

# Rekursi dan Relasi Rekurens

## Bagian 2

Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika (STEI)  
ITB

# Relasi Rekurens

- Barisan (*sequence*)  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  dilambangkan dengan  $\{a_n\}$
- Elemen barisan ke- $n$ , yaitu  $a_n$ , dapat ditentukan dari suatu persamaan.
- Bila persamaan yang mengekspresikan  $a_n$  dinyatakan secara rekursif dalam satu atau lebih *term* elemen sebelumnya, yaitu  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , maka persamaan tersebut dinamakan **relasi rekurens**.

Contoh:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

- **Kondisi awal** (*initial conditions*) suatu barisan adalah satu atau lebih nilai yang diperlukan untuk memulai menghitung elemen-elemen selanjutnya.

Contoh:  $a_n = 2a_{n-1} + 1; a_0 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2$$

- Karena relasi rekurens menyatakan definisi barisan secara rekursif, maka kondisi awal merupakan langkah basis pada definisi rekursif tersebut.

- **Contoh 8.** Barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

dapat dinyatakan dengan relasi rekurens

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; f_0 = 0 \text{ dan } f_1 = 1$$

- Kondisi awal secara unik menentukan elemen-elemen barisan. Kondisi awal yang berbeda akan menghasilkan elemen-elemen barisan yang berbeda pula.

- Solusi dari sebuah relasi rekurens adalah sebuah formula yang tidak melibatkan lagi *term* rekursif. Formula tersebut memenuhi relasi rekurens yang dimaksud.
- **Contoh 9:** Misalkan  $\{a_n\}$  adalah barisan yang memenuhi relasi rekurens berikut:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad ; a_0 = 0 \text{ dan } a_1 = 3?$$

Periksa apakah  $a_n = 3n$  merupakan solusi relasi rekurens tersebut.

$$\begin{aligned} \text{Penyelesaian: } 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2[3(n-1)] - 3(n-2) \\ &= 6n - 6 - 3n + 6 \\ &= 3n = a_n \end{aligned}$$

Jadi,  $a_n = 3n$  merupakan solusi dari relasi rekurens tersebut.

- Apakah  $a_n = 2^n$  merupakan solusi relasi rekurens

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2?$$

$$\begin{aligned} \text{Penyelesaian: } 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-2} \\ &= 2^{n-1+1} - 2^{n-2} \\ &= 2^n - 2^{n-2} \neq 2^n \end{aligned}$$

Jadi,  $a_n = 2^n$  bukan merupakan solusi relasi rekurens tsb.

Cara lain: Karena  $a_0 = 1$  dan  $a_1 = 2$ , maka dapat dihitung

$$a_2 = 2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Dari rumus  $a_n = 2^n$  dapat dihitung  $a_0 = 2^0 = 1$ ,

$$a_1 = 2^1 = 2, \text{ dan } a_2 = 2^2 = 4$$

Karena  $3 \neq 4$ , maka  $a_n = 2^n$  bukan merupakan solusi dari relasi rekurens tsb.

# Pemodelan dengan Relasi Rekurens

## 1. Bunga majemuk.

**Contoh 10.** Misalkan uang sebanyak Rp10.000 disimpan di bank dengan sistem bunga berbunga dengan besar bunga 11% per tahun. Berapa banyak uang setelah 30 tahun?

Misalkan  $P_n$  menyatakan nilai uang setelah  $n$  tahun. Nilai uang setelah  $n$  tahun sama dengan nilai uang tahun sebelumnya ditambah dengan bunga uang:

$$P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} ; P_0 = 10.000$$

- Solusi relasi rekurens  $P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1}$  ;  $P_0 = 10.000$  dapat dipecahkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} = (1,11) P_{n-1} \\ &= (1,11) [(1,11)P_{n-2}] = (1,11)^2 P_{n-2} \\ &= (1,11)^2 [(1,11) P_{n-3}] = (1,11)^3 P_{n-3} \\ &= \dots \\ &= (1,11)^n P_0 \end{aligned}$$

Jadi,  $P_n = (1,11)^n P_0 = 10.000 (1,11)^n$

Setelah 30 tahun, banyaknya uang adalah

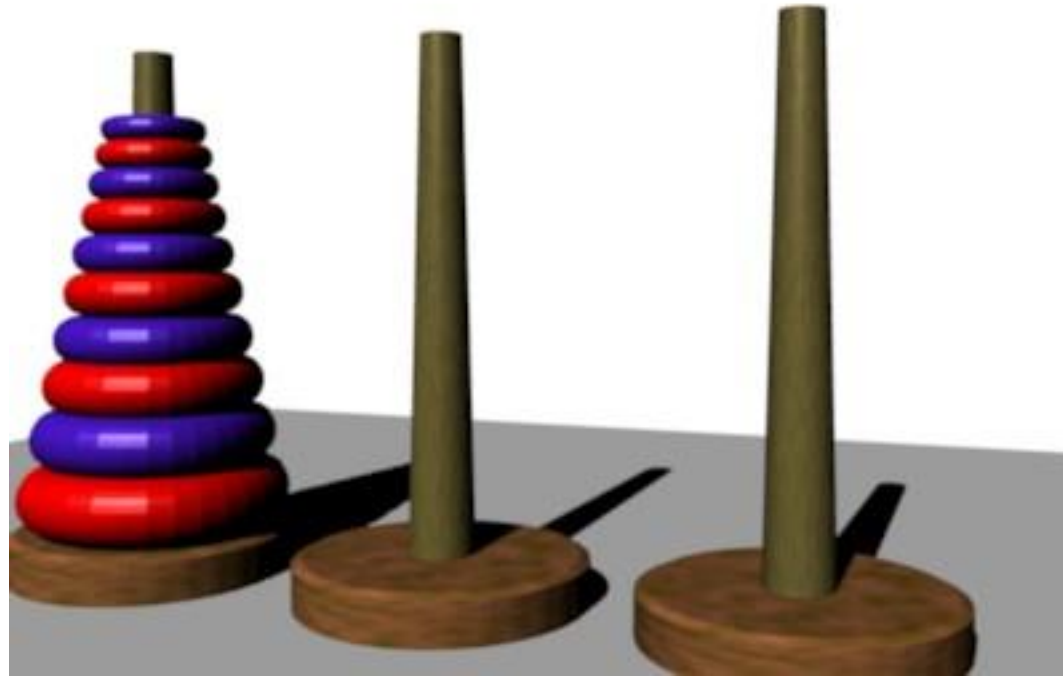
$$P_{30} = 10.000 (1,11)^{30} = \text{Rp}228.922,97$$

## 2. Menara Hanoi (*The Tower of Hanoi*)

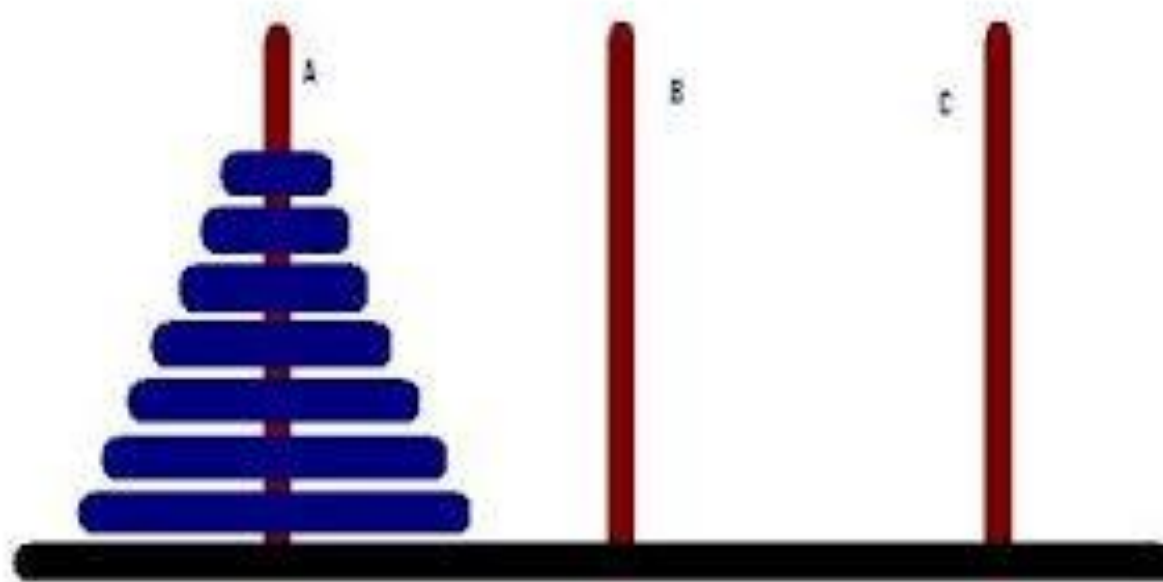
**Contoh 11.** Menara Hanoi adalah sebuah *puzzle* yang terkenal pada akhir abad 19. Puzzle ini ditemukan oleh matematikawan Perancis, Edouard Lucas.

Dikisahkan bahwa di kota Hanoi, Vietnam, terdapat tiga buah tiang tegak setinggi 5 meter dan 64 buah piringan (*disk*) dari berbagai ukuran. Tiap piringan mempunyai lubang di tengahnya yang memungkinkannya untuk dimasukkan ke dalam tiang. Pada mulanya piringan tersebut tersusun pada sebuah tiang sedemikian rupa sehingga piringan yang di bawah mempunyai ukuran lebih besar daripada ukuran piringan di atasnya. Pendeta Budha memberi pertanyaan kepada murid-muridnya: bagaimana memindahkan seluruh piringan tersebut ke sebuah tiang yang lain; setiap kali hanya satu piringan yang boleh dipindahkan, tetapi tidak boleh ada piringan besar di atas piringan kecil. Tiang yang satu lagi dapat dipakai sebagai tempat peralihan dengan tetap memegang aturan yang telah disebutkan. Menurut legenda pendeta Budha, bila pemindahan seluruh piringan itu berhasil dilakukan, maka dunia akan kiamat!

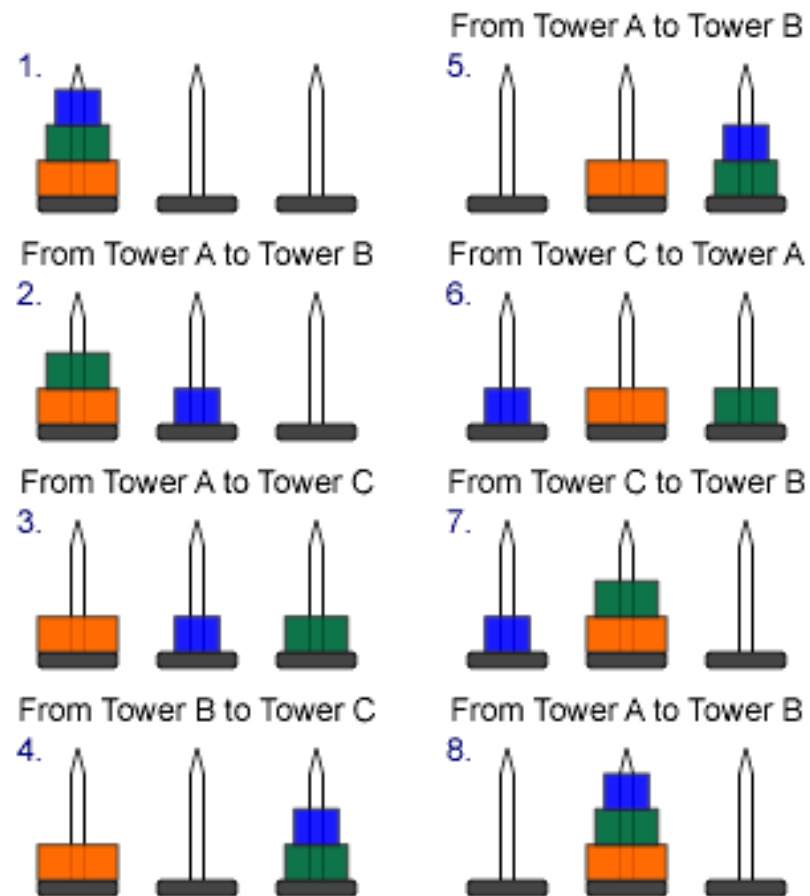




Pemodelan:



- Kasus untuk  $n = 3$  piringan



- Secara umum, untuk  $n$  piringan, penyelesaian dengan cara berpikir rekursif adalah sebagai berikut:

Kita harus memindahkan piringan paling bawah terlebih dahulu ke tiang  $B$  sebagai alas bagi piringan yang lain. Untuk mencapai maksud demikian, berpikirlah secara rekursif: pindahkan  $n - 1$  piringan teratas dari  $A$  ke  $C$ , lalu pindahkan piringan paling bawah dari  $A$  ke  $B$ , lalu pindahkan  $n - 1$  piringan dari  $C$  ke  $B$ .

*pindahkan  $n - 1$  piringan dari  $A$  ke  $C$*

*pindahkan 1 piringan terbawah dari  $A$  ke  $B$*

*pindahkan  $n - 1$  piringan dari  $C$  ke  $B$*

Selanjutnya dengan tetap berpikir rekursif-pekerjaan memindahkan  $n - 1$  piringan dari sebuah tiang ke tiang lain dapat dibayangkan sebagai memindahkan  $n - 2$  piringan antara kedua tiang tersebut, lalu memindahkan piringan terbawah dari sebuah tiang ke tiang lain, begitu seterusnya.

- Misalkan  $H_n$  menyatakan jumlah perpindahan piringan yang dibutuhkan untuk memecahkan teka-teki Menara Hanoi.

*pindahkan  $n - 1$  piringan dari A ke C*  $\rightarrow H_{n-1}$  kali

*pindahkan 1 piringan terbawah dari A ke B*  $\rightarrow 1$  kali

*pindahkan  $n - 1$  piringan dari C ke B*  $\rightarrow H_{n-1}$  kali

Maka jumlah perpindahan yang terjadi adalah:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

dengan kondisi awal  $H_1 = 1$

- Penyelesaian relasi rekurens:

$$\begin{aligned}H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\&= 2^2 (2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\&\quad \dots \\&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \rightarrow \text{deret geometri} \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

- Untuk  $n = 64$  piringan, jumlah perpindahan piringan yang terjadi adalah

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

- Jika satu kali pemindahan piringan membutuhkan waktu 1 detik, maka waktu yang diperlukan adalah  
18.446.744.073.709.551.615 detik  
atau setara dengan 584.942.417.355 tahun atau sekitar 584 milyar tahun!
- Karena itu, legenda yang menyatakan bahwa dunia akan kiamat bila orang berhasil memindahkan 64 piringan di menara Hanoi ada juga benarnya, karena 584 milyar tahun tahun adalah waktu yang sangat lama, dunia semakin tua, dan akhirnya hancur. *Wallahualam*

# Penyelesaian Relasi Rekurens

- Relasi rekurens dapat diselesaikan secara iteratif atau dengan metode yang sistematis.
- Secara iteratif misalnya pada contoh bunga majemuk (Contoh 10) dan Menara Hanoi (Contoh 11).
- Secara sistematis adalah untuk relasi rekurens yang berbentuk homogen linjar (*linear homogeneous*).
- Relasi rekurens dikatakan homogen linjar jika berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

yang dalam hal ini  $c_1, c_2, \dots, c_k$  adalah bilangan riil dan  $c_k \neq 0$ .



- **Contoh 12.**  $P_n = (1,11) P_{n-1} \rightarrow$  homogen linjar
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \rightarrow$  homogen linjar
- $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}^2 \rightarrow$  tidak homogen linjar
- $H_n = 2H_{n-1} - 1 \rightarrow$  tidak homogen linjar
- $a_n = na_{n-1} \rightarrow$  tidak homogen linjar

Penjelasan:

$H_n = 2H_{n-1} - 1$  tidak homogen linjar karena *term* -1 tidak dikali dengan nilai  $H_j$  untuk sembarang  $j$

$a_n = na_{n-1}$  tidak homogen linjar karena koefisiennya bukan konstanta.

- Solusi relasi rekurens yang berbentuk homogen linier adalah mencari bentuk

$$a_n = r^n$$

yang dalam hal ini  $r$  adalah konstanta.

- Sulihkan  $a_n = r^n$  ke dalam relasi rekuren homogen linier:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

menjadi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

- Bagi kedua ruas dengan  $r^{n-k}$ , menghasilkan

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

- Persamaan di atas dinamakan **persamaan karakteristik** dari relasi rekurens.
- Solusi persamaan karakteristik disebut **akar-akar karakteristik**, dan merupakan komponen solusi relasi rekurens yang kita cari ( $a_n = r^n$ ).

- Untuk relasi rekurens homogen linier derajat  $k = 2$ ,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

persamaan karakteristiknya berbentuk:

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

- Akar persamaan karakteristik adalah  $r_1$  dan  $r_2$ .
- **Teorema 1:** Barisan  $\{a_n\}$  adalah solusi relasi rekurens  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  jika dan hanya jika  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  dengan  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  adalah konstan.

- **Contoh 13.** Tentukan solusi relasi rekurens berikut:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} ; a_0 = 2 \text{ dan } a_1 = 7?$$

*Penyelesaian:*

Persamaan karakteristik:  $r^2 - r - 2 = 0$ .

Akar-akarnya:  $(r - 2)(r + 1) = 0 \rightarrow r_1 = 2 \text{ dan } r_2 = -1$

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$a_0 = 2 \rightarrow a_0 = 2 = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 (-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 \rightarrow a_1 = 7 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

Diperoleh dua persamaan:  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$  dan  $2\alpha_1 - \alpha_2 = 7$ ,

solusinya adalah  $\alpha_1 = 3$  dan  $\alpha_2 = -1$

Jadi, solusi relasi rekurens adalah:

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

- Jika persamaan karakteristik memiliki dua akar yang sama (akar kembar,  $r_1 = r_2$ ), maka Teorema 1 tidak dapat dipakai. Terapkan Teorema 2 berikut ini.
- **Teorema 2:** Misalkan  $r^2 - c_1r - c_2 = 0$  mempunyai akar kembar  $r_0$ . Barisan  $\{a_n\}$  adalah solusi relasi rekurens  $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$  jika dan hanya jika  $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$  untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  dengan  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  adalah konstan.
- **Contoh 14.** Tentukan solusi relasi rekurens berikut:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 6?$$

*Penyelesaian:*

*Penyelesaian:*

Persamaan karakteristik:  $r^2 - 6r + 9 = 0$ .

Akar-akarnya:  $(r - 3)(r - 3) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 3 \rightarrow r_0$

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \rightarrow a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

$$a_0 = 1 \rightarrow a_0 = 1 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = \alpha_1$$

$$a_1 = 6 \rightarrow a_1 = 6 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2$$

Diperoleh dua persamaan:  $\alpha_1 = 1$  dan  $3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6$ ,  
solusinya adalah  $\alpha_1 = 1$  dan  $\alpha_2 = 1$

Jadi, solusi relasi rekurens adalah:

$$a_n = 3^n + n3^n$$

- **Latihan.** Selesaikan relasi rekurens berikut:

(a)  $a_n = 2a_{n-1} ; a_0 = 3$

(b)  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} ; a_0 = 1$  dan  $a_1 = 0$ ?

(c) Barisan Fibonacci:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

- (UTS 2013) Selesaikan relasi rekurens berikut:  $T(n) = 7T(n - 1) - 6T(n - 2)$ ;  $T(0) = 2, T(1) = 7$  (Catatan:  $T_n$  ditulis  $T(n)$ ,  $T_{n-1}$  ditulis  $T(n - 1)$ , dst).