

Aplikasi Graf pada Penyelesaian Permainan Sudoku

Thomas Ferdinand Martin 135190999

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹thomas_ferdinand_martin@std.stei.itb.ac.id

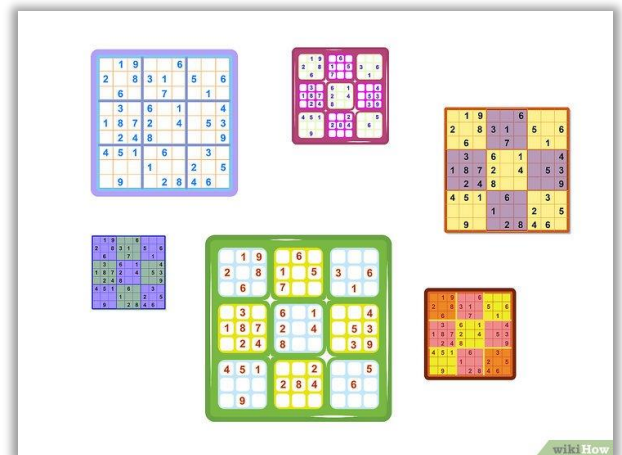
Abstract—Sudoku merupakan salah satu permainan puzzle yang dapat diselesaikan dengan aplikasi graf. Sudoku diselesaikan dengan menggunakan teori pewarnaan graf. Pewarnaan pada graf dilakukan dengan mewarnai tiap simpul dalam graf sehingga tiap simpul yang saling bertetangan memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik pada graf berwarna menyatakan jumlah minimal warna yang digunakan untuk mewarnai graf tersebut.

Kata kunci—sudoku, graf, simpul, warna, kromatik.

I. PENDAHULUAN

Manusia memperoleh kesenangan dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan memainkan sebuah permainan. Permainan memiliki banyak kategori, salah satunya adalah *puzzle game*. Permainan kategori ini memiliki berbagai bentuk seperti dengan tema menyusun potongan gambar dan yang paling sering ditemui adalah *puzzle* yang menghubungkan dan menggabungkan beberapa objek. Namun, inti dari permainan *puzzle* adalah sama yaitu memiliki tujuan akhir untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang biasanya berupa teka-teki. Selain memperoleh kesenangan dan kepuasan, permainan dengan kategori ini diyakini pula dapat meningkatkan kepintaran pemainnya. Salah satu permainan *puzzle* yang cukup tua dan terkenal di kalangan masyarakat adalah sudoku.

Sudoku adalah salah satu *puzzle game* yang populer di kalangan masyarakat dan berumur cukup tua. Permainan sudoku ini dapat dimainkan hanya oleh satu orang dan mungkin beberapa orang untuk membantu menyelesaikannya. Sudoku dapat dimainkan hanya dengan memanfaatkan kertas dan pensil. Namun, seiring perkembangan teknologi digital, permainan ini sekarang dapat diunduh dan dimainkan melalui gawai hingga laptop dan komputer. Secara sederhana, permainan sudoku dilakukan dengan mengisi angka pada kotak-kotak kosong hingga seluruh kotak penuh dengan angka. Hanya saja peraturan dari sudoku sendiri dapat terbilang cukup rumit. Permainan ini dulu sering dijumpai pada majalah ataupun koran-koran. Permainan sudoku dapat melatih cara berpikir pemainnya karena penerapan logika sangat dibutuhkan untuk menyelesaikan permainan ini. Konsep permainan yang tidak terlalu rumit juga menjadi salah satu faktor popularitas permainan ini.



Gambar 1. Bentuk Papan Permainan Sudoku

Sumber : <https://id.wikihow.com/Memecahkan-Teka-teki-Sudoku>

II. DASAR TEORI

A. Sudoku

Sudoku adalah salah satu permainan *puzzle* yang memiliki umur cukup lama dan dikenal oleh mayoritas masyarakat. Peraturan permainan yang tidak terlalu rumit membuat sudoku dapat dimainkan oleh siapa saja. Sudoku jika diartikan ke bahasa Indonesia memiliki arti "Tempat Angka". Permainan ini sangat menekankan aspek logika bagi para pemainnya. Tujuan akhir dari permainan sudoku adalah mengisi seluruh blok dengan angka tanpa melanggar peraturan permainan.

Teka-teki ini diperkenalkan di Jepang oleh Nikoli di koran Monthly Nikolist pada April 1984 sebagai Sūji wa dokushin ni kagiru (数字は独身に限る), yang dapat diterjemahkan sebagai "digit harus tunggal" atau sebagai "angka dibatasi untuk satu kejadian "(Dalam bahasa Jepang, dokushin berarti "orang yang belum menikah "). Di kemudian hari, nama itu disingkat menjadi Sudoku (数独) oleh Maki Kaji (鍛治真起, Kaji Maki), dengan hanya mengambil kanji pertama dari kata majemuk untuk membentuk versi yang lebih pendek. "Sudoku" adalah merek dagang terdaftar di Jepang dan teka-teki ini umumnya disebut sebagai Number Place (ナンバープレイス, Nanbāpurēsu) atau, lebih informal, portmanteau dari dua kata, Num (ber) Pla (ce) (ナンプレ, Nanpure).

Sudoku memiliki beberapa peraturan untuk menyelesaikannya. Dalam permainan sudoku, pemain akan

diberikan kisi berbentuk persegi berisi 9 kotak-kotak besar seperti matriks persegi dengan ukuran 3. Di dalam setiap kotak besar, ada 9 kotak-kotak yang lebih kecil. Ketika dihadapkan dengan teka-teki, beberapa kotak-kotak kecil tersebut sudah terisi dengan nomor dari 1 sampai 9. Untuk teka-teki yang lebih sulit, jumlah kotak-kotak yang sudah terisi akan lebih sedikit. Salah satu aturan dasar permainan ini adalah setiap kolom dan baris harus mempunyai satu angka 1 sampai 9. Artinya, dalam sebuah baris atau kolom, suatu angka tidak dapat berulang

B. Graf

1. Definisi Graf

Graf adalah salah satu dari cabang ilmu matematika yang cukup banyak dijumpai penerapannya. Graf secara sederhana meliputi rangkaian simpul dan sisi yang saling terhubung. Notasi graf, $G = (V, E)$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n\}$$

Dari notasi diatas, V melambangkan himpunan simpul pada graf. Simpul pada graf dapat dinyatakan dengan angka {1, 2, 3, 4, ..., n} atau huruf {a, b, c, ...}. Sisi pada graf menyatakan keterhubungan antara simpul dalam graf, sehingga sisi graf umumnya dinyatakan sebagai pasangan simpul yang terhubung oleh sisi tersebut.

2. Jenis-jenis graf

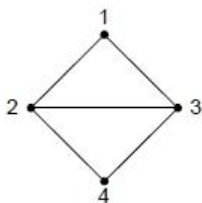
Graf dapat dikategorikan berdasarkan orientasi arah dan tipe-tipe sisi pada graf. Berikut adalah jenis-jenis graf berdasarkan orientasi arah dan ada tidaknya sisi gelang dan ganda pada graf:

a. Graf tak berarah

Graf tak berarah merupakan graf yang sama seperti namanya, yang sisinya tidak memiliki arah. Kemudian berdasarkan ada tidaknya gelang dan sisi ganda, graf tak berarah dibagi menjadi 3 jenis :

i. Graf sederhana

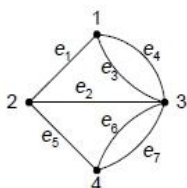
Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun sisi gelang



Gambar 2. Graf Sederhana

ii. Graf ganda

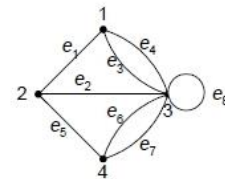
Graf semu merupakan graf memiliki setidaknya satu sisi ganda. Sisi ganda merupakan pasangan sisi yang keduanya saling menghubungkan kedua simpul yang sama.



Gambar 3. Graf Ganda

iii. Graf semu

Graf semu merupakan graf yang memiliki setidaknya satu sisi semu. Sisi semua merupakan sisi yang menghubungkan simpul yang sama atau dikenal dengan *loop*.



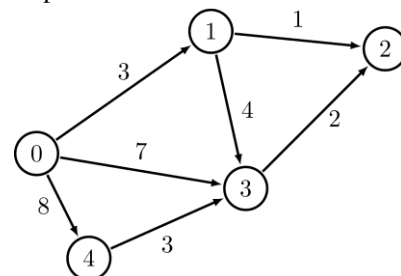
Gambar 4. Graf Semu

b. Graf berarah

Graf berarah merupakan jenis graf yang memiliki arah pada sisinya sehingga tiap sisi memiliki satu buah panah yang menunjuk salah satu simpul yang dihubungkannya. Berdasarkan keberadaan sisi ganda dan sisi semu, graf berarah dibagi menjadi dua jenis, yaitu:

i. Graf berarah

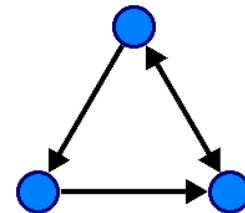
Graf berarah menyatakan graf berarah yang tidak memiliki sisi ganda maupun sisi semu.



Gambar 5. Simple Directed Graph

ii. Graf ganda berarah

Graf ganda berarah merupakan graf berarah yang memiliki sisi ganda maupun sisi semu didalamnya.



Gambar 6. Graf Ganda Berarah

3. Terminologi graf

a. Ketetanggaan

Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung.

b. Bersisian

Untuk sembarang simpul $e(u, v)$, u bersisian dengan v karena ada sisi yang menghubungkan u dan v .

c. Simpul terpercil

Simpul terpercil merupakan simpul yang sama sekali tidak memiliki sisi yang terhubung dengan simpul tersebut.

d. Derajat

Derajat suatu simpul menyatakan jumlah simpul yang bersisian dengan simpul atau jumlah sisi yang terhubung dengan simpul tersebut. Jumlah derajat seluruh simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi yang ada pada graf (Lemma Jabat Tangan).

e. Lintasan

Lintasan adalah sisi-sisi yang dilalui untuk menghubungkan sebuah simpul ke simpul lainnya. Panjang lintasan merupakan jumlah sisi atau jumlah bobot dari tiap sisi dari lintasan.

f. Siklus

Siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir di simpul yang sama.

g. Keterhubungan graf

Simpul u dan v dinyatakan terhubung jika ada sisi maupun lintasan yang menghubungkan keduanya.

G dinyatakan sebagai graf terhubung jika untuk setiap simpul dalam V misalkan v_i dan v_j terdapat minimal satu lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Jika ada salah satu simpul yang tidak terhubung maka graf merupakan graf tidak terhubung.

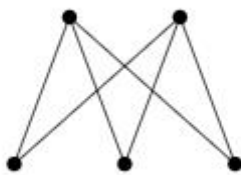
Graf berarah G adalah graf terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung. Dua simpul, u dan v , pada graf berarah G disebut terhubung kuat, jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan sebaliknya. Graf berarah G adalah graf terhubung kuat (strongly connected graph) jika untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G , terhubung kuat. Jika tidak, maka G adalah graf terhubung lemah

h. Upagraf

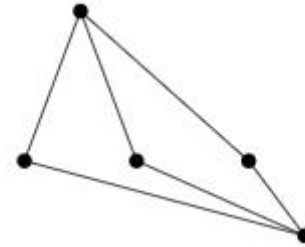
Secara sederhana upagraf merupakan potongan dari sebuah graf. Misaalkan sebuah graf dinyatakan sebagai $G = (V, E)$ dan terdapat graf lain misal U yang dinyatakan sebagai $U = (V_1, E_1)$. U merupakan upagraf dari G , jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komponen dari graf merupakan jumlah maksimum dari upagraf terhubung pada suatu graf.

C. Graf planar

Graf planar merupakan graf yang dapat digambarkan pada bidang dua dimensi dengan sisi-sisinya tidak ada yang saling memotong, jika ada minimal satu pasang sisi berpotongan maka dapat dikatakan bahwa graf tersebut tidak planar.



Gambar 7. Graf tidak planar



Gambar 8. Graf planar

Graf planar yang digambarkan sebagai graf tanpa perpotongan sisi dinamakan graf bidang. Hubungan antara simpul, sisi dan wilayah pada graf bidang dinyatakan dengan persamaan.

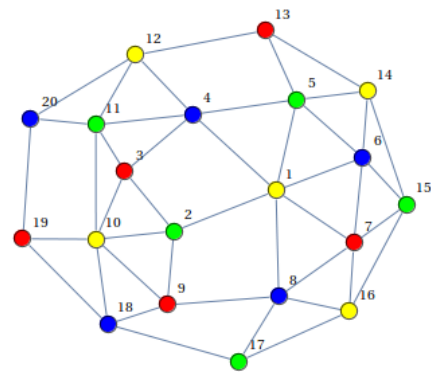
$$n - e + f = 2 \text{ (Persamaan Euler)}$$

Pada persamaan tersebut, n menyatakan jumlah simpul, e menyatakan jumlah sisi, dan f menyatakan jumlah wilayah yang dibentuk oleh graf. Pada graf planar sederhana, didapat ketidaksamaan Euler yang menyatakan :

$$e \leq 2n - 4$$

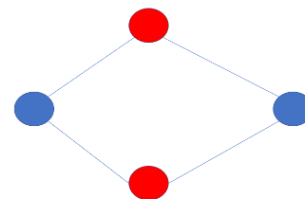
D. Pewarnaan pada Graf

Pewarnaan pada graf dilakukan dengan memberikan warna-warna khusus pada tiap simpul pada graf sehingga dua simpul yang saling bertetangga tidak memiliki warna yang sama.



Gambar 7. Perwarnaan pada graf

Bilangan kromatik dari grafik G adalah jumlah warna minimum yang diperlukan untuk pewarnaan yang tepat pada suatu graf, dilambangkan dengan $\chi(G)$. Bilangan independen G adalah ukuran maksimum himpunan bilangan pewarnaan pada G dilambangkan dengan $\alpha(G)$.

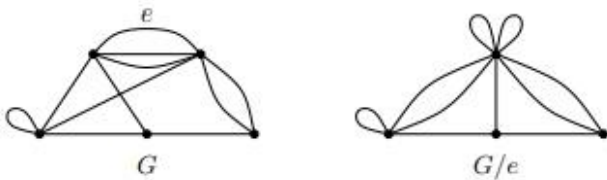


Gambar 8. Graf berwarna

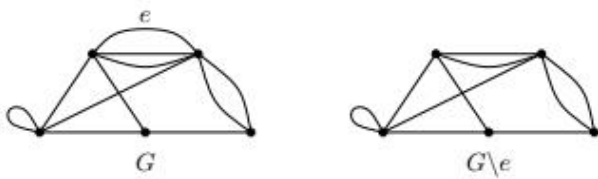
Pada graf diatas, bilangan kromatiknya adalah dua, karena minimal terdapat dua warna untuk mewarnai graf tersebut, dalam gambar ini adalah merah dan biru.

E. Deletion and Contraction

Misalkan G adalah grafik dan e adalah sisi G . Ada dua operasi penting (*deletion and contraction*) yang dapat dilakukan pada G menggunakan e dan yang berguna untuk jenis tertentu. *Deletion* berarti penghapusan dilakukan dengan menghapus sisi e dari G . *Contraction* berarti kontraksi dilakukan dengan menggabungkan semua simpul yang terhubung dan terkait dengan e . *Deletion* dinotasikan dengan $G \setminus e$. *Contraction* dinotasikan dengan G / e .



Gambar 9. Ilustrasi penghapusan sisi



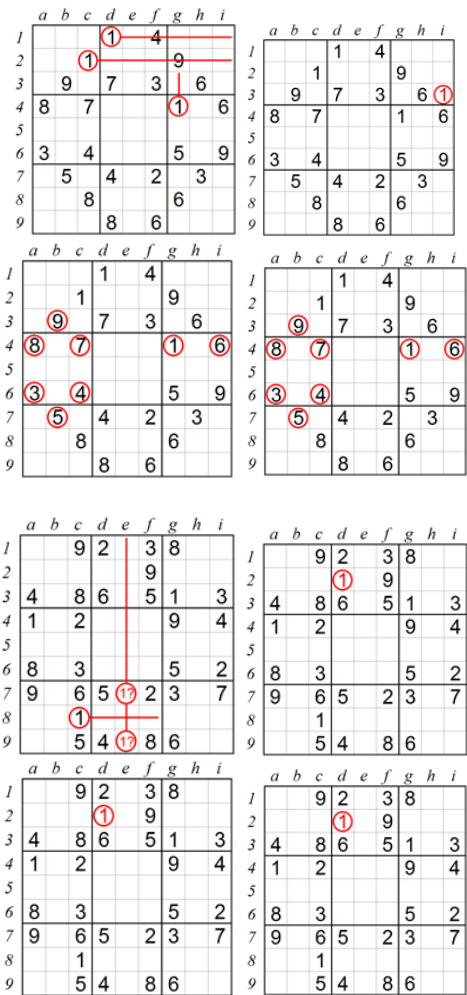
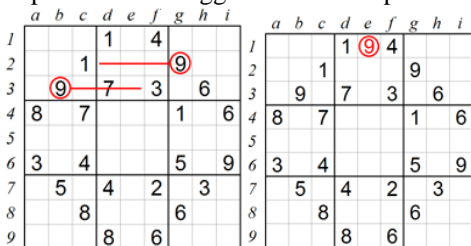
Gambar 10. Ilustrasi kontraksi sisi

III. APLIKASI PEWARNAAN GRAF PADA PENYELESAIAN SUDOKU

A. Strategi penyelesaian sudoku

Papan permainan sudoku terdiri dari total 81 kotak yang dibagi menjadi sembilan kolom dari a hingga i dan 9 baris dari 1 hingga 9. Tiap *grid* juga dibagi menjadi 3x3 matriks, yang dinyatakan dengan *Box 1* hingga *Box 9*.

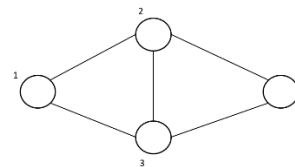
Cara termudah menyelesaikan teka-teki Sudoku adalah dengan memindai baris dan kolom dalam setiap area kotak tiga, menghilangkan angka atau kotak, dan menemukan situasi di mana hanya satu angka yang dapat masuk ke dalam satu kotak. Teknik pemindaian cepat dan biasanya cukup untuk memecahkan teka-teki yang mudah sampai akhir. Teknik pemindaian juga sangat berguna untuk teka-teki keras hingga pada titik di mana tidak ada kemajuan lebih lanjut yang dapat dibuat dan teknik penyelesaian yang lebih canggih diperlukan. Berikut beberapa ilustrasi menggunakan teknik pemindaian:



Gambar 9. Ilustrasi penyelesaian sudoku dengan pendekatan graf

B. Graf pada Sudoku

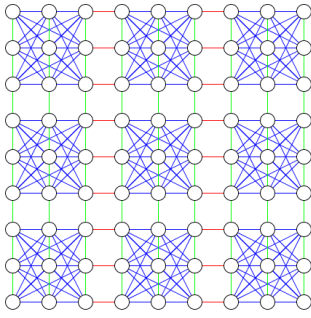
Sebelumnya akan dijabarkan langkah-langkah untuk mewarnai sebuah graf.



Gambar 10. Graf tanpa warna

Dimulai dari Node 1

1. Ambil warna sembarang dari daftar warna yang ada
2. Periksalah apakah simpul yang bersisian memiliki warna yang sama dengan simpul.
3. Jika tidak ada maka simpul aman untuk diwarnai.
4. Apabila ada sisi yang memiliki warna yang sama maka akan dipilih warna kedua sampai warna lain sehingga warna simpul tidak sama dengan warna simpul lain yang bersisian dengannya.
5. Langkah 1 sampai 4 dilakukan secara rekursif sampai seluruh simpul memiliki warna



Gambar 11. Hubungan graf pada sudoku

Sumber: <https://medium.com/code-science/sudoku-solver-graph-coloring-8f1b4df47072>

```
int colorNumber = 1; //number of used colors
int numberOfColoredNodes = 0;

while (numberOfColoredNodes < graph.Count)
{
    int max = -1;
    int index = -1;

    for (int i = 0; i < graph.Count; i++)
    {
        if (!Colored(graph.Nodes[i], nodeSet))
        {
            int d = SaturatedDegree(graph.Nodes[i], nodeSet);
            if (d > max)
            {
                max = d;
                index = i;
            }
            else if (d == max)
            {
                if (Degree(graph.Nodes[i]) > Degree(graph.Nodes[index]))
                {
                    index = i;
                }
            }
        }
    }
    AssignColor(graph.Nodes[index], nodeSet, ref colorNumber);
    numberOfColoredNodes++;
}
```

Gambar 12. Algoritma sederhana untuk pewarnaan graf (non-rekursif)

Sumber: <https://www.codeproject.com/Articles/801268/A-Sudoku-Solver-using-Graph-Coloring>

Cara paling sederhana dalam pewarnaan graf adalah dengan *deletion-contraction*. Saat menerapkan kontraksi-penghapusan, setiap simpul yang dibentuk dengan mengontraksi sebuah tepi berbagi kedekatan, dan dengan demikian batasan warna, dari yang sebelumnya berbedasudut. Kemudian kelas warna terbatas dari simpul tepi berkontraksi sesuai dengan penyatuan batasan simpul yang berbeda. Kami sekarang menerapkan kontraksi penghapusan ke pewarnaan parsial sampel kami, menggunakan rumus rekursi untuk polinomial berwarna,

Sudoku dapat dipandang sebagai sebuah graf dengan bilangan kromatik $G = 9$. Pewarnaan partial dari graf sudoku dengan n buah kotak adalah sebanyak minimal $n^2 - 1$.

Menurut hasil riset yang ditulis dan dilakukan oleh Kyle Oddson dari Portland State University. Perhitungan bilangan kromatik dari pewarnaan graf pada sudoku sebagai berikut:

Persamaan diperoleh dari penerapan kontraksi-penghapusan. Pada penghapusan dan kontraksi, setiap simpul yang dibentuk dengan mengontraksi sisi berdekatan, dan dengan demikian batasan warna menjadi berkurang. Warna yang tidak dapat dipakai hasil dari kontraksi sisi, berkoresponden dengan sisi yang simpul yang telah diwarnai. Kemudian dapat diterapkan penghapusan dan kontraksi dari hasil *partial coloring* menggunakan algoritma rekursif yang sebelumnya telah dibuat.

Jumlah maksimum kelas warna yang muncul pada papan sudoku adalah jumlah dari kelas warna yang muncul pada sisi yang kosong, sehingga λ yang menyatakan total warna yang ada berlaku

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq (v - t) + \lambda_0.$$

Misalkan, $r = \lambda - \lambda_0$ sehingga berlaku $0 \leq r \leq v - t$. Untuk tiap partisi puzzle dan kotak kosong, ada

$$(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0 - 1) \dots (\lambda - \lambda_0 - r + 1)$$

cara untuk menyusun warna. Sehingga apabila kromatik polinomial dievaluasi pada k , k adalah jumlah kotak yang telah diisi, bilangan kromatik pada penyelesaian puzzle membentuk persamaan di bawah.

$$\chi(k) = \sum_{r=0}^{v-t} m_r(G, C)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0 - 1) \dots (\lambda - \lambda_0 - r + 1) = p_{G,C}(\lambda).$$

Misal polinom berderajat r , maka suku terakhir akan berderajat $r = v - t$ dan berkoresponden dengan pewarnaan total menggunakan $v - t$ warna baru.

V. KESIMPULAN

Graf memiliki banyak manfaat salah satunya menyelesaikan permainan sederhana yang tampak sulit namun ternyata mudah diselesaikan apabila telah mengenal teorema dan aplikasi pada graf. Salah satu permainan yang dapat diselesaikan dengan graf adalah sudoku. Penyelesaian sudoku dilakukan dengan menggunakan teori pewarnaan graf. Bilangan kromatik menyatakan jumlah warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai sebuah graf.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur senantiasa penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat rahmat dan pertolongan-Nya penulis dapat mengerjakan hingga menyelesaikan tugas makalah Matematika Diskrit ini dengan baik adanya. Penulis berterima kasih kepada Ibu Fariska Zakhrativa sebagai dosen Mata Kuliah IF2120 Matematika Diskrit Kelas 03 yang senantiasa memberikan pengajaran dan bimbingannya. Penulis merasa pengajaran yang diberikan sangat efektif terlebih melalui video ajar dan latihan soal yang terus memacu penulis untuk berpikir secara kreatif dan inovatif. Tak lupa penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada orang tua penulis yang telah

memberikan dukungan baik moral maupun riil serta teman - teman yang telah memberikan dukungan dalam penyelesaian tugas makalah Matematika Diskrit ini.

SUMBER

- [1] <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2019-2020/> diakses pada 8 Desember 2020.
- [2] <http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.5203/2008SPR/slides-a5.pdf> diakses pada 11 Desember 2020
- [3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku> diakses pada 6 Desember 2020
- [4] <https://www.codeproject.com/Articles/801268/A-Sudoku-Solver-using-Graph-Coloring> diakses pada 10 Desember 2020
- [5] <https://medium.com/code-science/sudoku-solver-graph-coloring-8f1b4df47072> diakses pada 9 Desember 2020
- [6] <https://id.wikihow.com/Memecahkan-Teka-teki-Sudoku> diakses pada 9 Desember 2020
- [7] <https://www.conceptspuzzles.com/index.aspx?uri=puzzle/sudoku/> diakses pada 9 Desember 2020
- [8] http://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/meerkamp/Site/Sudokus_a_s_Graphs.html diakses pada 11 Desember 2020
- [9] K. Oddson, *Math and Sudoku: Exploring Sudoku Boards Through Graph Theory, Group Theory, and Combinatorics*. Portland State University.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2020



Thomas Ferdinand Martin 13519099