Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika, Realsi Rekurens, Ajabar Boolean
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Fariska Zakhralativa, Nur Ulfa Maulidevi
Kamis, 8 November 2020
Waktu: 60 menit

1. Tulis ulang pernyataan berikut (jika **tidak** menuliskannya, maka ujian tidak akan diperiksa, nilai langsung 0): "Saya menyatakan bahwa saya mengerjakan kuis ini dengan sejujur-jujurnya, tanpa bantuan orang lain dan tanpa menggunakan cara yang tidak dibenarkan. Apabila pada kemudian hari diketahui saya mengerjakan kuis ini dengan cara yang tidak jujur, saya bersedia mendapatkan konsekuensinya, yaitu mendapatkan nilai E pada mata kuliah IF22120 Semester 1 2020/2021. " (Nilai: 2)

2. Tentukan hasil dari (6^{2000} mod 13 + 12^{1920} mod 13) mod 11

(Nilai: 15)

Jawaban:

Dengan menggunakan teorema fermat, maka berlaku

$$6^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$12^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
6^{2000} \bmod 13 &\equiv (6^{12})^{166 \cdot 8} \bmod 13 \\
&\equiv (1)^{166}\, 6^{8} \bmod 13 \\
&\equiv 6^{8} \bmod 13 \\
&\equiv (6^{2})^{4} \bmod 13 \\
&\equiv (6^{2} \bmod 13)^{4} \bmod 13 \\
&\equiv (36 \bmod 13)^{4} \bmod 13 \\
&\equiv (10)^{4} \bmod 13 \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12^{1920} \bmod 13 &\equiv (12^{12})^{160} \bmod 13 \\
&\equiv (1)^{160} \bmod 13 \\
&\equiv 1 \bmod 13 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dari kedua perhitungan di atas, dapat dihitung

$$(6^{2000} \bmod 13 + (12)^{1920} \bmod 13) \bmod 11 = (3 + 1) \bmod 11 = 4$$

3. Sebuah buku memiliki kode ISBN 0-30X5-4561-Y dan memenuhi 3X mod 11 = 1, serta Y adalah karakter uji. Tentukan semua pasangan X dan Y yang mungkin.

(Nilai: 15)

Jawaban:

Pertama, cari terlebih dahulu X nya

$$3X = 1 + 11n$$

$$X = (1 + 11n) / 3$$

Karena X haruslah bilangan bulat < 10, maka X yang memenuhi adalah 4.

Setelah itu kita cari Y nya.

Karena Y adalah karakter uji, maka berlaku

$$\left(\sum_{i=1}^{9} i.a_i\right) \bmod 11 = Y$$

Maka

$$(1*0 + 2*3 + 3*0 + 4*4 + 5*5 + 6*4 + 7*5 + 8*6 + 9*1) \bmod 11 = 163 \bmod 11 = 9$$

Sehingga Y nya 9

Jadi pasangan X dan Y yang memenuhi adalah X = 4 dan Y = 9

4. Rahman berkata kepada Rubi: Sebuah bilangan bulat jika dikali dengan 3 lalu hasi kalinya dibagi dengan 5 menyisakan 1, dan jika dikali dengan 2 lalu hasil kalinya dibagi dengan 7 menyisakan 3. Berapakah bilangan bulat tersebut? Temukan tiga bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi jawaban pertanyaan Rahman tersebut.

(Nilai: 20)

Jawaban:

Sistem kekongruenan linier yang diperoleh adalah:

$3x \equiv 1 \pmod 5$ (1)

$2x \equiv 3 \pmod 7$ (2)

Dari kekongruenen 1:

$3x = 1 + 5k1 \rightarrow x = (1 + 5k1)/3$ (3)

Sulihkan (3) ke dalam (2):

$2((1 + 5k1)/3) \equiv 3 \pmod 7$ (kalikan kedua ruas dengan 3)

$2 + 10k1 \equiv 9 \pmod 7$

$10k1 \equiv 7 \pmod 7$

$10k1 \equiv 0 \pmod 7$

$k1 \equiv 0 \pmod 7 \rightarrow k1 = 7k2$ (4)

Sulihkan (4) ke dalam (3):

$x = (1 + 5(7k2))/3 = (1 + 35k2)/3$

Untuk k2 = 1, diperoleh x = (1 + 35)/3 = 12

Dua bilangan bulat lainnya adalah: 12 + 35 = 47 dan 47 + 35 = 82

5. Berapa banyak string 10 bit yang diawali dengan tiga buah 0 berurutan **atau** diakhiri dengan dua buah 0 berurutan?

(Nilai: 15)

Jawaban:

Ada tiga kasus:

Kasus 1: String diawali dengan 3 buah 0 berurutan

Aturan perkalian

$1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ string

Kasus 2: String diakhiri dengan 2 buah 0 berurutan

Aturan perkalian

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2^8 = 256$ string

Kasus 3: String diakhiri dengan 3 buah 0 DAN diakhiri dengan 2 buah 0

Aturan perkalian

$1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2^5 = 32$ string

Maka, banyaknya string yang memenuhi kondisi adalah 128 + 256 - 32 = 352 string

6. Pada suatu ruangan galeri, akan dipajang 9 macam lukisan berbeda dengan posisi berjajar. Tentukan banyaknya posisi yang mungkin jika terdapat 3 lukisan yang harus selalu dipajang berdampingan!

(Nilai: 15)

Jawaban:

Misalkan lukisan diberi nomor 1 sampai dengan 9 dan 3 lukisan yang selalu berdampingan adalah 7,8,9 , sehingga :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- Banyaknya kemungkinan posisi ketujuh lukisan (3 lukisan berdampingan terhitung 1 lukisan) adalah sebanyak P(7,7) = 7!
- Banyaknya kemungkinan perubahan posisi 3 buah lukisan yang berdampingan adalah P(3,3) = 3!

Sehingga diperoleh banyaknya posisi yang mungkin adalah 3!7! = 30240 macam.

7. Aulia adalah seorang mahasiswi yang mengikuti SPARTA 2020. Suatu hari, ia menghubungi Kak Ojan untuk melakukan tugas wawancara. Kak Ojan memberikan syarat wawancara berupa 5 orang pewawancara dari kelompok yang sama termasuk Aulia dan harus mengandung minimal 1 laki-laki dan 1 perempuan. Jika 1 kelompok SPARTANS 2020 memiliki 8 laki-laki dan 4 perempuan, berapa banyak kombinasi wawancara yang dapat dilakukan?

(Nilai: 20)

Jawaban:

Karena dari 5 orang pewawancara pasti mengandung Aulia yang merupakan perempuan, maka bentuk kombinasi yang mungkin dari 4 orang sisanya adalah 4 laki-laki, 3 laki-laki dan 1 perempuan, 2 laki-laki dan 2 perempuan, dan 1 laki-laki dan 3 perempuan.

a) 4 Laki-laki

C(8, 4) * C(3, 0) = 70 * 1 = 70

b) 3 laki-laki dan 1 perempuan

C(8, 3) * C(3, 1) = 56 * 3 = 168

c) 2 laki-laki dan 2 perempuan

C(8, 2) * C(3, 2) = 28 * 3 = 84

d) 1 laki-laki dan 3 perempuan

C(8, 1) * C(3, 3) = 8 * 1 = 8

Total banyak solusi = 70 + 168 + 84 + 8 = 330

8. (Soal Bonus) Tentukan 2 angka terakhir dari 3^{1234}! (Nilai: 10)

Jawaban:

Untuk mengetahui 2 angka terakhir, dipakai mod 100.

$3^{1234} (\text{mod } 100) \equiv 3^{1234}$(mod 100)

$\equiv (3^5)^{206}\ x\ 3^4$(mod 100)

$\equiv (243)^{206} x\ 81$(mod 100)

$\equiv (43)^{2\ x\ 103} x\ 81$(mod 100)

$\equiv (49)^{103} x\ 81$(mod 100)

$\equiv (49)^{2\ x\ 51\ +\ 1} x\ 81$(mod 100)

$\equiv (1)^{51} x\ 49\ x\ 81$(mod 100)

$\equiv$ 3969 mod 100

$\equiv$ 69 mod 100