# Pencarian Solusi Dalam Permainan Sudoku Dengan Menggunakan Pewarnaan Graf

Roby Purnomo - 13520106[1]
*Program Studi Teknik Informatika*
*Sekolah Teknik Elektro dan Informatika*
*Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia*
[1]*author@itb.ac.id*

**Sudoku merupakan permainan teka-teki mengenai angka tunggal. Sudoku dapat diselesaikan dengan pewarnaan graf. Dengan menggunakan polynomial kromatik dan bilangan kromatik pada graf yang merepresentasikan Sudoku maka dapat menjawab beberapa pertanyaan mengenai penyelesaian pada Sudoku.**

**sudoku, graf, polynomial kromatik, bilangan kromatik.**

## I. PENDAHULUAN

Sudoku adalah salah satu permainan logika atau sebuah teka-teki yang berhubungan dengan angka yang tertuang pada sebuah tabel matriks dengan baris dan kolom biasanya adaalah 9x9 karena sebenarnya banyak variasi Sudoku yang lain berupa 16x16 atau yang lainnya. Pada makalah ini hanya akan menggunakan Sudoku 9x9. Sudoku merupakan permainan yang mampu mengasah otak bagi para pemainnya terutama dengan membayangkan sehingga akan mempertajam logika dari para pemain. Sudoku ini banyak ditemukan pada koran, *smartphone*, dll. Sudoku sebenarnya bukan berasal dari Jepang melainkan ditemukan oleh Howard Garns (1970), tetapi kalimat Sudoku berasal dari sebuah kalimat berbahasa Jepang yakni "***Su**-ji wa **doku**shin ni kagiru*" yang berarti angka tunggal. Oleh karena itu, pada permainan Sudoku semua angka pada baris, kolom, dan subkisinya (3x3) haruslah tunggal.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | | | 7 | | | | |
| 6 | | | 1 | 9 | 5 | | | |
| | 9 | 8 | | | | | 6 | |
| 8 | | | | 6 | | | | 3 |
| 4 | | | 8 | | 3 | | | 1 |
| 7 | | | | 2 | | | | 6 |
| | 6 | | | | | 2 | 8 | |
| | | | 4 | 1 | 9 | | | 5 |
| | | | | 8 | | | 7 | 9 |

Gambar 1.1. Contoh Sudoku

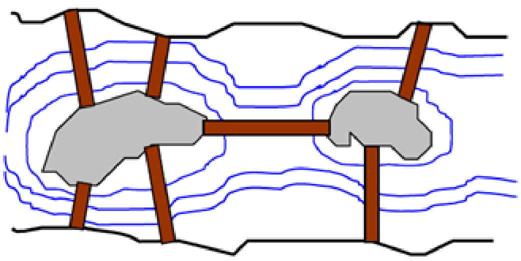
Sebenarnya Sudoku dapat dikerjakan secara manual yakni dengan brute force, tetapi ada salah satu cara pengerjaan Sudoku yakni dengan metode pewarnaan graf. Selain itu, Sudoku juga memiliki banyak sekali variasi yang menarik juga yang akan dibahas pada makalah kali ini.

Pada saat menyelesaikan permasalahan Sudoku kerap kali kita berpikir apakah Sudoku pasti ada penyelesaiannya dan apakah penyelesaiannya hanya ada 1 saja? Hal ini juga akan dibahas pada makalah ini.

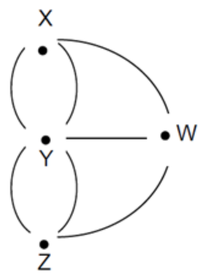
## II. TEORI DASAR

### A. Graf

Graf awalnya ditemukan oleh salah satu ahli matematika dari Swiss yakni Leonhard Euler yang sedang memecahkan masalah jembatan Königsberg, yakni sebuah teka-teki tentang cara menemukan suatu jalan dari tujuh jembatan yang ada yang membentang pada sebuah sungai bercabang yang menghubungkan 2 pulau tanpa melewati suatu jembatan sebanyak 2 kali atau lebih. Berikut adalah gambaran permasalahan dan graf yang dibuat oleh Leonhard Euler.



Gambar 2.1. Jembatan Konigsberg (Wirdasari, 2011)

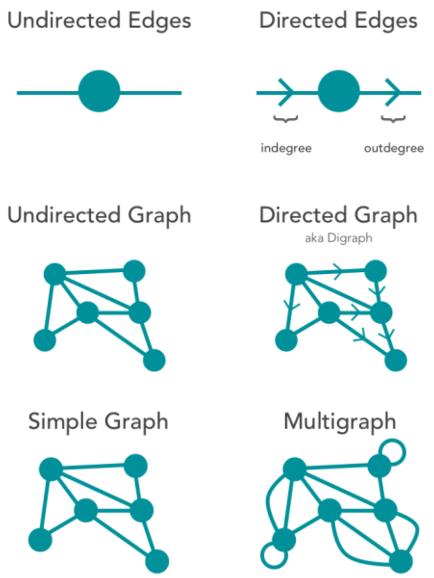



Gambar 2.2. Representasi Multigraph Jembatan Konigsberg (Wirdasari, 2011)

Titik-titik W, X, Y, dan Z merupakan *vertex* yang menyatakan pulau, sedangkan sisi-sisinya (WX, WY, WX, XY, YZ) merupakan *edge* yang menyatakan jembatan. Jadi sebuah graf adalah sebuah representasi dari himpunan titik-titik (*vertex*) dan garis-garis (*edge*) yang menghubungkan suatu titik ke titik yang lain. Graf memiliki beberapa komponen misalnya pada setiap *vertex* memiliki yang namanya derajat/*degree*, yakni adalah banyaknya sisi yang berhubungan dengan *vertex* tersebut. Selain derajat, pada graph juga dikenal istilah adjacency/tetangga, yakni semua *vertex* yang bertetangga dengan suatu *vertex* yang sedang dicari tetangganya.

Graf memiliki banyak variasi pada representasinya, variasi graf didasarkan pada beberapa hal :

1. Arah pada sisi (*edge*) graf
   a. Graf tak berarah
   b. Graf berarah
2. Ada atau tidaknya gelang dan sisi ganda
   a. Graf sederhana (tidak mengandung sisi gelang ataupun sisi ganda)
   b. Graf ganda/multigraph (mengandung sisi ganda atau sisi gelang)

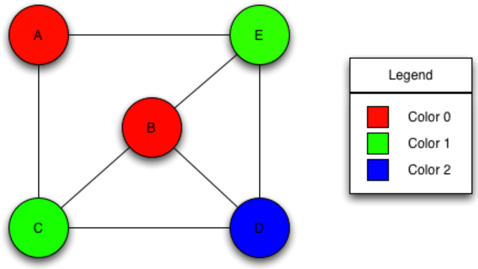



(https://towardsdatascience.com/graph-theory-basic-properties-955fe2f61914)
Gambar 2.3. Graf tak berarah dan Graf berarah, Graf sederhana dan Graf ganda

Suatu graf memiliki beberapa *vertex*, dan pada *vertex-vertex* tersebut dapat diwarnai dengan suatu warna dan suatu aturan pula, atau dikenal dengan pewarnaan graf. Pewarnaan graf mengikuti aturan, jika suatu *vertex* telah diberi suatu warna maka semua tetangganya tidak boleh diberi warna yang sama sehingga semua *vertex* yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

## *B. Pewarnaan Graf*

Umumnya pada saat melakukan pewarnaan terhadap suatu graf, warna yang digunakan akan bias lebih sedikit dari jumlah *vertex* yang ada, oleh karena itu dikenal suatu istilah yang disebut dengan bilangan kromatik yakni warna minimum yang bisa dicapai untuk mewarnai sebuah graf, dan dinotasikan dengan $\chi(G) = \lambda$, dengan $\lambda$ adalah jumlah warna minimumnya.




(https://www.boost.org/doc/libs/1_74_0/libs/graph_parallel/doc/html/boman_et_al_graph_coloring.html)
Gambar 2.4. Pewarnaan graf

Ada beberapa algoritma yang bias digunakan pada pewarnaan graf, salah satunya ialah algoritma Welch-Powell, berikut adalah cara kerja algoritmanya.

1. *Vertex* pada graph G diurutkan sesuai dengan jumlah *degree* secara menurun (besar ke kecil).
2. Warnai *vertex* yang belum diwarnai dengan *degree* yang paling besar lalu warnai juga *vertex* lain yang tidak bertetangga dengan *vertex* awal dengan warna yang sama.
3. Jika warna tadi sudah tidak bisa untuk mewarnai *vertex* laun, lanjut dengan warna lain dan lakukan sesuai langkah 2 hingga semua *vertex* diwarnai.

## *C. Polinomial kromatik*

Sebelumnya telah dibahas bahwa suatu graf memiliki suatu bilangan kromatik warna yakni $\chi(G) = \lambda$. Pada permainan Sudoku yang graphnya sudah pasti terdiri dari 9x9 = 81 *vertex* dengan setiap *vertex*nya memiliki tetangga sebanyak 8+8+8 = 24, dapat dicari untuk berapa banyak variasi dari permainan Sudoku ini dengan sebuah metode yakni polynomial kromatik.

Polinomial kromatik biasanya dinotasikan dengan $P_G(t)$, dengan G adalah graf dan t adalah $\lambda$ pada bilangan kromatik sehingga notasinya menjadi $P_G(\lambda)$.

**Teorema 1.** (Dong dkk, 2005) Jika diberikan sebuah graf G dengan orde n, maka polynomial kromatik dari graf G adalah $P_G(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(G,i)(\lambda)_i$ dengan $\alpha(G,i)$ banyak kemungkinan partisi $V(G)$ dalam i himpunan bagian.

Sehingga pada permainan Sudoku banyak kombinasi permainannya yakni adalah :

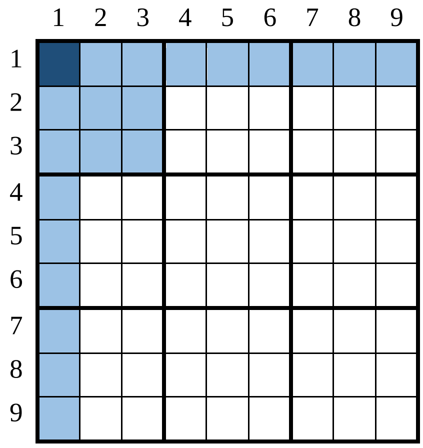
$$\begin{aligned} P_{Sudoku}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{10}(\lambda-2)^{10}(\lambda-3)^{10}(\lambda-4)^{5}(\lambda \\ &\qquad -5)^{10}(\lambda-6)^{10}(\lambda-7)^{10}(\lambda-8)^{10} \\ &= \lambda(\lambda-1)^{10}(\lambda-2)^{10}(\lambda-3)^{10}(\lambda-4)^{5}(\lambda \\ &\qquad -5)^{10}(\lambda-6)^{10}(\lambda-7)^{10}(\lambda-8)^{10} \\ &\approx 1{,}02199258 \times 10^{47} \end{aligned}$$

Maka pada permainan Sudoku ada sebanyak $1{,}02199258 \times 10^{47}$ banyak kombinasi permainan.

# III. PEMBAHASAN

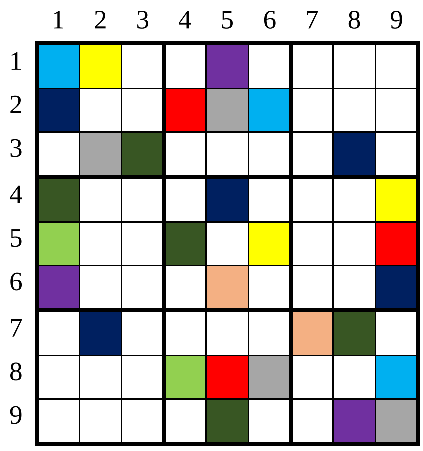
## *A. Pencarian Solusi Sudoku dengan Pewarnaan Graf*

Permainan Sudoku dapat di representasikan dengan menggunakan graf, yakni dengan menganggap semua kotak pada Sudoku adalah *vertex*-nya dan semua *vertex* yang sekolom, sebaris, dan pada kotak 3x3 kecil adalah saling adjacency. Sehingga dapat digambarkan sebagai berikut.




Gambar 3.1. Sudoku 9x9

Langkah pertama dalam memecahkan Sudoku dengan graf adalah dengan mengubah semua angkanya menjadi warna-warna yang berbeda setiap angka, yakni ada 9 warna sesuai dengan angka yang ada. Misalkan pada Sudoku Gambar 2.5 akan menjadi seperti berikut.



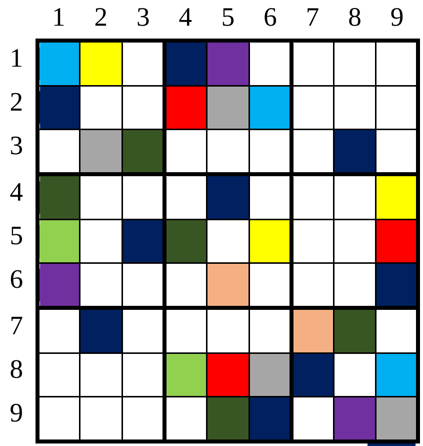

Gambar 3.2. Pewarnaan awal sudoku

Yakni dengan mengganti :

a. 1 = (3)
b. 2 = (2)
c. 3 = (3)
d. 4 = (2)
e. 5 = (3)
f. 6 = (5)
g. 7 = (3)
h. 8 = (5)
i. 9 = (4)

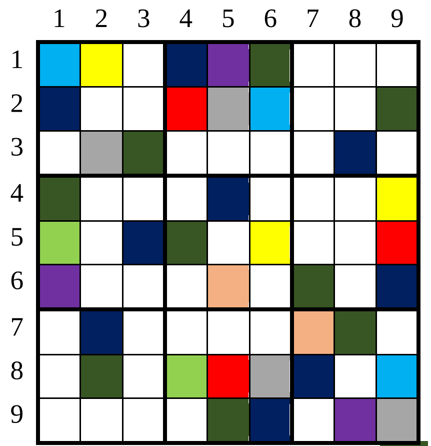
Setelah mengubah angka menjadi warna, langkah selanjutnya adalah dengan memberikan warna sisanya. Bagaimana caranya? Yaitu dengan memberikan memberikan warna pada suatu *vertex* dengan memperhatikan apakah pada *vertex* tersebut bertetanggaan dengan *vertex* yang memiliki warna yang sama. Berikut adalah langkah-langkahnya untuk Sudoku sesuai Gambar 3.2.

Agar lebih mudah maka kita lihat dulu manakah warna yang telah diisi paling banyak, yakni antara warna hijau tua atau biru tua. Maka pada dipilih *vertex* (1,4), (5,3), (9,6), (8,7) untuk diwarnai biru tua. Dan keempat *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



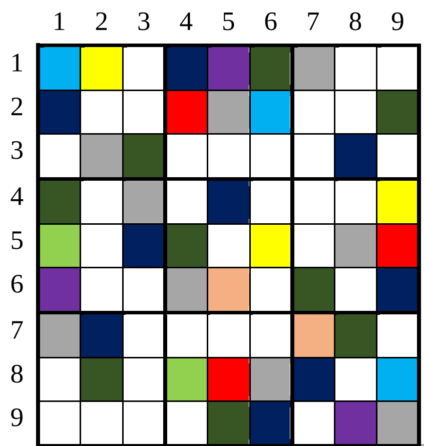

Gambar 3.3. Pewarnaan biru tua

Selanjutnya pilih *vertex* (1,6), (2,9), (6,7), (8,2) untuk diwarnai dengan warna hijau tua. Dan keempat *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



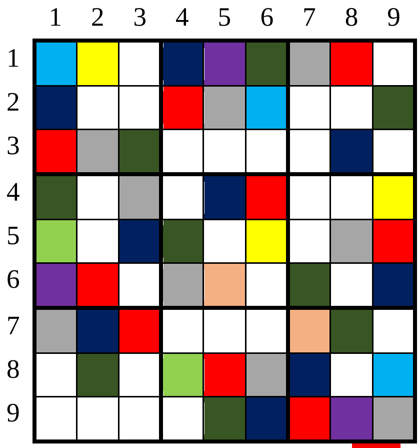

Gambar 3.4. Pewarnaan hijau tua

Selanjutnya pilih untuk warna abu-abu yang sudah berjumlah 4. Pilih *vertex* (7,1), (4,3), (6,4), (1,7), (5,8) untuk diwarnai dan kelima *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



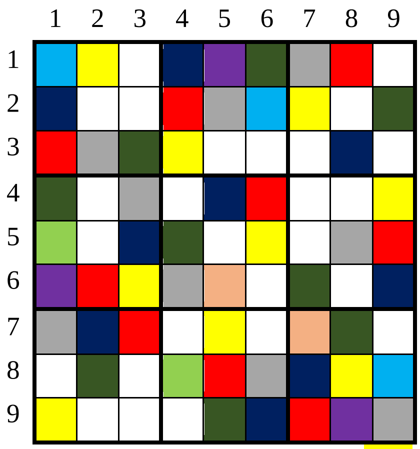

Gambar 3.5. Pewarnaan abu-abu

Selanjutnya bebas memilih warna merah, kuning, biru, ungu karena memiliki jumlah yang sama-sama 3. Pilih secara urut saja, yakni merah. Oleh karena itu pilih *vertex* (4,6), (6,2), (7,3), (3,1), (1,8), (9,7) untuk diwarnai dan keenam *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



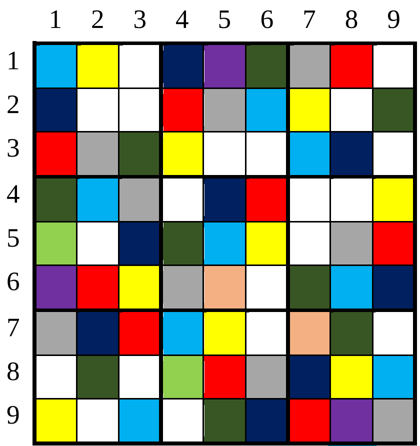

Gambar 3.6. Pewarnaan merah

Selanjutnya untuk warna kuning pilih *vertex* (6,3), (9,1), (8,8), (7,5), (3,4), (2,7) dan keenam *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



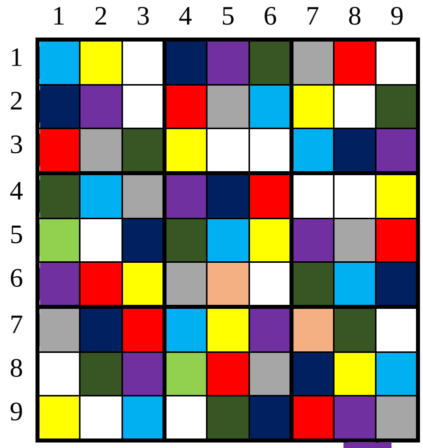

Gambar 3.7. Pewarnaan kuning

Selanjutnya untuk warna biru pilih *vertex* (3,7), (6,8), (4,2), (7,4), (5,5), (9,3) dan keenam *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



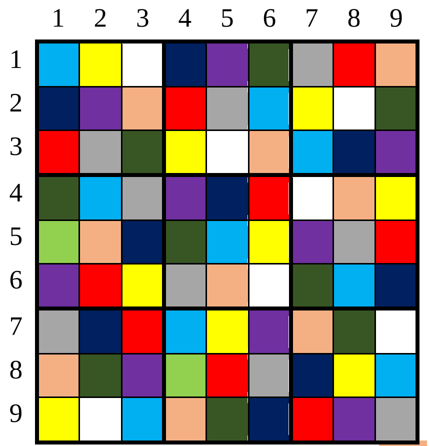

Gambar 3.8. Pewarnaan biru

Selanjutnya untuk warna ungu pilih *vertex* (2,2), (4,4), (3,9), (5,7), (7,6), (8,3) dan keenam *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.



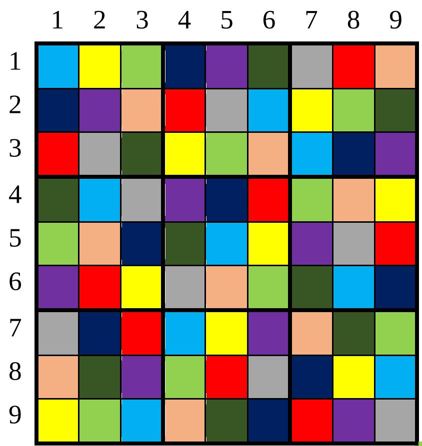

Gambar 3.9. Pewarnaan ungu

Selanjutnya bebas memilih oranye atau hijau muda karena memiliki jumlah yang sama-sama 2. Pilih secara urut saja, yakni oranye. Oleh karena itu pilih *vertex* (2,3), (3,6), (1,9), (5,2), (4,8), (8,1), (9,4) untuk diwarnai dan ketujuh *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.




Gambar 3.10. Pewarnaan oranye

Selanjutnya terakhir adalah warna hijau muda pilih sisa *vertex* yakni (1,3), (2,8), (3,5), (4,7), (6,6), (7,9), (9,2) dan ketujuh *vertex* tersebut telah memenuhi untuk aturan pewarnaan.




Gambar 3.11. Pewarnaan hijau muda

Langkah terakhir ialah mengembalikan warna pada Sudoku menjadi angka semula hingga menjadi :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

Gambar 3.12. Hasil Sudoku

### *B. Penyelesaian pada Sudoku*

Sebelumnya pada teori dasar diketahui bahwa ada banyak sekali variasi kombinasi dari permainan Sudoku. Namun, pada permainan Sudoku sendiri biasanya diberikan beberapa angka pada beberapa kotak, pertanyaannya adalah apakah setiap Sudoku ini ada solusi penyelesaiannya?

**Teorema 2.** Jika ada suatu graf dengan bilangan kromatik $\chi(G)$ dan pewarnaan parsial dari graf tersebut menggunakan $\chi(G) - 2$ warna. Jika pewarnaan parsial merupakan penyelesaian, maka ada minimal 2 cara untuk solusi pewarnaan yang lain.

Dalan pewarnaan awal parsial pada awal belum menggunakan 2 warna tadi, oleh karena itu 2 warna ini bisa ditukar-tukar sehingga terdapat solusi pewarnaan yang lain.

Oleh karena itu, pada Sudoku yang berukuran 9x9 dibutuhkan minimal 8 warna pada awal pewarnaan supaya memiliki penyelesaian tunggal. Dan selama angka yang diberikan pada Sudoku mematuhi aturan Sudoku itu sendiri yakni tidak ada angka yang double atau lebih pada baris, kolom, atau subkisi (3x3) –nya, maka setiap permainan Sudoku pasti memiliki penyelesaian.

Setelah terjawab untuk pertanyaan apakah setiap Sudoku memiliki penyelesaian, selanjutnya muncul pertanyaan baru yakni apakah setiap Sudoku memiliki penyelesaian unik? Di bawah ini merupakan contoh Sudoku dengan 2 penyelesaian berbeda pada contoh Sudoku yang telah diselesaikan pada bagian A.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 4 | 2 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

Gambar 3.13. Sudoku dengan 2 penyelesaian

Melihat Sudoku diatas, maka terliat bahwa akan ada setidaknya 2 solusi dengan menukar posisi seperti pola di atas. Sudoku akan tetap valid jika kita lakukan tindakan diantaranya:

1. saling menukar antara elemen pada barisnya, missal ada *vertex* (1,1), (1,2), (1,3) menjadi (1,1), (1,3), (1,2) atau yang lain sehingga ada 3! = 6 cara. Pada kolompun juga berlaku hal demikian, sehingga total ada 62 cara untuk merubahnya,
2. menukar baris atau kolom pada Sudoku,
3. merotasi Sudoku, dll

Setelah terjawab pertanyaan bahwa Sudoku dapat memiliki lebih dari 1 penyelesaian maka muncul pertanyaan baru yakni, dalam kondisi apa saja Sudoku bisa memiliki solusi lebih dari 1? Sudoku setidaknya harus terdiri dari 17 angka di awal, jika kurang dari 17 angka maka solusi dari Sudoku akan lebih dari 1 (tidak unik). Tidak ada yang pernah menemukan dengan 16 angka Sudoku di awal permainan akan menghasilkan solusi yang unik. Ide dari permasalahan ini adalah dengan memeriksa semua subkisi yang mungkin diselesaikan untuk setiap teka-teki dengan 16 petunjuk di awal, dengan menggunakan "algoritma hitting-set" yang telah dibuat oleh McGuire. Dan hasil yang didapat darinya ialah tidak ada Sudoku 16 petunjuk yang menghasilkan solusi unik. Oleh karena itu untuk mendapat solusi unik pada Sudoku dibutuhkan **minimal** 17 petunjuk di awal.

## IV. KESIMPULAN

Sudoku merupakan permainan teka-teki mengenai angka tunggal pada matriks 9x9. Penyelesaian Sudoku dapat dicari dengan metode pewarnaan graf dengan langkah :

1. Mengubah angka pada Sudoku menjadi warna-warna.
2. Merepresentasikan setiap kotak pada Sudoku sebagai *vertex* dan *vertex* yang sebaris, sekolom, dan se-subkisi sebagai tetangganya.
3. Melakukan pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma Welch-Powell.
4. Mengembalikan warna yang diubah menjadi angka semula.

Sudoku minimal harus terdiri dari 17 angka di awal, jika kurang dari 17 angka maka solusi dari Sudoku akan lebih dari 1 (tidak unik).

Sudoku akan tetap valid jika kita lakukan tindakan diantaranya:

1. saling menukar antara elemen pada barisnya, missal ada *vertex* (1,1), (1,2), (1,3) menjadi (1,1), (1,3), (1,2) atau yang lain sehingga ada 3! = 6 cara. Pada kolompun juga berlaku, sehingga total ada 62 cara untuk merubahnya,
2. menukar baris atau kolom pada Sudoku,
3. merotasi Sudoku, dll

## V. UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan selesainya makalah ini, perkenankanlah saya menyampaikan rasa syukur kehadirat Allah SWT atas kehendak-Nya yang telah memberikan kemudahan dalam penyelesaian tugas makalah ini.

Selanjutnya saya menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Rinaldi Munir atas bimbingannya dalam mata kuliah Matematika Diskrit,
2. Orang tua yang telah men-support saya selama pengerjaan makalah ini

sehingga makalah ini dapat diselesaikan.

## REFERENCES

[1] N. Jesus, “Graph Theory — Basic Properties”, https://towardsdatascience.com/graph-theory-basic-properties-955fe2f61914.

[2] J. W. Robin, *Introduction to Graph fourth edition*, England, 1998.

[3] Rinaldi, Munir. 2005. *Matematika Diskrit*, edisi ke-3. Bandung : Informatika

[4] Wirdasari, D. (2011). Teori graph dan implementasinya dalam ilmu komputer, 10(1), 23–34.

[5] Studi, P., & Informatika, T. (n.d.). Jembatan konigsberg, 1–10.

[6] M. H. Agnes, M. R. Murty. “Sudoku Square and Chromatic Polynomials”, http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf.

[7] Dong, dkk. 2005. *Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs*. SingaporeL B & JO Enterprise.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2020

Roby Purnomo (13520106)