

# Pohon Stern-Borcot sebagai Pemanfaatan Teori Pohon dalam Pembuatan Jam

Afifah Fathimah Qur'ani 13519183  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13519183@std.stei.itb.ac.id

**Abstrak**—Pohon adalah bagian dari ilmu Matematika Diskrit yang banyak sekali pemanfaatannya di kehidupan sehari-hari. Kajian lanjutan atau teori lain mengenai pohon, yaitu Pohon Stern-Borcot yang ditemukan dengan tujuan awal membuat mesin pengukur waktu, jam, yang dapat menunjukkan waktu seakurat mungkin. Makalah ini akan membahas mengenai teori Pohon Stern-Borcot dan pemanfaatannya dalam pembuatan jam.

**Kata kunci**—Pohon, Pohon Stern-Borcot, Roda Gigi, Mesin Jam.

## I. PENDAHULUAN

Pohon adalah salahsatu teori dari Matematika Diskrit yang sangat banyak pemanfaatannya, mulai dari hal yang sangat sederhana seperti pengelompokan elemen dalam keseharian, hingga sebagai teori dibelakang beberapa teknis permainan *video games*, dan banyak hal lain. Unikny, salahsatu teori pohon yang dibuat untuk mempermudah sebuah profesi adalah Pohon Stern-Borcot, yang ditemukan secara independent oleh Moritz Stern dan Achille Brocot.

Stern adalah seorang ahli angka dari Jerman, sedangkan Brocot merupakan seorang pembuat jam. Kedua orang ini bekerjasama membuat Teori Pohon Stern-Brocot yang kemudian digunakan Brocot untuk medesain sistem gigi didalam mesin jamnya, sehingga Brocot dapat membuat jam seakurat mungkin dengan pergerakan waktu yang sebenarnya.

## II. LANDASAN TEORI

### A. Teori Pohon

Pohon didefinisikan sebagai himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut *nodes* atau simpul yang memiliki hubungan hierarki(urutan tingkatan atau jenjang), dimana setiap simpul memiliki minimum derajat 1 dan maksimum  $n$ . Pohon terbentuk dari  $n+1$  sub-himpunan, dimana sub-himpunan pertamanya adalah akar pohon dan sisa  $n$  sub-himpunan lainnya adalah  $n$  buah subpohon.

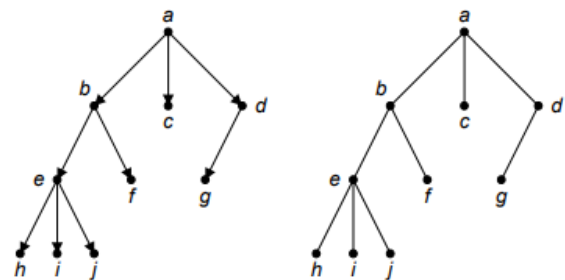
Pohon sebenarnya merupakan sebuah graf tak berarah asiklik yang terhubung. Pohon memiliki jalur atau sisi diantara setiap simpulnya. Berikut ini sifat pohon yang membedakan dengan graf biasa :

1. Hanya ada satu jalur, sisi, atau lintasan diantara sepasang simpul (2 buah simpul yang berbeda).
2. Sebuah pohon dengan  $n$  simpul akan memiliki  $n-1$  sisi.
3. Pohon tidak mengandung sirkuit, dan penambahan satu

sisi pada pohon tersebut hanya akan membuat satu sirkuit.

4. Pohon bersifat terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

Pohon berakar atau *rooted tree* adalah pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah.



**Gambar 1.** Pohon Berakar, dimana tanda panah pada sisi dapat diabaikan  
(Sumber : [2])

Berikut ini beberapa terminologi pada Pohon Berakar :

1. *Anak (child atau children) dan Orangtua (parent)*  
 $b$ ,  $c$ , dan  $d$  adalah anak-anak simpul  $a$ , dan  $a$  adalah orangtua dari anak-anak itu.
2. *Lintasan (path)*  
Lintasan dari  $a$  ke  $j$  adalah  $a, b, e, j$  dengan panjang lintasan adalah 3.
3. *Saudara kandung (sibling)*  
 $f$  adalah saudara kandung  $e$ , tetapi  $g$  bukan saudara kandung  $e$ , karena orangtua mereka berbeda.
4. *Upapohon (subtree)*  
Misalnya  $b$  dengan anak-anaknya hingga  $h, i$ , dan  $j$ .
5. *Derajat (degree)*  
Adalah jumlah upapohon atau jumlah anak pada simpul tersebut. Derajat  $a$  adalah 3, derajat  $b$  adalah 2, dan derajat  $c$  adalah 0.  
Derajat dari pohon itu sendiri adalah derajat maksimum pada simpulnya. Pohon diatas berderajat 3.
6. *Daun (leaf)*  
Simpul yang berderajat nol atau tidak mempunyai anak disebut daun. Contohnya adalah simpul  $h$ .
7. *Simpul Dalam (internal nodes)*

Adalah simpul yang memiliki anak, yaitu simpul b, d, e, g, dan k.

8. *Aras (level) atau Tingkat*

Simpul a memiliki aras 0, sedangkan simpul b, c, dan d memiliki aras 1, dan seterusnya.

9. *Tinggi (height) atau Kedalaman (depth)*

Merupakan aras maksimum dari suatu pohon. Pohon contoh tersebut mempunyai tinggi 4.

**B. Roda Gigi**

Roda gigi dapat ditemukan di hampir semua benda yang memiliki bagian yang berputar. Selain dapat ditemukan pada mesin mobil dan sejenisnya, roda gigi juga ada pada benda-benda kecil disekitar kita seperti misalnya jam.

Roda gigi pada umumnya digunakan untuk alasan berikut ini

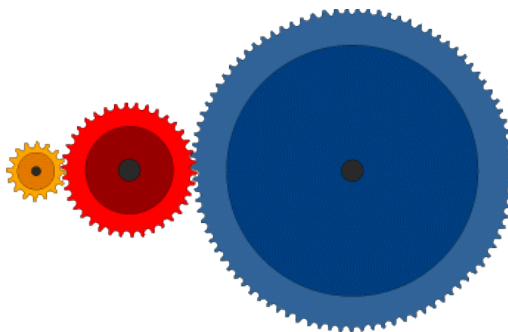
1. Merubah arah putaran
2. Merubah kecepatan putaran
3. Memindahkan putaran ke sumbu lain
4. Menghubungkan putaran antar 2 sumbu agar sesuai

Untuk memahami konsep dari rasio roda gigi, perlu diketahui bahwa keliling lingkaran adalah nilai diameter nya dikalikan dengan Pi (3.14159...). Hal ini menjelaskan bahwa semakin kecil diameter dari suatu roda gigi, maka akan dibutuhkan perputaran lebih cepat untuk menutupi jarak berputar roda dengan diameter lebih besar.

Roda gigi memiliki *teeth*, yang berfungsi

1. Memungkinkan perputaran antar roda gigi satusama lain bergerak dengan mulus, tanpa tergelincir.
2. Untuk menghitung rasio roda gigi setepat mungkin.
3. Menjadikan sedikit ketidaktepatan pada diameter roda gigi tidak berpengaruh, karena rasio dihitung berdasarkan jumlah *teeth*.

Untuk menghasilkan rasio roda gigi yang besar, digunakan konsep *gear train* atau kereta roda gigi. Kereta roda gigi adalah kombinasi dari beberapa roda gigi yang berbeda yang *teeth* nya saling berhubungan sehingga perputaran pada satu roda gigi akan menyebabkan roda gigi lain ikut berputar. Dalam istilah lain, roda gigi yang menggerakkan disebut *pinion*, sedangkan roda gigi yang digerakkan disebut *wheel*.



**Gambar 2. Kereta Roda Gigi**  
(sumber : [3])

Kereta roda gigi diatas memiliki rasio 6:1 karena diameter roda gigi *wheel* (berwarna biru) adalah enam kali diameter roda gigi *pinion* (berwarna kuning). Ukuran diameter roda gigi merah tidak penting karena ia hanya berfungsi untuk membalikkan

arah perputaran sehingga *pinion* dan *wheel* berputar kea rah yang sama.

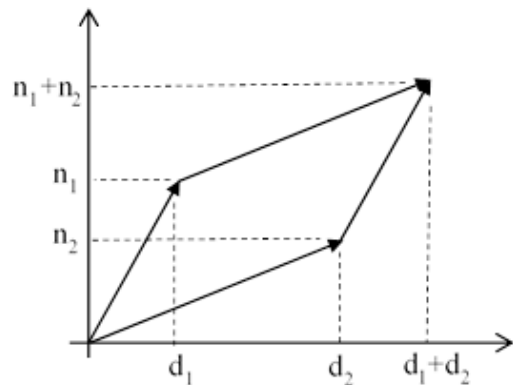
Ada banyak sistem kereta roda gigi lain sesuai dengan kebutuhan rasio dan arah perputaran yang diinginkan. Beberapa contoh diantaranya adalah *planetary gear system*, *worm gear*, dan lain-lain.

**C. Mediant**

*Mediant* adalah sebuah nilai yang didapat dari dua bilangan pecahan, terdiri dari 4 bilangan integer positif, dapat dimisalkan sebagai  $\frac{n_1}{d_1}$  dan  $\frac{n_2}{d_2}$ , dimana  $\frac{n_1}{d_1} \leq \frac{n_2}{d_2}$ . *Mediant* dari kedua bilangan tersebut adalah bilangan pecahan yang pembilang dan penyebutnya adalah penjumlahan dari pembilang dan penyebut bilangan pecahan asal, yaitu  $\frac{a+b}{c+d}$ . Maka akan didapat hubungan berikut diantara ketiga pecahan

$$\frac{n_1}{d_1} \leq \frac{n_1 + n_2}{d_1 + d_2} \leq \frac{n_2}{d_2} \tag{1}$$

Secara grafis, dapat dilihat bahwa *mediant* sebenarnya adalah vektor hasil penjumlahan dari kedua bilangan pecahan asal, seperti ditunjukkan berikut ini

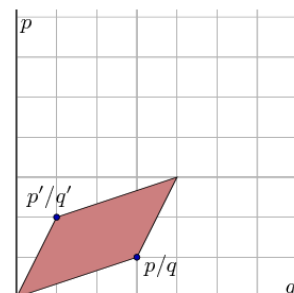


**Gambar 3. Grafik Mediant**  
(sumber : [5])

Nilai *mediant* juga bisa didapatkan dengan jumlah bilangan pecahan input lebih dari dua, dengan menggunakan rumus berikut

$$M\left(\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_2}{d_2}, \dots, \frac{n_k}{d_k}\right) = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{d_1 + d_2 + \dots + d_k} \tag{2}$$

Apabila kedua bilangan pecahan awal (dimisalkan  $\frac{p}{q}$  dan  $\frac{p'}{q'}$ ) digambarkan maka akan menghasilkan parallelogram berikut



**Gambar 4.** Daerah yang dihasilkan dua bilangan pecahan awal  
(sumber : [8])

Luas dari daerah tersebut dapat dihitung dengan

$$A\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) = (q * p') - (q' * p)$$

yang memiliki sifat sebagai berikut

1. Jika a dan b adalah bilangan rasional, maka  $A(a,b)$  adalah integer.
2.  $A(a,a) = 0$
3. A memiliki sifat aditif sehingga  $A(a \oplus b, c) = A(a, c) + A(b, c)$
4.  $A\left(\frac{ca}{cb}, d\right) = c * A\left(\frac{a}{b}, d\right)$

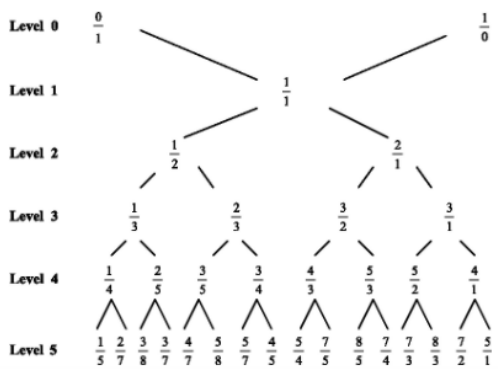
**D. Pohon Stern-Brocot**

Pohon Stern-Brocot adalah sebuah tipe dari pohon biner terurut. Pohon ini ditemukan secara independent oleh seorang warga Jerman ahli matematika, Moritz Stern pada tahun 1858 dan oleh pembuat Jam asal Prancis, Achille Brocot pada tahun 1861. Tetapi ada juga beberapa sumber yang menyebutkan bahwa konsep ini sudah ada sejak zaman Yunani kuno, yaitu ditemukan oleh matematikawan Eratosthenes.

Pohon Stern-Brocot ini dibentuk dengan menggunakan dua bilangan pecahan yaitu  $\frac{0}{1}$  dan  $\frac{1}{0}$ . Dapat diperhatikan bahwa bilangan  $\frac{1}{0}$  tidaklah memenuhi syarat bilangan pecahan karena adanya penyebut 0, tetapi bilangan tersebut digunakan pada pohon Stern-Brocot sebagai representasi nilai tak hingga. Akar dari pohon Stern-Brocot adalah *mediant* dari kedua bilangan pecahan tersebut, yaitu bilangan  $\frac{1}{1}$ .

Akar pohon ini memiliki dua buah simpul anak, keduanya merupakan mediant dari nilai akar dan nilai pecahan awal. Simpul pertama yaitu mediant dari  $\frac{0}{1}$  dan  $\frac{1}{1}$ , yaitu  $\frac{1}{2}$ . Simpul kedua yaitu mediant  $\frac{1}{1}$  dan  $\frac{1}{0}$ , yaitu  $\frac{2}{1}$ . Simpul-simpul ini diletakkan di sisi yang sama dengan bilangan pecahan awalnya. Kemudian penurunan tingkatan pohon ini dilakukan seterusnya hingga ketinggian pohon yang diinginkan.

Berikut ini visualisasi dari pohon Stern-Brocot, yang perhitungannya masih dapat dilanjutkan sampai mencapai ketinggian yang diinginkan

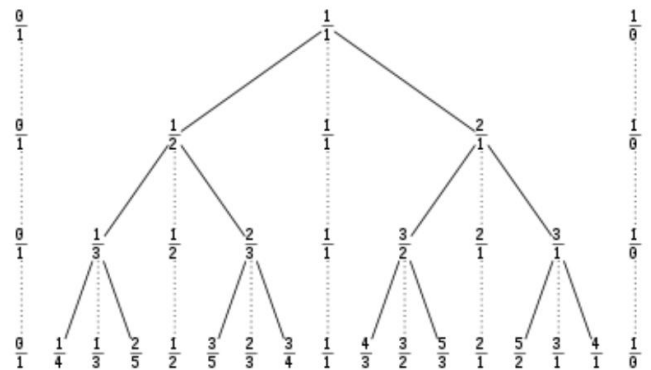


**Gambar 5.** Penggambaran pohon Stern-Brocot  
(sumber : [9])

Pohon Stern-Brocot ini memiliki sifat khusus, yaitu akan memunculkan setiap kemungkinan bilangan pecahan positif sebanyak tepat satu kali. Apabila sebuah bilangan rasional r tidak ditemukan pada pohon Stern-Brocot menuju bilangan pecahan x, maka akan ada bilangan pecahan lain dengan pembilang dan penyebut tidak lebih besar dari r, yang dalam garis bilangan terletak diantara r dan x.

Sifat ini akan menyebabkan setiap bilangan pecahan positif tersebut akan memiliki sebuah string ekspansi Stern-Brocot (atau *Stern-Brocot expansion*) yaitu sebuah string karakter (mungkin kosong, dan mungkin juga memiliki panjang tak terhingga) yang terdiri dari karakter “L” untuk *left* dan “R” untuk *right* sebagai representasi lintasan yang harus dilalui dari titik awal akar pohon hingga sampai ke simpul pecahan tersebut.

Pohon Stern-Brocot ini pada akhirnya akan menghasilkan garis bilangan dari 0 sampai nilai tak terhingga pada tiap-tiap tingkatannya, dengan jumlah pecahan di garis bilangan tersebut bertambah seiring bertambahnya ketinggian, seperti ditunjukkan pada gambar berikut



**Gambar 6.** Pohon Stern-Brocot sebagai garis bilangan  
(sumber : [4])

**III. PEMBAHASAN**

Dalam pembuatan mesin jam, perlu dibuat sebuah rangkaian kereta roda gigi yang sesuai sehingga pergerakan jarum jam sesuai dengan pertambahan detik waktu. Oleh karena itu dibutuhkan roda gigi dengan jumlah *teeth* yang tepat.

Misalnya untuk menggerakkan jarum menit, diperlukan rangkaian kereta roda gigi yang memiliki rasio  $\frac{1}{60}$ . Ada banyak sekali cara untuk menghasilkan rasio ini, menggunakan rangkaian kereta roda gigi yang berbeda-beda. Secara teoritis, tidak akan ditemukan permasalahan selama hasil rasio akhirnya adalah  $\frac{1}{60}$ .

Sedangkan untuk menggerakkan jarum yang menunjukkan jam, jika dihubungkan dengan jarum menit yang memiliki rasio  $\frac{1}{60}$ , akan diperlukan rasio  $\frac{1}{60 * 12} = \frac{1}{720}$ . Untuk menghasilkan rasio ini, kita dapat menggunakan *pinion* dengan jumlah *teeth* 1 dipasangkan dengan *wheel* ber-*teeth* 720, atau menggunakan kereta roda gigi dengan roda-roda dengan rasio faktor 720 (misalnya satu buah roda gigi ber-rasio  $\frac{1}{60}$  dan satu buah roda gigi ber-rasio  $\frac{1}{12}$ ) yang disusun sedemikian rupa sehingga rasio

akhirnya tetap  $\frac{1}{720}$ .

Masalah yang bisa ditemukan pada pembuatan jam analog jika ingin dibuat jarum yang memerlukan roda gigi dengan rasio bilangan prima. Hal ini berarti rasio tersebut tidak dapat dihasilkan dari gabungan beberapa roda gigi ber-rasio bilangan faktor nya. Hal ini tentu saja membuat sulit pembuat jam karena roda gigi dengan jumlah *teeth* prima tersebut tidak pasti tersedia.

Misalnya seperti permasalahan yang diangkat oleh Camus pada abad ke-18, jika digunakan pinion yang berputar sekali setiap jam dan ingin menggerakkan wheel yang berputar sekali setiap tahun tropis (didasarkan pada revolusi bumi terhadap matahari, tahun tropis memiliki durasi rata-rata 365 hari 5 jam 49 menit). Maka akan diperlukan kereta roda gigi dengan rasio

$$\frac{\frac{720}{(365 * 24 * 60) + (5 * 60) + 49}}{\frac{720}{525949}} = \frac{720}{525949} \quad (3)$$

dimana penyebut dari pecahan tersebut adalah bilangan prima.

Untuk menghitung erornya, misalkan rasio  $\frac{720}{525949}$  sebagai  $\frac{p}{q}$ . Maka akan dibuat *pinion* dengan *teeth* sebanyak p yang menggerakkan *wheel* dengan *teeth* sebanyak q. *Pinion* tersebut bergerak sebesar satu putaran setiap 720 menit dan *wheel*-nya setiap  $\frac{720q}{p}$  menit. Sehingga akan didapat eror

$$\begin{aligned} 720 \frac{q}{p} - 525949 &= \frac{720q - 525494p}{p} \\ &= \frac{A\left(\frac{p}{q}, \frac{720}{525494}\right)}{p} \text{ menit} \\ &= (q * 720) - (525494 * p) \text{ menit} \end{aligned} \quad (4)$$

Karena nilai rasio yang ingin dihitung sangat besar, maka untuk mencari bilangan aproksimasi  $\frac{720}{525949}$  digunakan string ekspansi Stern-Brocot dari pecahan tersebut, yaitu  $L^{730}R^2L^{15}RL^6R^2$ .

Maka akan didapat tabel seperti berikut

	p	q	$A\left(\frac{p}{q}, \frac{720}{525494}\right)$
	0	1	720
	1	0	
	1	1	
L	1	2	-524509
L	...	...	...
L	1	730	-349
L	1	731	371
R	2	1461	22
R	3	2191	-327
L	5	3652	-305
L	7	5113	-283
L	...	...	...
L	29	21184	-41
L	31	22645	-19
L	33	24106	3
R	64	46751	-16
L	97	70857	-13
L	130	94963	-10

L	163	119069	-7
L	196	143175	-4
L	229	167281	-1
L	262	191387	2
R	491	358668	1
R	720	525949	0

**Tabel 1.** Pencarian pecahan paling mirip dengan  $\frac{720}{525949}$  (sumber : [8])

Dari tabel tersebut ditemukan  $\frac{196}{143175}$  yang terdiri dari faktor-faktor berikut

$$\frac{196}{143175} = \frac{2}{3} * \frac{2}{25} * \frac{7}{23} * \frac{7}{83} \quad (5)$$

dengan nilai eror yang sangat kecil yaitu jarum akan berputar  $\frac{4}{196}$  menit lebih cepat dari perhitungan tahun tropis yang sebenarnya. Untuk mempermudah pencarian rasio yang mirip dengan  $\frac{720}{525949}$  tersebut, dapat menggunakan *table of factors of all useful numbers* yang dibuat oleh Merritt.

#### IV. KESIMPULAN

Untuk membuat mesin jam yang akurat dalam menunjukkan waktu, perlu digunakan roda gigi dengan rasio yang sesuai. Rasio yang paling dekat dan akurat tersebut dapat dihitung dengan bantuan pohon Stern-Brocot. Sebagai tambahan dari pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, pembaca dapat menggali lebih lanjut permasalahan rasio lain yang lebih sederhana dan langkah-langkah menyelesaikannya.

#### V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama, penulis memanjatkan rasa syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmatnya, penulis bisa menyelesaikan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua yang tidak henti mendukung dan mendidik penulis, serta kepada Bu Fariska Zakhralativa Ruskanda S.T.,M.T. selaku dosen pengampu Mata Kuliah Matematika Diskrit Kelas 3 atas seluruh ilmu dan bimbingannya. Terakhir, penulis mengucapkan terima kasih kepada teman-teman yang mendukung proses belajar penulis. Penulis berharap makalah ini dapat memberi manfaat baik kepada penulis sendiri maupun kepada orang lain.

#### REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi. 2020. Pohon (Bag. 1). Diakses pada 9 Desember 2020 dari <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Pohon-2020-Bag1.pdf>.
- [2] Munir, Rinaldi. 2020. Pohon (Bag. 2). Diakses pada 9 Desember 2020 dari <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Pohon-2020-Bag2.pdf>.
- [3] Brain, Marshall. "How Gear Ratios Work". Diakses pada 9 Desember 2020 dari <https://science.howstuffworks.com/transport/engines-equipment/gear-ratio.htm>.
- [4] Algmyr, Anton. "The Stern-Brocot tree and Farey sequences". Diakses pada 11 Desember 2020 dari [https://cp-algorithms.com/others/stern\\_brocot\\_tree\\_farey\\_sequences.html](https://cp-algorithms.com/others/stern_brocot_tree_farey_sequences.html).
- [5] "Generalized Mediant". Diakses pada 11 Desember 2020 dari <https://www.mathpages.com/home/kmath055/kmath055.htm>.

- [6] Weisstein, Eric W. "Stern-Brocot Tree." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/Stern-BrocotTree.html>
- [7] Roegel, Denis. (2011) *A reconstruction of Merritt's Brocot table (1947)*. Research Report. Diakses pada 11 Desember 2020 melalui HAL dari <https://hal.inria.fr/hal-00654445/document>.
- [8] Austin, David. "Trees, Teeth, and Time : The mathematics of clock making". Diakses pada 11 Desember 2020 dari <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-stern-brocot>.
- [9] Bates, Bunder, and Tognetti. "Locating terms in the Stern-Brocot tree". Diakses pada 11 Desember 2020 dari <https://www.semanticscholar.org/paper/Locating-terms-in-the-Stern-Brocot-tree-Bates-Bunder/b5700183e87ec2f695c99694e07eb795738f848b/figure/0>.

### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2020



Afifah Fathimah Qur'ani 13519183