Pemecahan Monty Hall Problem dengan Visualisasi Tree

Mahesa Lizardy 13520116[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13520116@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Monty Hall Problem berasal dari sebuah acara TV di Amerika serikat yaitu "Let's Make a deal" atau serupa dengan yang ada di Indonesia yaitu super deal yang merupakan sebuah game dimana pemain harus menebak satu diantara tiga pilihan tirai / pintu dimana pemain tidak mengetahui apa yang ada dibalik pintu / tirai tersebut, sehingga setiap pilihan yang diambil pemain memiliki probabilitas untuk memenangkan hadiah.**

Pada permasalahan Monty Hall ini pintu akan dielimasi satu per satu pilihan hingga menyisakan 2 pilihan, pintu yang dipilih oleh pemain dan satu pintu lainya, yang salah satu dari pintu tersebut terdapat kambing, dan satunya lagi berisi mobil, setiap pintu tersebut memiliki probabilitas mendapatkan mobil atau pun kambing. Anggapan awal bahwa setiap pintu tersebut memiliki probabilitas yang sama satu dan lainnya. Namun, terjadi paradoks dimana pernyataan tersebut ternyata tidak benar. Pada salah satu pintu yang tidak dipilih oleh pemain sebelumnya, pintu tersebut memiliki probabilitas yang lebih tinggi untuk mendapatkan mobil.

***Keywords*—Paradoks, Tree, Probabilitas**

I. PENDAHULUAN

Monty Hall Problem merupakan sebuah game teka teki yang melibatkan probabilitas yang berasal dari sebuah acara TV di Amerika Serikat "*Let's Make a Deal*". Penamaan Monty hall berasal dari nama pembawa acara tv tersebut yaitu Monty Hall. Masalah ini juga sering disebut dengan paradoks Monty Hall. Hal tersebut, dikarenakan dalam penyelesaian teka-teki tersebut terdapat paradoks yang terjadi yang artinya bertentangan dengan intuisi seseorang.

Masalah ini mulai terkenal dan dibahas oleh beberapa ahli ketika pernyataan yang diplubikasikan pada majalah Parade oleh Whitaker pada tahun 1990, yang berisi sebagai berikut:

"*Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, "Do you want to pick door No. 2?" Is it to your advantage to switch your choice?*" [1].

Seketika itu banyak para ahli atau matematikawan yang mencoba untuk membahas atau mengirimkan penyelesaian mengenai permasalahan tersebut. Dan banyak orang yang ragu mengenai jawaban yang diberikan karena terdapat paradoks yang terjadi, dimana jawaban yang diberikan tidak sesuai anggapan atau pandangan awal seseorang.

Gambar 1. Monty Hall, Host Let's Make a deal
(Sumber: https://www.usatoday.com/picture-gallery/life/tv/2017/09/30/remembering-lets-make-a-deal-host-monty-hall/106172564/)

Dalam Permainan teka-teki ini host akan memberikan 3 pilihan dalam hal ini pilihan merupakan pintu. Dimana di balik tiga pintu tersebut terdapat satu hadiah yaitu mobil dan dua lainnya merupakan jebakan yaitu kambing. peserta harus memilih satu dari tiga pilihan tersebut dimana peserta tidak mengetahui apa yang berada di balik pintu tersebut. Oleh karena itu, peluang pemain pada awal permainan untuk menebak pintu yang berisi mobil adalah satu per-tiga. Ketika pemain sudah menetapkan pilihannya, maka host akan melanjutkan permainannya. Pada permainan ini host mengetahui apa yang berada di balik pintu. Host akan membuka satu diantara dua pintu yang berisi kambing yang tidak dipilih oleh pemain sebelumnya. Sehingga terdapat dua pintu tersisa, kemudian host akan memberikan penawaran yaitu untuk menukar pintu yang dipilih pemain dengan pintu satunya atau pemain tetap dengan pintu yang dipilih pada awal permainan.

Pada waktu ini banyak orang yang beranggapan bahwa setiap pintu memiliki probabilitas yang sama. banyak yang berasumsi jika pemain beralih ke pintu satunya probabilitas pemain untuk menenangkan mobil tetaplah 1/3. Namun, saat dihitung secara matematis, yang terjadi ketika berganti pilihan probabilitas pemain akan meningkat menjadi 2/3. Di makalah ini akan mencoba membuktikan peluang dari pemain ketika berganti pilihan dari suatu pintu ke pintu lainnya dengan menggunakan visualisasi tree probabilitas.

II. TEORI DASAR

A. Tree

Pohon merupakan graf tak-berarah dan terhubung yang tidak mengandung sirkuit [2]. Misalkan $G = (V, E)$ adalah Graf tak berarah sederhana dan memiliki jumlah simpul sebanyak n. Maka. G dapat dikatakan sebagai pohon jika memiliki salah satu dari sifat berikut:

1. Setiap pasangan simpul di Graf G terhubung melalui lintasan tunggal [2].

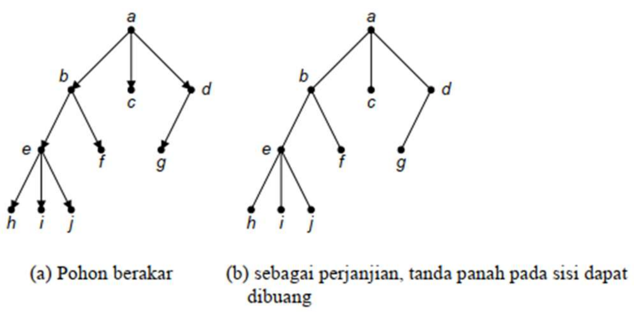
2. Graf G terhubung dan memiliki sejumlah sisi sebanyak $m = n - 1$ [2].

3. Graf G tidak mengandung sirkuit dan memiliki sisi sebanyak $m = n - 1$ [2].

4. Graf G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi dari graf akan menghasilkan satu sirkuit [2].

5. Graf G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan [2].

Pohon dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, salah satunya pohon berakar (*rooted tree*). Pohon berakar atau *rooted tree* adalah pohon yang satu buah simpulnya diperlukan sebagai akar dan pada sisi diberi arah sehingga menjadi graf berarah [2].



Gambar 2. contoh pohon berakar
(Sumber: Bahan Kuliah IF1210 Matematika Diskrit Pohon Bagian 2 Halaman 2)

Terdapat beberapa terminologi pada pohon berakar seperti berikut:

1. Anak (*child*)
   Anak adalah simpul yang memiliki sisi masuk yang berasal dari Orangtua. Misal pada Gambar 2 yang merupakan anak adalah b, c, d, dll (kecuali a). Simpul b, c, d adalah anak dari a [2].

2. Orangtua (*parent*)
   Orangtua adalah simpul yang memiliki sisi keluar yang menunjuk simpul lain yang akan menjadi anaknya. Misal pada Gambar 2 adalah a, b, c, d, dan e. a adalah orangtua dari simpul b, c, d [2].

3. lintasan (*path*)
   Lintasan adalah sisi yang harus dilalui dari simpul ke simpul lainya. Misal lintasan a ke g adalah a, d, g [2].

4. saudara kandung (*sibling*)
   saudara kandung adalah simpul yang memiliki Orangtua yang sama. Misal b, c, dan d merupakan saudara kandung yang memiliki orangtua yang sama [2].

5. Upapohon (*subtree*)
   upapohon merupakan subset dari pohon utama [2].

6. Derajat (*degree*)
   Derajat adalah jumlah anak pada suatu simpul. Misal pada Gambar 2 derajat dari simpul f adalah 3. dan derajat dari a adalah 1 [2].

7. Daun (*leaf*)
   Daun merupakan simpul pada pohon yang tidak memiliki anak atau berderajat nol. Misal pada gambar 2 adalah h, i, j, f, dan g [2].

8. Aras (*level*)
   Aras adalah panjang jalan dari akar sampai simpul tertentu [2].

9. kedalaman (depth)
   kedalaman adalah Aras maksimum dari suatu pohon [2].

B. Probabilitas

Dasar konsep dari probabilitas adalah eksperimen acak. Suatu eksperimen dikatakan acak jika hasil dari eksperimen tersebut tidak dapat diprediksi dengan pasti. Eksperimen acak ini menyiratkan pengertian bahwa setiap hasil dari eksperimen acak yang dilakukan adalah semata karena faktor keberuntungan, kebetulan, atau keajaiban. Hal ini yang membuat bahwa probabilitas sering disebut dengan Hukum Kebetulan [3].

Probabilitas merupakan ukuran tentang kemungkinan suatu kejadian atau peristiwa (event) yang akan terjadi di masa mendatang. Probabilitas dinyatakan antara angka 0 sampai 1 dalam bentuk pecahan atau dalam bentuk persentase [4]. Dalam probabilitas terdapat beberapa hal sebagai berikut:

1. Percobaan merupakan pengamatan terhadap beberapa aktivitas atau proses yang memungkinkan terjadi paling sedikit dua peristiwa tanpa memperhatikan peristiwa mana yang akan terjadi [4].

2. Hasil (*outcome*) merupakan suatu hasil dari sebuah percobaan [4].

3. Peristiwa (*event*) merupakan kumpulan dari satu atau lebih hasil yang terjadi pada sebuah percobaan atau kegiatan [4].

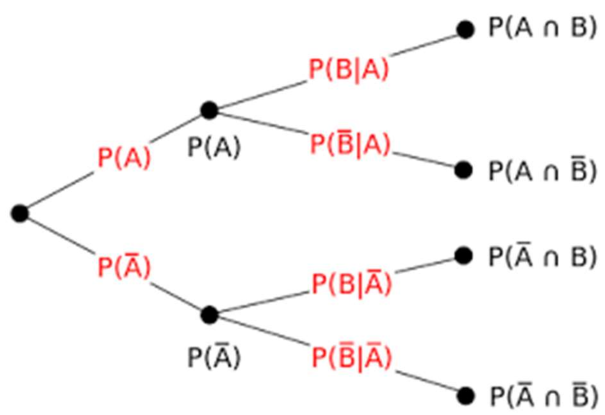
Dalam probabilitas setiap peristiwa mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi. Dalam pendekatan klasik Probabilitas dapat dihitung sebagai berikut:

$$Probabilitas = \frac{jumlah\ kemungkinan\ hasil}{jumlah\ total\ kemungkinan}$$

Probabilitas dapat digambarkan dengan berbagai cara, salah satunya dengan menggunakan diagram pohon.

C. Diagram Pohon Probabilitas

Diagram pohon probabilitas digunakan untuk menggambarkan probabilitas atau probabilitas bersyarat dan probabilitas Bersama. Dengan menggunakan diagram pohon memudahkan untuk menghitung probabilitas ketika terdapat beberapa kejadian independent yang terlibat [4]. Diagram pohon juga sangat berguna untuk menganalisis keputusan yang akan diambil selanjutnya. Berikut contoh dari diagram pohon probabilitas.



Gambar 3. contoh diagram pohon probabilitas
(sumber:https://vebrianaparmita.files.wordpress.com/2013/11/probability_tree_diagram-svg.png)

D. Teorema Buyes

Teorema Buyes merupakan rumus matematika untuk menentukan sebuah kemungkinan yang akan terjadi di masa depan atau probabilitas. Probabilitas tersebut merupakan kemungkinan yang akan terjadi, berdasarkan hasil sebelumnya yang terjadi, Teorema Buyes digunakan untuk merevisi prediksi atau teori yang ada (memperbarui perhitungan probabilitas sebelumnya) dengan menggunakan bukti baru atau tambahan baru [5].

Teorema buyes memungkinkan untuk mengukur apa saja tang terjadi dalam sebuah probabilitas, termasuk untuk mengukur keakuratan peluang mendapatkan mobil dalam masalah monty hall. Teorema buyes bergantung pada penggabungan probabilitas sebelumnya untuk menghasilkan probabilitas posterior. Probabilitas sebelumnya merupakan probabilitas suatu kejadiam sebelum adanya data baru yang dikumpulkan. Probabilitas sebelumnya ini menjadi penilaian rasional terbaik dari kemungkinan hasil yang akan terjadi berdasarkan pengetahuan saat ini sebelum eksperimen tersebut dilakukan, karena pengkinian data sehingga diharapkan data tersebut paling mendekati dengan prediksi kejadian yang akan terjadi selanjutnya. Probabilitas posterior merupakan probabilitas hasil revisi dari suatu kejadian yang terjadi setelah mempertimbangkan informasi baru [5]. Rumus dari teorema buyes dapat dituliskan sebagai berikut

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

$P(A) \ = \ probabilitas\ A\ terjadi$

$P(B) \ = \ probabilitas\ B\ terjadi$

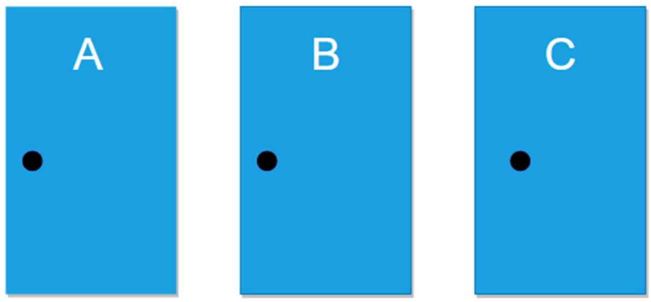
$P(A|B) = \ probabilitas\ A\ diberikan\ B$

$P(B|A) = \ probabilitas\ B\ diberikan\ A$

$P(A \cap B) = \ probabilitas\ A\ dan\ B\ terjadi$

III. MONTY HALL PROBLEM DENGAN VISUALISASI TREE

Pada awal permainan pemain akan diberikan 3 pilihan pintu oleh host. dalam permainan ini terdapat 1 mobil dan 2 kambing yang berada di balik pintu secara acak. Pemain sama sekali tidak mengetahui apa yang ada dibalik pintu. Sehingga pada awal permainan peluang pemain untuk mendapatkan pintu yang berisi mobil adalah 1/3. Pemain akan memilih salah satu dari tiga pintu tersebut secara acak. Misalnya ketiga pintu tersebut kita beri nama pintu A, pintu B, dan pintu C yang dapat diilustarikan sebagai berikut.

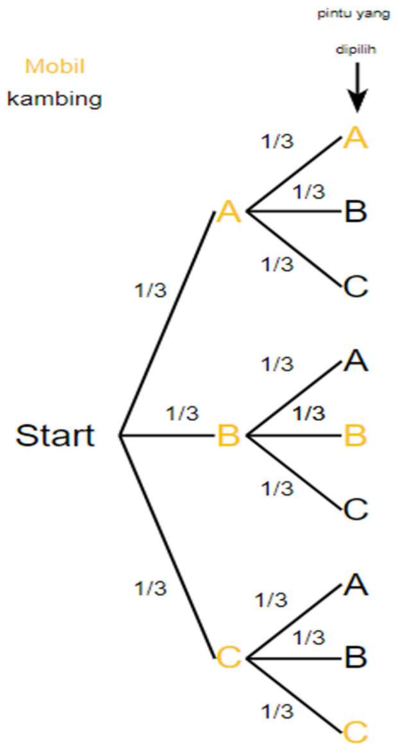


Gambar 4. ilustrasi pintu A, B, C

Ketika pemain sudah memilih salah satu pintu tersebut, host akan membuka satu pintu yang berisi kambing dan yang bukan dipilih oleh pemain. Misalnya jika mobil berada pada pintu A maka host akan membuka pintu B atau C yang merupakan kambing. Jika pemain memilih B maka host akan membuka pintu C. Dan jika pemain memilih C maka host akan membuka pintu B.

Setelah host sudah membuka satu pintu yang berisi kambing, maka akan tersisa dua pintu berisi mobil dan satunya berisi kambing. Kemudian, Host akan memberi penawaran kepada pemain. pemain akan diberikan tawaran berupa ingin tetap memilih pintu yang sama dengan yang dipilih di awal permainan atau ingin pindah pilihan ke pintu satunya.

Ketika Pemain tidak mengganti pilihan pintu atau melakukan switch maka visualisasi tree permasalahan monty hall akan menjadi sebagai berikut.



Gambar 5. diagram pohon peluang ketika pemain tidak mengganti pintu

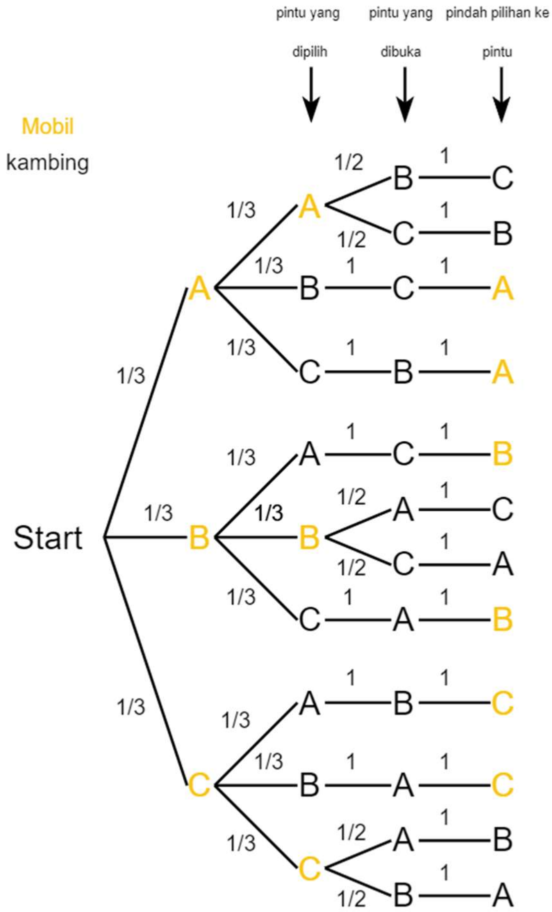
dari gambar 5 tersbut dapat dihitunh peluang pemain mendapatkan mobil dan peluang mendapatkan kambing sebagai berikut

$$p(kambing) = 6\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$
$$p(mobil) = 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

didapatkan bahwa ketika tidak mengganti pilihan maka peluang pemain untuk mendapatkan mobil masihlah tetap 1/3 dan peluang pemain mendapatkan kambing adalah 2/3. Maka jika terdapat N buah pintu maka peluang pemain untuk mendapatkan mobil adalah

$$p(A_N) = \frac{1}{N}$$

Pada Bagian Sebelumnya kita telah bahas peluang jika pemain tetap *stay* atau tidak mengganti pilihanya. Namun, bagaimana jika saat pemain mendapat penawawaran untuk switch atau pindah pilihan dan pemain menyetujui hal tersebut. Maka diagram pohon peluang yang terjadi akan sedikit berubah. Terdapat beberapa kemungkinan yang terjadi jika pemain mengubah pilihanya, seperti gambar berikut:



Gambar 6. peluang ketika pemain mengganti pintu

dari gambar 6 tersebut dapat dihitung peluang pemain mendapatkan mobil dan peluang mendapatkan kambing sebagai berikut

$$p(kambing) = 6\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$
$$p(mobil) = 6\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

didapatkan bahwa ketika mengganti pilihan maka peluang pemain untuk mendapatkan mobil bertambah dari sebelumnya yaitu menjadi 2/3 dan peluang pemain mendapatkan kambing berkurang menjadi 1/3. Hal tersenut terjadi dikarenakan host membuka satu pintu yang berisi kambing sebelumnya. Sehingga peluang pintu satunya berisi mobil lebih tinggi dari pintu yang kita pilih di awal.

Permasalahn Monty Hall ini dapat kita anggap bahwa kedua pintu selain yang kita pilih digabungkan. Sehingga pintu yang kita pilih memiliki peluang 1/3 sedangkan pintu satunya memiliki peluang 2/3 Karena pada selanjutnya host akan membuka salah satu dari pintu tersebut dan pemain tidak bisa memilih pintu yang sudah dibuka, oleh karena itu pemain memiliki 2 pilihan sejak awal yaitu pintu awal yang dipilih dengan peluang 1/3 dan pintu lainya yang tersisa setelah host sudah membuka salah satu pintu dengan peluang 2/3 .

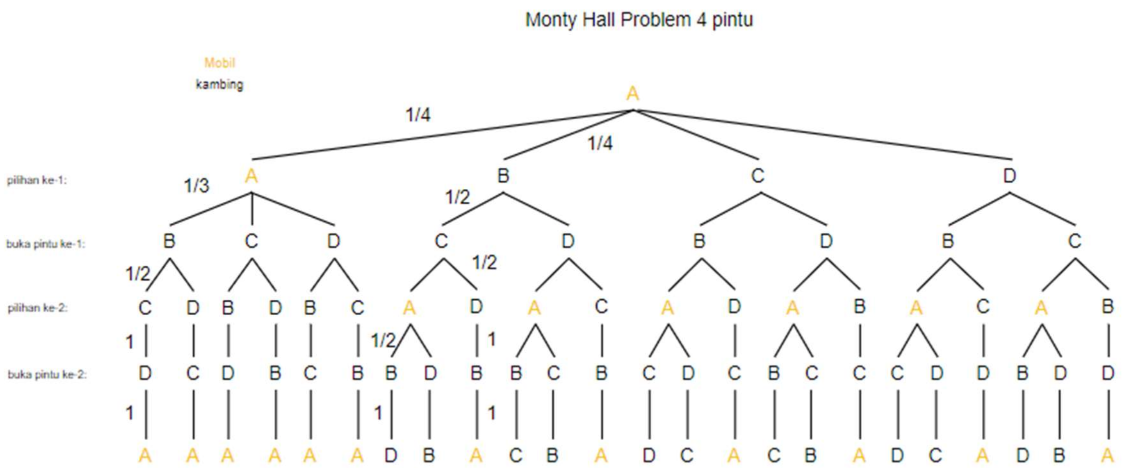
Bagaimana jika pintu pada awalnya berjumlah lebih dari tiga pintu maka hal tersebut sama saja seperti sebelumnya. Misalkan terdapat 1000 pintu yang dapat dipilih oleh pemain. Ketika pemain sudah memilih satu pintu dari 1000 pintu yang ada, Host akan membuka 998 pintu lainya yang merupakan kambing sehingga tersisa 2 pilihan yaitu pintu yang berisi mobil dan satu lagi pintu yang berisi kambing. sehingga pintu yang sebelumnya tidak dipilih pemain akan memiliki peluang sebesar 999/1000.

Namum pada permasalahan Monty Hall ini ada beberapa ketentuan yang harus dipenuhi. Pada awal permainan host harus sudah mengetahui apa yang dibalik pintu, karena jika tidak maka jika host membuka pintu secara acak maka bisa saja host membuka pintu yang berisi mobil. Selanjutnya host harus membuka pintu kambing yang ada hingga tersisa satu kambing yang tersisa sehingga pemain hanya terdapat dua pilihan di akhir permainan.

Pada kasus ini, Jika terdapat pintu lebih dari 1000 atau kita anggap saja n pintu. Pada bagian terebut kita menunggu host membuka seluruh pintu yang bukan merupakan mobil. Sehingga ketika host membuka pintu sebanyak 1, 2, …, n-2, pemain akan tetap stay atau tetap pada pilihan awal pintu hingga tersisa 2 buah pintu tersisa maka pintu satunya yang tidak dipilih pemain akan memiliki peluang sebesar

$$p(A_N) = \frac{N-1}{N}$$

Bagaimana jika pemain melakukan perpindahan pilihan setiap pintu yang berisi kambing dibuka. Misalnya jika terdapat 4 pintu dalam permainan Monty Hall dan pemain melakukan perpindahan pilihan pintu disetiap salah satu pintu dibuka, maka visualisasi tree probabilitas-nya akan menjadi sebagai berikut.



Gambar 7. diagram pohon peluang ketika pemain mengganti pintu setiap salah satu pintu dibuang

dari gambar 7 tersebut dapat dihitung peluang pemain mendapatkan mobil dan peluang mendapatkan kambing sebagai berikut jika pemain mengganti pintu setelah satu pintu dibuka oleh host maka peluang pemain addalah sebagai berikut

$$p(mobil) = 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$
$$p(kambing) = 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

Didapatkan bahwa, peluang pemain untuk mendapatkan mobil meningkat menjadi 3/8. pada saat tersebut masih terdapat 3 pintu yang belum dibuka oleh sebuah host yang berisi 2 kambing dan 1 mobil.

Selanjutnya, ketika pintu ke dua yang berisi kambing telah dibuka oleh host dan pemain mengganti pintu pilihanya, maka peluang pemain adalah sebagai berikut

$$p(mobil) = 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$
$$p(kambing) = 12\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

Didapatkan bahwa peluang pemain untuk mendapatkan mobil meningkat lebih besar dari awal dan dari peluang sebelumnya yaitu ketika setelah dibuka satu pintu. Dari hal tersbut maka dibuktikan bahwa peluang pemain ketika melakukan *switch* lebig besar ketika pemain tidak melakukan *switch* sama sekali

Ketika kita melakukan switch atau mengganti pintu yang kita pilih, jika terdapat N buah pintu Monty Hall dan ada sebanyak p pintu yang sudah dibuka oleh host maka peluang pemain mendapatkan mobil adalah

$$p(A_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N-1}{N-P-1}$$

Dalam Permasalahan Monty Hall ini didapatkan bahwa jika pemain melakukan switch atau pergantian secara terrus menerus maupun hanya dengan beberapa kali saja, maka peluang pemain untuk mendapatkan hadiah mobil lebih besar daripada tidak melakukan switch sama sekala. Hal ini dibuktikan dengan

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{N} \cdot \frac{N-1}{N-P-1} < \frac{N-1}{N}$$

IV. KESIMPULAN

Pada Monty hall Problem didapatkan bahwa ketika kita mengganti pilihan atau melakukan *switch* maka probabilitas kita memenangkan hadiah meningkat. Namun hal tersebut tidak mengharuskan kita ketika diberikan suatu pilihan, kita harus mengganti pilihan disetiap pilihan selanjutnya, karena dapat atau tidak nya kita mendapatkan hadiah tetaplah bergantung dari keberuntungan yang kita miliki. Seperti pada prinsip probabilitas merupakan sebuah kebetulan atau keajaiban.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji Syukur kehadirat Allah SWT karena atas berkat dan rahmat-Nya lah saya dapat menyelesaikan makalah ini dengan baik. Ucapan terima kasih juga saya ucapkan kepada dosen pengampu mata kuliah matematika diskrit IF2120, Bapak Dr. Ir. Rinaldi, M.T., Ibu Dra. Harlili, M.Sc., dan Ibu Dr. Nur Ulfa Maulidevi, S.T., M.Sc. yang telah membimbing saya dalam mata kuliah ini selama satu semester. Semoga makalah yang saya buat ini dapat menambah manfaat bagi saya maupun pembaca.

REFERENSI

[1] Adams, Cecil (1990)."On 'Let's Make a Deal,' you pick Door #1. Monty opens Door #2—no prize. Do you stay with Door #1 or switch to #3?", The Straight Dope, (November 2 1990). diakses pada tanggal 10 Desember 2021.

[2] R. Munir, *Pohon*, Slide Kuliah Matematika Diskrit IF2120 2021

[3] Manfaat, B, *Pengantar teori probabilitas*. Cirebon, Jawa Barat: EDUVISION, 2016.

[4] R. Putri, *PROBABILITAS*, academia.edu, https://www.academia.edu/23169043/TEORI_PROBABILITAS, diakses pada tanggal 11 Desember 2021.

[5] S. Administrator, "*Teorema Bayesian*", *BigBrothers*, [Online]. Available: http://www.bigbrothersinvestment.com/detailpost/teorema-bayesian, diakses pada tanggal 12 Desember 2021.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Desember 2020

Ttd

Mahesa Lizardy 13520116