Bahan kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 1)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah sekumpulan objek yang *berbeda*.

- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

- HMIF adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

- Satu set komputer desktop terdiri dari CPU, monitor, dan keyboard

- Himpunan mahasiswa

- Satu *set* mainan huruf (huruf besar dan kecil)

- Perhatikan bedanya:

  {1, 2, 3, 4, 5, 6 } → Himpunan (*set*)

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} → Himpunan-ganda (*multi-set*)
  → Ada elemen yang berulang (ganda)

- Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting

  {a, b, c, d} = {d, b, a, c}

- Setiap elemen di dalam himpunan boleh tidak berkorelasi satu sama lain, yang penting BERBEDA satu sama lain

  { 56, Rp3000, Amir, cacing, Silver Queen, -45° C , paku}

Cara Penyajian Himpunan

1. **Enumerasi**

   Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

   Contoh 1.

   - Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
   - C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
   - $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
   - $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
   - $K = \{ \{\} \}$
   - Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
   - Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.** Misalkan:

  $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$

  $K = \{\{\}\}$

  maka

  $3 \in A$

  $\{a, b, c\} \in R$

  $c \notin R$

  $\{\} \in K$

  $\{\} \notin R$

Contoh 3. Jika $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

$\mathbf{Z}^+$ = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, … }

Q = himpunan bilangan rasional = $\{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}$ dan $b \neq 0\}$

= {…, -3/4, -4/5, 2/3, 1/2, … } = {…, -0.6, -0.8, 0.666…}

R = himpunan bilangan riil

$\mathbf{R}^+$ = himpunan bilangan riil positif

C = himpunan bilangan kompleks = $\{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U atau S.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan
bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

3. ***Notasi Pembentuk Himpunan***

- Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh 4.

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau $A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 5 \} = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil mata kuliah IF2120}

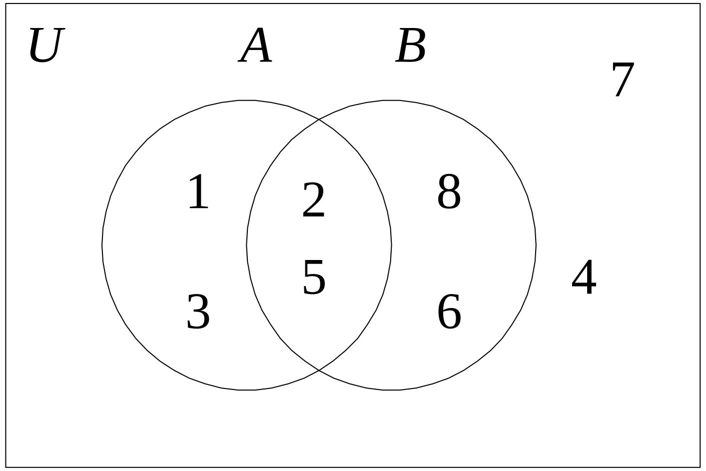
4. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.
Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = n(B) = 8$

(ii) $T = \{$kucing, a, Amir, 10, paku, laptop$\}$, maka $|T| = 6$

(iii) $A = \{2, \{2, 3\}, \{4\}, 6, \{\{7\}\} \}$, maka $|A| = 5$

(iv) $C = \varnothing$, maka $n(C) = 0$

(v) $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x < 5000 \}$, maka $n(D) = 4999$

(vi) $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \geq 5000 \}$, maka $n(D)$ tak berhingga

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau {}

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$
(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu $\varnothing$.

Himpunan Bagian (*Subset*)

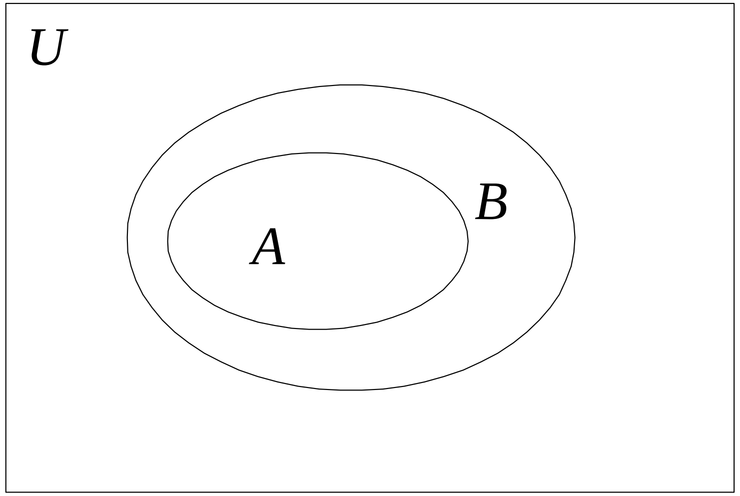
- Notasi: $A \subseteq B$
- Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.

- Secara formal: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

- A adalah *subset* dari B.

  Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A,*

  $B \supseteq A$



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

(v) A = {3, 9}, B = {5, 9, 1, 3}, $A \subseteq B$? benar

(vi) A = {3, 3, 3, 9}, B = {5, 9, 1, 3}, $A \subseteq B$? benar

(vii) A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}, $A \subseteq B$? salah

- $\varnothing \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A
- $A \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan *A* disebut himpunan bagian tak-sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

Contoh: *A* = {1, 2, 3}, maka

{1, 2, 3} dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari *A*.

{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} adalah *proper subset* dari A

- *A* dikatakan *proper subset* dari *B* jika:

(i) setiap elemen dari *A* juga elemen dari *B* (dengan kata lain $A \subseteq B$), dan

(ii) sekurang-kurangnya ada satu elemen di *B* yang tidak ada di *A*

- Perhatikan bahwa $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

- A disebut himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
- Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  Jadi, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Contoh: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

- Latihan

  Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {1, 2, 3, 4, 5}. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

<u>Jawaban</u>:

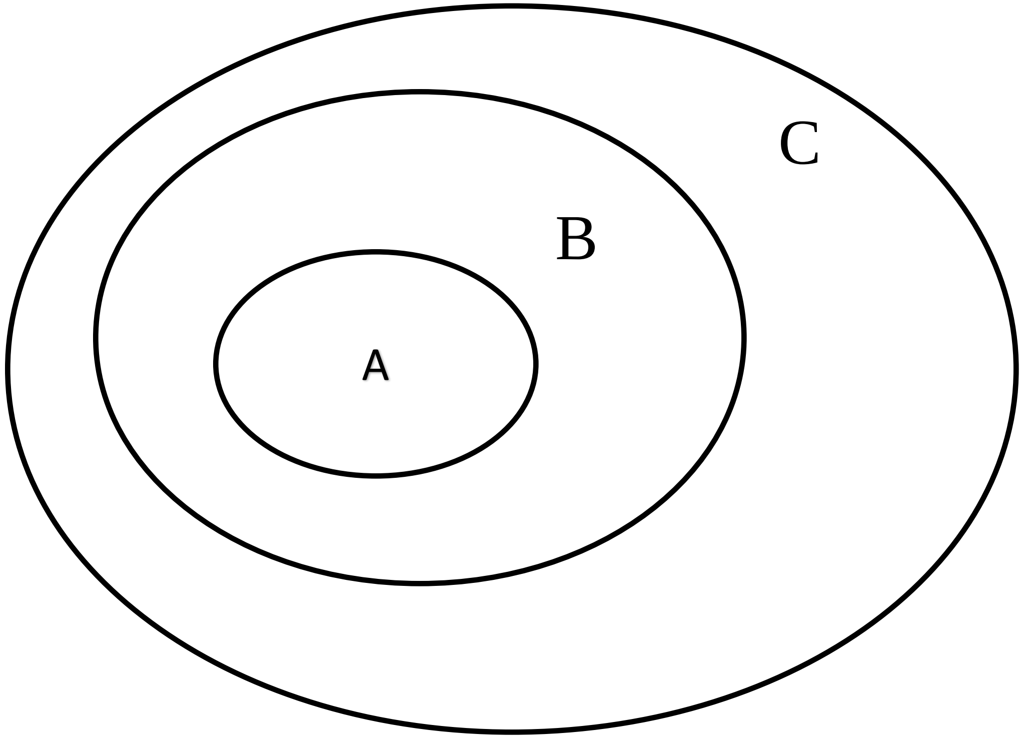
Data: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, lalu $A \subset C$ dan $C \subset B$

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B.

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B.

- Jika A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ C maka A $\subseteq$ C



Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 5, 5, 8, 8\}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iv) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

(iv) A = {anjing, kucing, kuda}, B = {kucing, kuda, tupai, anjing}, maka $A \neq B$

- Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:
  - (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
  - (b) jika $A = B$, maka $B = A$
  - (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

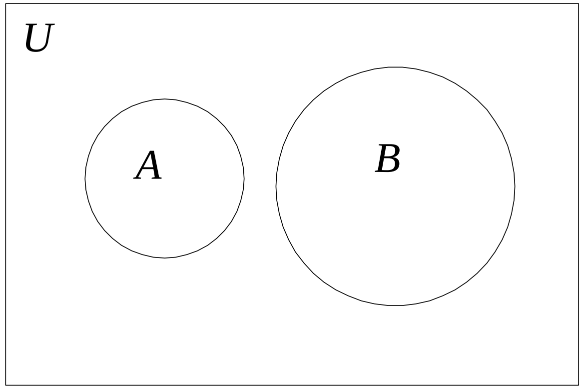
Contoh 10. Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : A // B

- Diagram Venn:



Contoh 11. Jika A = { x | x $\in$ **P**, x < 8 } dan B = { 10, 20, 30, ... }, maka A // B.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A.
- Notasi: P(A) atau 2^A
- Jika |A| = *m*, maka |P(A)| = 2^m.

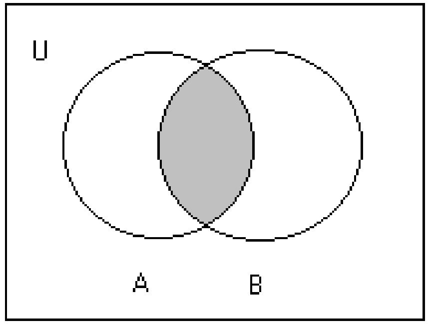
Contoh 12. Jika A = { 1, 2 }, maka P(A) = 2^A = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}, dan |P(A)| = 4

Contoh 13. Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) ={∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅ , {∅}}.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

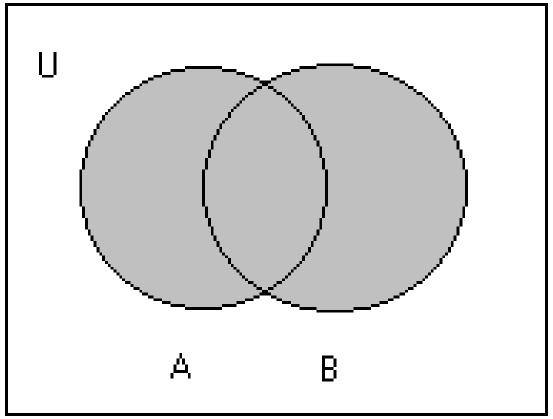
- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh 14.
(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: A // B

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



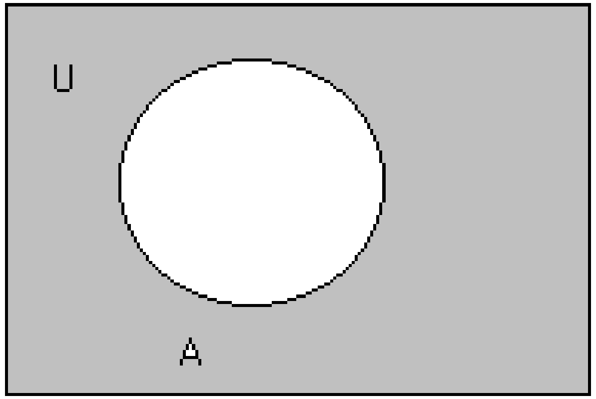
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

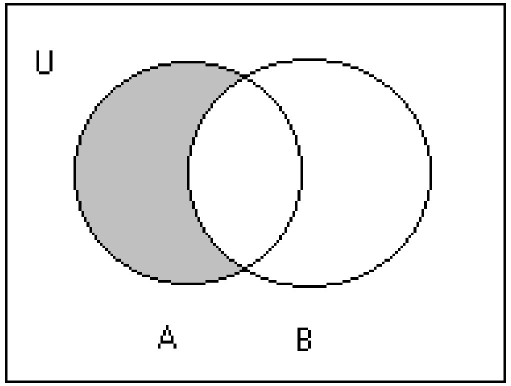
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



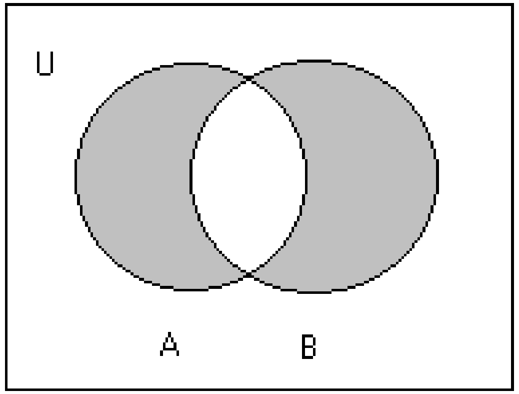
Contoh 18.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. **Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)**

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $\left| A \times B \right| = \left| A \right| \,.\, \left| B \right|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

5. Perkalian kartesian dari dua himpunan atau lebih didefinisikan sebagai: $\mathrm{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i}$ for $\mathrm{1 \leq i \leq n\}}$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

<u>Jawab</u>:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\emptyset)$ (b) $\emptyset \times P(\emptyset)$ (c) $\{\emptyset\} \times P(\emptyset)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:

(a) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(b) $\emptyset \times P(\emptyset) = \emptyset$ (ket: jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$ maka $A \times B = \emptyset$)

(c) $\{\emptyset\} \times P(\emptyset) = \{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \emptyset, \{3\} \}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}\} \}$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$

(c) $A - P(A) = A$

(d) $\{A\} \in P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$

Jawaban:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$ → salah, seharusnya $A \cap P(A) = \varnothing$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$ → benar

(c) $A - P(A) = A$ → benar

(d) $\{A\} \in P(A)$ → salah, seharusnya $\{A\} \subseteq P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$ →) salah, seharusnya $A \in P(A)$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha),$
$(2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$

(iii) Misalkan A = {a, b}, B = {5, 6}, C = {x, y, z}

maka, A × B × C = {(a, 5, x), (a, 5, y), (a, 5, z},
(a, 6, x), (a, 6, y), (a, 6, z),
(b, 5, x), (b, 5, y), (b, 5, z),
(b, 6, x), (b, 6, y), (b, 6, z)}