

Relasi dan Fungsi

Bagian 1

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

Pengantar Matriks

- Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.

- Dalam notasi ringkas, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi $A = [a_{ij}]$.
- **Contoh 1.** Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks simetri adalah matriks yang $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j .
- **Contoh 2.** Di bawah ini adalah contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks *zero-one* (0/1) atau matriks biner adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.
- **Contoh 3.** Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relasi



- Jika terdapat dua himpunan A dan B , bagaimana menyatakan hubungan antara anggota kedua himpunan tersebut?
- Kita bisa menggunakan pasangan terurut (*ordered pairs*) (a, b) untuk menghubungkan a dan b , yang dalam hal ini $a \in A$ dan $b \in B$.
- Kita katakan a dihubungkan dengan b oleh sebuah **relasi**.

Contoh 1: Misalkan

$$A = \{\text{Hasan, Tanti, Rommi, Yusuf, Aditya}\}$$

adalah himpunan mahasiswa,

$$B = \{\text{Toyota, Daihatsu, Mercedes, VW}\}$$

adalah himpunan kendaraan.

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mahasiswa dan mobil yang dikendarainya.

$$R = \{(\text{Hasan, Daihatsu}), (\text{Rommi, Toyota}), (\text{Yusuf, Mercedes}), \\ (\text{Aditya, Toyota})\}$$

Ini berarti Hasan mengendarai Daihatsu, Rommi mengendarai Toyota, Yusuf mengendarai Mercedes, dan Aditya mengendarai Toyota. Tanti tidak mengendarai mobil apapun. Mobil VW tidak dikendarai siapapun di dalam relasi itu.

Contoh 2: Misalkan

$$A = \{\text{Daffa, Yosef, Harkunti, Mahendra, Wayan}\}$$

adalah himpunan mahasiswa,

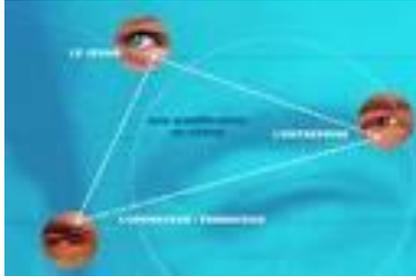
$$B = \{A, AB, B, BC, C, D, E\}$$

adalah himpunan nilai.

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mahasiswa dan nilai mata kuliah Matdis yang diperolehnya pada semester ganjil.

$$R = \{(\text{Daffa}, BC), (\text{Yosef}, A), (\text{Harkunti}, A), (\text{Mahendra}, B)\}$$

Ini berarti Daffa mendapat BC, Yosef mendapat A, Harkunti mendapat A, Mahendra mendapat B. Wayan tidak mengambil mata kuliah Matdis. Tidak ada mahasiswa yang mendapat C, D, dan E.



Definisi Relasi



- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- $a R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R
- $a \not R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R .
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R , dan himpunan B disebut daerah hasil (*kodomain*) dari R .

Contoh 3. Misalkan $A = \{\text{Amir, Budi, Cecep}\}$ dan $B = \{\text{IF221, IF251, IF342, IF323}\}$ maka

$$A \times B = \{(\text{Amir, IF221}), (\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF342}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Budi, IF342}), (\text{Budi, IF323}), (\text{Cecep, IF221}), (\text{Cecep, IF251}), (\text{Cecep, IF342}), (\text{Cecep, IF323})\}$$

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

$$R = \{(\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Cecep, IF323})\}$$

Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,

- A adalah daerah asal R , dan B adalah daerah hasil R .
- $(\text{Amir, IF251}) \in R$ atau Amir R IF251
- $(\text{Amir, IF342}) \notin R$ atau Amir \notin IF342.

Contoh 4. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

Relasi pada Sebuah Himpunan

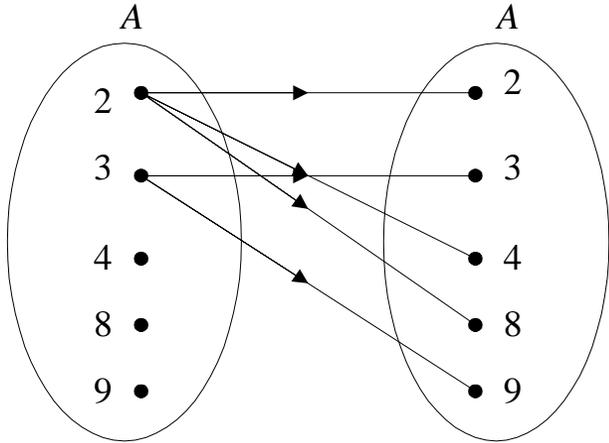
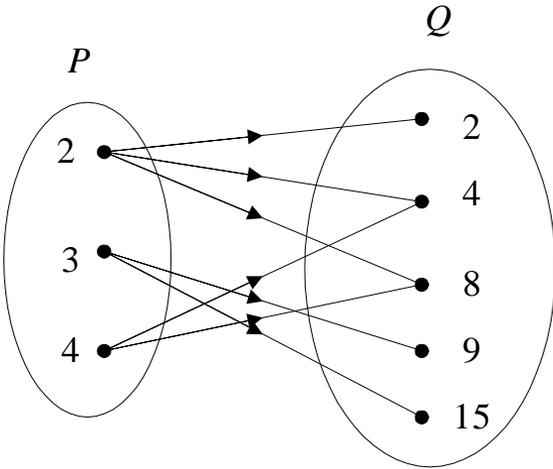
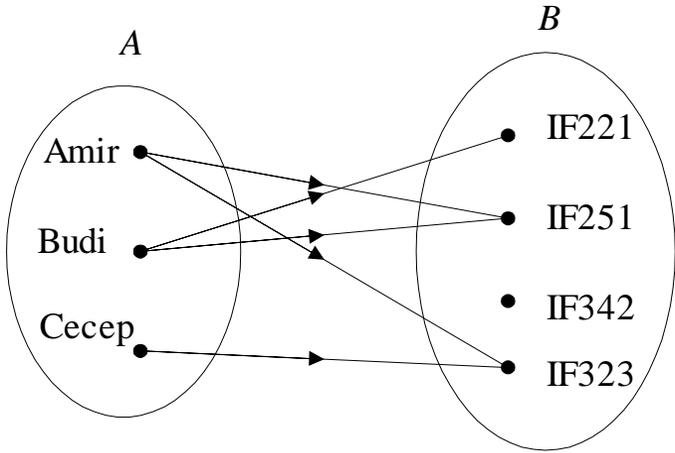
- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.
- Notasi: $R \subseteq A \times A$

Contoh 5. Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y .
Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah



2. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 1

<i>A</i>	<i>B</i>
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2

<i>P</i>	<i>Q</i>
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 3

<i>A</i>	<i>A</i>
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & \left[\begin{array}{cccc} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{array} \right. \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_m & \end{matrix}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 6. Relasi R pada Contoh 3 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini, $a_1 = \text{Amir}$, $a_2 = \text{Budi}$, $a_3 = \text{Cecep}$, dan $b_1 = \text{IF221}$, $b_2 = \text{IF251}$, $b_3 = \text{IF342}$, dan $b_4 = \text{IF323}$.

Relasi R pada Contoh 4 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

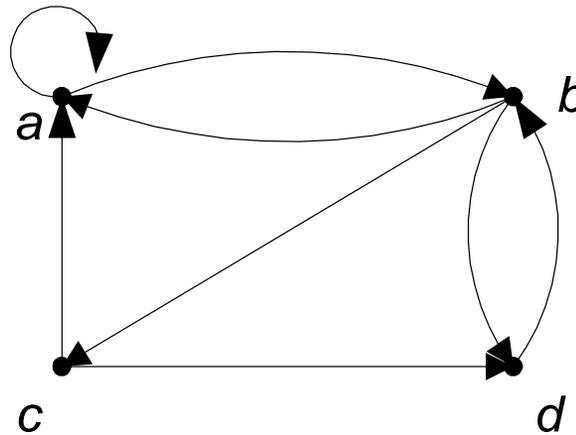
yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

4. *Representasi Relasi dengan Graf Berarah*

- Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)
- Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b . Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).
- Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Contoh 7. Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



Sifat-sifat Relasi

- Relasi yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat.

1. Refleksif (*reflexive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.
- Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 8. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A , maka

- (a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a) , yaitu $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, dan $(4, 4)$.
- (b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$.

Contoh 9. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh 10. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif \mathbf{N} .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 5, \quad T : 3x + y = 10$$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan $(2, 2)$ bukan anggota R , S , maupun T .

■

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

2. Menghantar (*transitive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 11. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A , maka

- (a) $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bersifat menghantar. Lihat tabel berikut:

Pasangan berbentuk		
(a, b)	(b, c)	(a, c)
$(3, 2)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$
$(4, 2)$	$(2, 1)$	$(4, 1)$
$(4, 3)$	$(3, 1)$	$(4, 1)$
$(4, 3)$	$(3, 2)$	$(4, 2)$

- (b) $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak menghantar karena $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$, tetapi $(2, 2) \notin R$, begitu juga $(4, 2)$ dan $(2, 3) \in R$, tetapi $(4, 3) \notin R$.
- (c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ jelas menghantar
- (d) Relasi $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.
- (e) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti $R = \{(4, 5)\}$ selalu menghantar.

Contoh 12. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa a habis membagi b dan b habis membagi c . Maka terdapat bilangan positif m dan n sedemikian sehingga $b = ma$ dan $c = nb$. Di sini $c = nma$, sehingga a habis membagi c . Jadi, relasi “habis membagi” bersifat menghantar.

Contoh 13. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif \mathbf{N} .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 6, \quad T : 3x + y = 10$$

- R adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.
- S tidak menghantar karena, misalkan $(4, 2)$ dan $(2, 4)$ adalah anggota S tetapi $(4, 4) \notin S$.
- $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ tidak menghantar.

- Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya
- Tetapi, sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari a ke b dan dari b ke c , maka juga terdapat busur berarah dari a ke c .

3. Setangkup (*symmetric*) dan tolak-setangkup (*antisymmetric*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$.
- Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.
- Relasi R pada himpunan A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$ disebut **tolak-setangkup**.
- Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

Contoh 14. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A , maka

- a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$. Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.
- b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak setangkup karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.
- c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ tolak-setangkup karena $1 = 1$ dan $(1, 1) \in R$, $2 = 2$ dan $(2, 2) \in R$, dan $3 = 3$ dan $(3, 3) \in R$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.
- d) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$ dan, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$ dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

- e) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$ tidak tolak-setangkup karena $2 \neq 4$ tetapi $(2, 4)$ dan $(4, 2)$ anggota R . Relasi R pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.
- f) Relasi $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ tidak setangkup tetapi tolak-setangkup.
- g) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$ tidak setangkup dan tidak tolak-setangkup. R tidak setangkup karena $(4, 2) \in R$ tetapi $(2, 4) \notin R$. R tidak tolak-setangkup karena $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \in R$ tetap $2 \neq 3$.

Contoh 15. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika a habis membagi b , b tidak habis membagi a , kecuali jika $a = b$.

Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, $(2, 4) \in R$ tetapi $(4, 2) \notin R$.

Relasi “habis membagi” tolak-setangkup karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, $(4, 4) \in R$ dan $4 = 4$.

Contoh 16. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif \mathbf{N} .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 6, \quad T : 3x + y = 10$$

- R bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.
- S relasi setangkup karena, misalkan $(4, 2)$ dan $(2, 4)$ adalah anggota S .
- T tidak setangkup karena, misalkan $(3, 1)$ adalah anggota T tetapi $(1, 3)$ bukan anggota T .
- S bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in S$ dan $(2, 4) \in S$ tetapi $4 \neq 2$.
- Relasi R dan T keduanya tolak-setangkup (coba tunjukkan!).

- Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & & 0 \\ & 0 & & \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari a ke b , maka juga ada busur dari b ke a .

Latihan

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan R relasi pada himpunan A , yaitu $R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,4)\}$. Tentukan apakah R refleksif/tidak, setangkup/tidak, tolak-setangkup/tidak, menghantar/tidak.
2. Misalkan $A =$ himpunan mahasiswa dan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika a satu angkatan dengan b . Tentukan apakah R refleksif/tidak, setangkup/tidak, tolak-setangkup/tidak, menghantar/tidak.