ketetanggaan (Adjacent)**  
Dua buah simpul disebut bertetangga apabila keduanya terhubung secara langsung. Dalam  $G_1$  pada gambar 4, simpul 2 bertetangga dengan simpul 1,3, dan 4.
- Bersisian (Incidency)**  
Sebuah sisi dikatakan bersisian dengan suatu simpul apabila sisi tersebut menghubungkan simpul yang dimaksud dengan simpul lainnya. Dalam graf  $G_2$  pada gambar 4, sisi  $e_3$  bersisian dengan simpul 1 dan 3.
- Simpul Terpencil (Isolated Vertex)**  
Simpul terpencil adalah simpul yang tidak terhubung dengan simpul-simpul lainnya sehingga tidak ada sisi yang bersisian dengannya. Dalam  $G_3$  pada gambar 4, simpul 5 merupakan simpul terpencil.
- Graf Kosong (Null/Empty Graph)**  
Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.

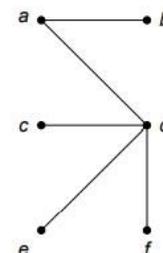


Gambar 1.5. Graf kosong  
Sumber : Diktat Kuliah Graf (Bag 1)

- Derajat (Degree)**  
Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Dalam  $G_1$  pada gambar 3, simpul 2 memiliki derajat 3.
- Lintasan (Path)**  
Lintasan adalah jalur yang terdiri dari sisi-sisi yang berasal dari satu simpul hingga ke simpul tujuan. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang dilewati lintasan tersebut.
- Siklus (Cycle) atau Sirkuit (Circuit)**  
Siklus/Sirkuit adalah sebuah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut.
- Keterhubungan (Connected)**  
Dua buah simpul dikatakan terhubung apabila terdapat lintasan dari simpul pertama ke simpul kedua. Sebuah graf  $G$  disebut graf terhubung apabila setiap pasang simpul  $v_i$  dan  $v_j$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ .
- Upagraf (Subgraph) dan Komplemen Upagraf**  
Misalkan terdapat graf  $G = (V, E)$ . Graf  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah upagraf dari  $G$  jika  $V_1 \subseteq V$  dan  $E_1 \subseteq E$ . Komplemen dari upagraf  $G_1$  adalah  $G_2 = (V_2, E_2)$  sedemikian sehingga  $E_2 = E - E_1$  dan  $V_2$  adalah himpunan simpul yang anggota-anggota  $E_2$  bersisian dengannya.
- Upagraf Merentang (Spanning Subgraph)**  
Upagraf  $G_1 = (V_1, E_1)$  dari  $G = (V, E)$  dikatakan upagraf merentang apabila  $V_1 = V$ . yaitu semua simpul pada  $G$  juga terdapat di dalam  $G_1$ .
- Graf Berbobot (Weighted Graph)**  
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga.

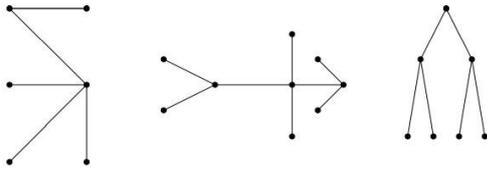
## 3. Pohon

Pohon adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit.



Gambar 1.6. Pohon  
Sumber : Diktat Kuliah Pohon (Bag 1)

Pohon memiliki representasi yang sama dengan graf. Pohon  $T$  memiliki  $n$  buah simpul dan  $n-1$  buah sisi. Hutan adalah kumpulan beberapa pohon yang saling lepas.



Gambar 1.7. Hutan yang terdiri dari tiga buah pohon  
Sumber : Diktat Kuliah Pohon (Bag 1)

4. Pohon Merentang dan Pohon Merentang Minimum  
Misalkan terdapat graf tak berarah dan terhubung  $G = (V, E)$ . Graf  $G$  dapat diubah menjadi pohon  $T = (V, E')$  dengan cara memutuskan sisi yang membuat graf memiliki sirkuit. Pohon tersebut dapat disebut sebagai pohon merentang.

Jika  $G$  merupakan graf berbobot, maka setiap pohon merentang yang terdapat pada  $G$  memiliki total bobotnya masing-masing. Pohon merentang minimum adalah pohon merentang yang berbobot minimum.

Terdapat 2 cara untuk menentukan pohon merentang minimum dari sebuah graf, yaitu algoritma prim dan algoritma kruskal.

a) Algoritma Prim

Algoritma Prim berorientasi pada simpul di dalam graf. Algoritma ini selalu membentuk pohon merentang minimum dalam setiap langkahnya. Inti dari algoritma ini adalah mencari sisi yang paling minimum yang bersisian dengan simpul yang ada di dalam  $T$ . Pohon merentang minimum yang dihasilkan tidak selalu unik namun total bobotnya akan sama.

Langkah menyusun Algoritma Prim:

- 1) Ambil sisi graf  $G$  yang memiliki bobot minimum kemudian masukkan ke dalam  $T$ .
- 2) Pilih sisi graf  $G$  yang bersisian dengan simpul yang ada di dalam  $T$ , mempunyai bobot minimum, dan tidak membentuk sirkuit pada  $T$ . Tambahkan sisi tersebut ke dalam  $T$ .
- 3) Ulangi langkah kedua sebanyak  $n-2$  kali hingga seluruh simpul di dalam  $G$  sudah terjangkau.

Berikut ini adalah implementasi Algoritma Prim yang ditulis dalam *pseudo-code*.

```

procedure Prim(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung-berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E), dengan |V| = n
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
Deklarasi
i, p, q, u, v : integer
Algoritma
Cari sisi (p,q) dari E yang berbobot terkecil
T ← {(p,q)}
for i ← 1 to n-2 do
  Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil namun
  bersisian dengan simpul di T
  T ← T ∪ {(u,v)}
endfor

```

Gambar 1.8. Algoritma Prim  
Sumber : Diktat Kuliah Pohon (Bag 1)

b) Algoritma Kruskal

Algoritma Kruskal berorientasi pada sisi di dalam graf. Algoritma ini memanfaatkan urutan sisi dengan bobot minimum.

Langkah menyusun Algoritma Kruskal:

- 1)  $T$  dalam keadaan kosong.
- 2) Urutkan sisi-sisi di dalam graf dengan terurut membesar berdasarkan bobotnya.
- 3) Pilih sisi dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di dalam  $T$ . Tambahkan sisi tersebut ke dalam  $T$ .
- 4) Ulangi langkah ketiga sebanyak  $n-1$  kali hingga seluruh simpul terjangkau.

Berikut ini adalah implementasi Algoritma Kruskal yang ditulis dalam *pseudo-code*.

```

procedure Kruskal(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung -berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E), dengan |V| = n
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
Deklarasi
i, p, q, u, v : integer
Algoritma
( Asumsi: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik
berdasarkan bobotnya - dari bobot kecil ke bobot
besar)
T ← {}
while jumlah sisi T < n-1 do
  Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil
  if (u,v) tidak membentuk siklus di T then
    T ← T ∪ {(u,v)}
  endif
endfor

```

Gambar 1.9. Algoritma Kruskal  
Sumber : Diktat Kuliah Pohon (Bag 1)

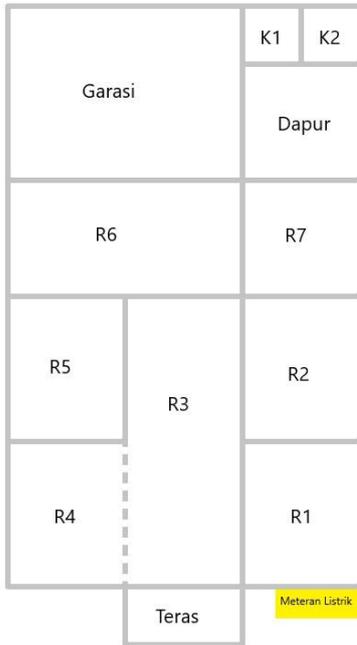
5. Jaringan Listrik

Jaringan Listrik adalah sistem listrik yang terdiri dari hantaran dan peralatan listrik yang terhubung satu sama lain untuk menyalurkan tenaga listrik. Menurut Kementerian Energi dan Sumber Daya Mineral (ESDM) RI, rasio elektrifikasi di Indonesia telah mencapai 99,4% pada triwulan ketiga tahun 2021. Listrik yang terhubung di setiap rumah merupakan jaringan listrik AC (*Alternating Current*) bertegangan 220 Volt. Jaringan ini bersumber dari pembangkit listrik yang kemudian disalurkan melalui kabel menuju gardu distribusi dan dialurkan lagi ke rumah, kantor, atau bangunan lain.

### III. APLIKASI POHON MERENTANG MINIMUM PADA RANGKAIAN LISTRIK

#### A. Penyusunan Graf

Rangkaian Listrik di dalam rumah bergantung dengan desain rumah masing-masing. Makalah ini membahas rumah 8x15 dengan desain seperti di bawah.



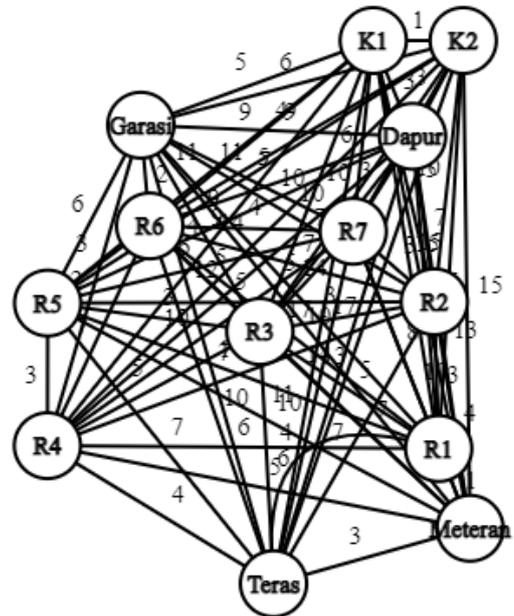
Gambar 2.1. Ilustrasi Denah Rumah  
Sumber : Dokumentasi Penulis

dapat diubah menjadi graf dengan simpul sebagai ruangan tujuan dan sisi sebagai kabel penghubung yang memiliki bobot berupa panjang kabel. Berikut ini adalah graf  $G$  berupa graf lengkap yang merepresentasikan denah rumah di atas.

$$G = (V, E)$$

$$V = \{Meteran, Teras, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, Dapur, Garasi, K1, K2\}$$

$$E = \{(Meteran, Teras, 3), (Meteran, R1, 1), \dots, (K1, K2, 1)\}$$



Gambar 2.2. Graf Lengkap Rangkaian Listrik yang mungkin  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Untuk membangun pohon merentang, diperlukan representasi graf berdasarkan denah rumah di atas. Denah rumah di atas

Selain representasi di atas, graf tersebut dapat direpresentasikan dengan *adjacency matrix* seperti di bawah.

	Meteran	Teras	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	Dapur	Garasi	K1	K2
Meteran	0	3	1	4	7	5	11	13	10	13	17	16	15
Teras	3	0	4	7	6	4	7	10	10	14	14	17	17
R1	1	4	0	3	5	6	8	10	8	12	14	15	15
R2	4	7	3	0	3	7	5	7	3	7	10	10	10
R3	7	6	5	3	0	5	3	5	5	7	9	10	10
R4	5	4	6	7	5	0	3	7	10	12	12	14	14
R5	11	7	8	5	3	3	0	3	6	9	6	11	11
R6	13	10	10	7	5	7	3	0	4	7	2	9	9
R7	10	10	8	3	5	10	6	4	0	3	5	6	6
Dapur	13	14	12	7	7	12	9	7	3	0	4	3	3
Garasi	17	14	14	10	9	12	6	2	5	4	0	5	6
K1	16	17	15	10	10	14	11	9	6	3	5	0	1
K2	15	17	15	10	10	14	11	9	6	3	6	1	0

Tabel 2.1. *Adjacency Matrix*  
Sumber : Dokumentasi Penulis

**B. Membangun Pohon Merentang Minimum dengan Algoritma Prim**

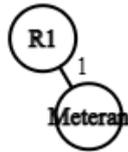
Sebelum membangun pohon merentang, diperlukan inisialisasi graf kosong  $T = (V, E)$  dengan

$$V = \{\}$$

$$E = \{\}$$

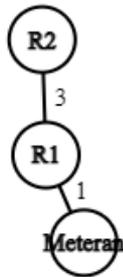
Rangkaian listrik di dalam rumah selalu bersumber dari meteran listrik yang terhubung dengan jaringan PLN. Oleh karena itu, pembuatan pohon merentang dimulai dari simpul *Meteran*. Simpul *Meteran* dimasukkan ke dalam  $V$

Dari simpul *Meteran*, dipilih sisi yang memiliki bobot paling minimum, yaitu sisi yang menuju *R1*. Kemudian simpul *R1* dan sisi  $(Meteran, R1, 1)$  ke dalam  $T$ .



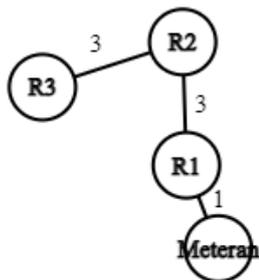
Gambar 2.3. Langkah 1 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Selanjutnya, melakukan pencarian sisi dengan bobot paling minimum yang terhubung dengan  $T$ , yaitu  $(R1, R2, 3)$  dengan bobot 3. Bobot total yang terakumulasi saat ini adalah 4.



Gambar 2.4. Langkah 2 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

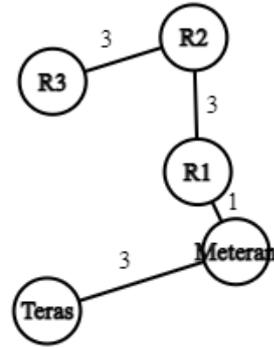
Sisi  $(R2, R3, 3)$  menyusul karena memiliki bobot yang sama dengan sebelumnya. Bobot total saat ini adalah 7. Kemudian simpul *R3* dan sisi  $(R2, R3, 3)$  ditambahkan ke dalam  $E$ .



Gambar 2.5. Langkah 3 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

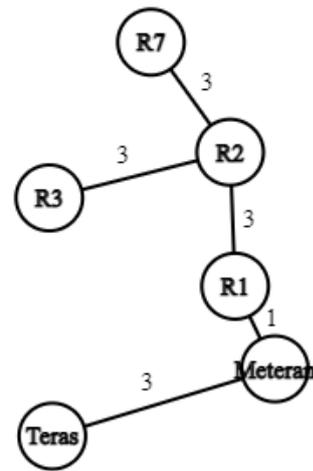
Sisi yang terpilih selanjutnya adalah sisi  $(Meteran, Teras, 3)$  dengan bobot 3. Kemudian simpul *Teras* dan sisi

$(Meteran, Teras, 3)$  ke dalam  $T$ .



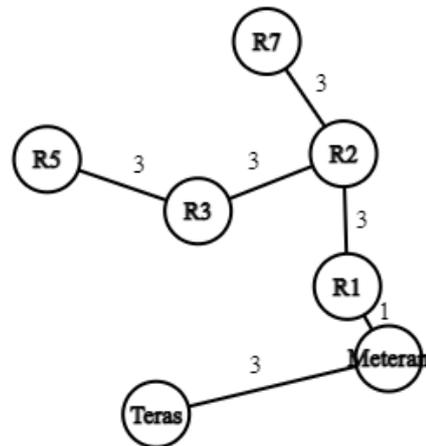
Gambar 2.6. Langkah 4 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Selanjutnya memilih sisi  $(R2, R7, 3)$  dengan bobot 3. Kemudian simpul *R7* dan sisi  $(R2, R7)$  ditambahkan ke dalam  $T$ .



Gambar 2.7. Langkah 5 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

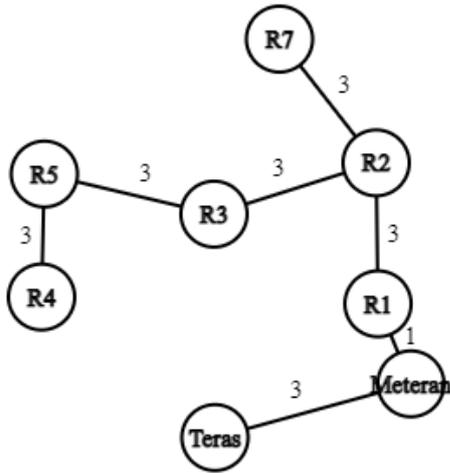
Sisi  $(R3, R5, 3)$  dipilih dengan bobot 3 sehingga total bobot yang terakumulasi saat ini menjadi 16. Simpul *R5* dan sisi  $(R3, R5)$  ditambahkan ke dalam  $T$ .



Gambar 2.8. Langkah 6 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

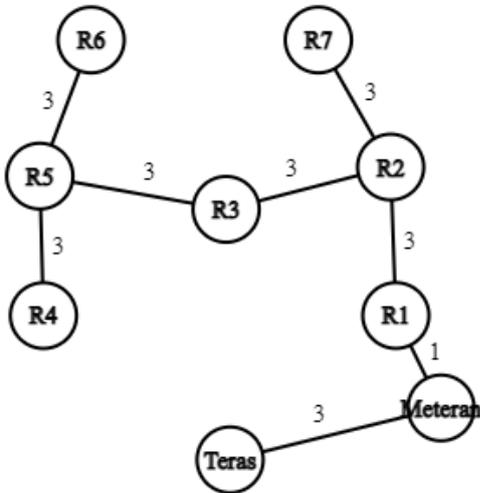
Sisi yang terpilih selanjutnya adalah sisi  $(R5, R4, 3)$  dengan

bobot 3. Simpul  $R4$  dan sisi  $(R5,R4)$  ditambahkan ke dalam  $T$ .



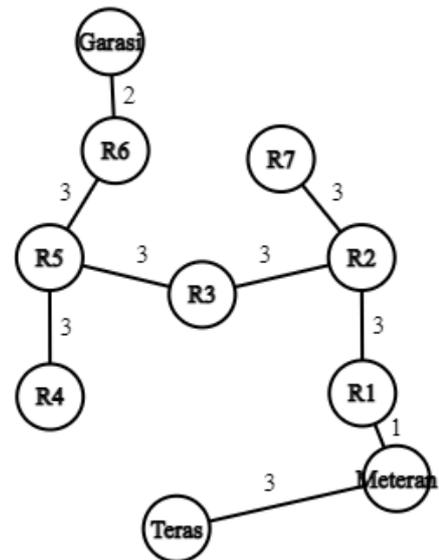
Gambar 2.9. Langkah 7 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Sisi yang terpilih selanjutnya adalah sisi  $(R5,R6,3)$  dengan bobot 3. Simpul  $R6$  dan sisi  $(R5,R6)$  ditambahkan ke dalam  $T$ .



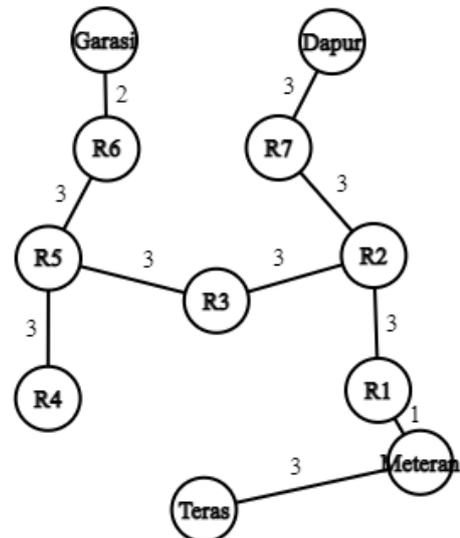
Gambar 2.10. Langkah 8 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Sisi yang terpilih selanjutnya adalah sisi  $(R6,Garasi,2)$  dengan bobot 3. Simpul  $Garasi$  dan sisi  $(R6,Garasi)$  ditambahkan ke dalam  $T$ .



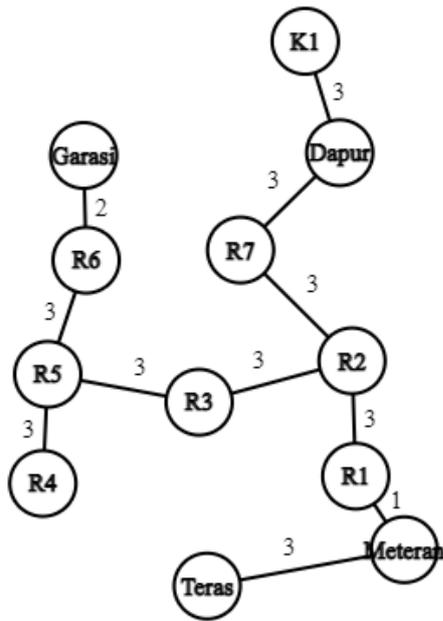
Gambar 2.11. Langkah 9 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Sisi yang terpilih selanjutnya adalah sisi  $(R7,Dapur,3)$  dengan bobot 3. Simpul  $Dapur$  dan sisi  $(R7,Dapur)$  ditambahkan ke dalam  $T$ .



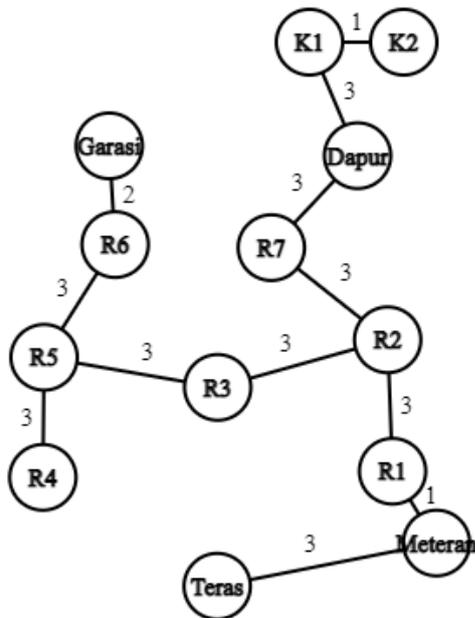
Gambar 2.12. Langkah 10 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Sisi yang terpilih selanjutnya adalah sisi  $(Dapur,K1)$  dengan bobot 3. Simpul  $K1$  ditambahkan ke dalam  $V$  dan sisi  $(Dapur,K1)$  ditambahkan ke dalam  $E$ .



Gambar 2.13. Langkah 11 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Terakhir, sisi  $(K1, K2)$  diilih dengan bobot 1. Kemudian simpul  $K2$  dan sisi  $(K1, K2)$  ke dalam  $T$ . Bobot total yang terakumulasi adalah 31.



Gambar 2.14. Langkah 12 Penyusunan Pohon Merentang Minimum  
Sumber : Dokumentasi Penulis

Graf pada Gambar 2.14 merupakan salah satu pohon merentang minimum yang dapat dibuat dari rangkaian listrik di rumah tersebut. Pohon merentang tersebut telah mencakup 13 simpul yang merupakan total ruangan di dalam rumah serta 12 simpul penghubung. Pohon merentang tersebut memiliki total bobot 31 (satuan meter).

#### IV. KESIMPULAN

Rangkaian Listrik di dalam rumah dapat dimodelkan ke dalam Graf dengan representasi yang bervariasi. Pemodelan ini sangat membantu dalam menentukan pohon merentang minimum pada rangkaian listrik sehingga dapat menghemat biaya instalasi listrik. Berdasarkan ilustrasi denah rumah di atas, diperoleh pohon merentang minimum dengan panjang total 31 (satuan meter). Hal ini berarti kabel listrik yang dibutuhkan untuk menghubungkan ruangan-ruangan di dalam rumah tersebut adalah minimal 31 meter.

#### V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan puji syukur kepada Allah Swt. karena atas rahmat dan karunia-Nya makalah ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Nur Ulfa Maulidevi, S.T., M.Sc. selaku dosen mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit kelas K03. Tidak lupa, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua dan pihak-pihak yang membantu dalam pengerjaan makalah ini.

#### REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi. 2021. *Graf (Bag 1)*. Diakses pada laman <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf> pada tanggal 10 Desember 2021.
- [2] Munir, Rinaldi. 2021. *Graf (Bag 2)*. Diakses pada laman <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian2.pdf> pada tanggal 11 Desember 2021.
- [3] Munir, Rinaldi. 2021. *Pohon (Bag 1)*. Diakses pada laman <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Pohon-2020-Bag1.pdf> pada tanggal 10 Desember 2021.
- [4] Kementerian Energi dan Sumber Daya Mineral, Siaran Pers – Triwulan III 2021: Rasio Elektrifikasi 99,40%, Kapasitas Pembangkit EBT 386MW. Diakses pada laman <https://www.esdm.go.id/id/media-center/arsip-berita/triwulan-iii-2021-rasio-elektifikasi-9940-kapasitas-pembangkit-ebt-386-mw> pada tanggal 11 Desember 2021.

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 14 Desember 2021

Hafidz Nur Rahman Ghozali  
13520117