

**Tugas Besar 1 IF2123 AljabarLinier dan Geometri
Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya
Semester Tahun 2019/2020**

- (i) Sistem persamaan linier (SPL) $Ax = b$ dengan n peubah (*variable*) dan m persamaan adalah berbentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien $\in \mathbb{R}$. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

- (ii) Sebuah matriks M berukuran $n \times n$

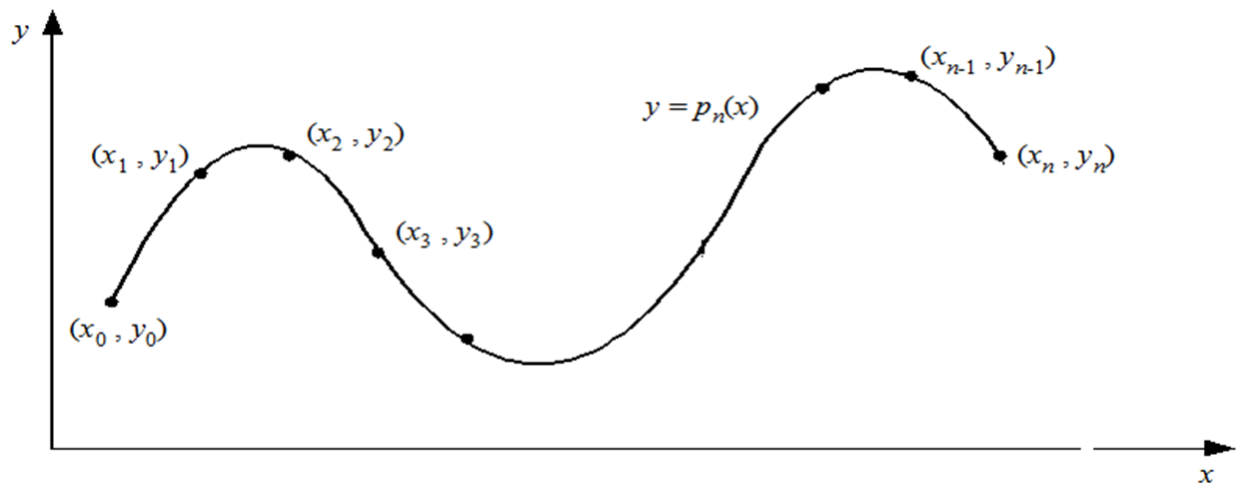
$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

determinannya adalah

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

- (iii) Balikan (*inverse*) matriks M berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan banyak cara: menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan dan menggunakan matriks adjoin.

Kembali ke sistem persamaan linier (SPL). SPL memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, salah satunya adalah mengestimasi nilai fungsi dengan interpolasi polinom. Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) , maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, dan (x_2, y_2) , maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persamaan kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, dan (x_3, y_3) , polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan linier dalam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \dots & \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan linier ini, yaitu nilai a_0, a_1, \dots, a_n , diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu $(8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972)$, dan $(9.5, 2.2513)$. Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan linier yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

SPEKIFIKASI TUGAS

Buatlah program dalam Bahasa Java untuk

1. Menghitung solusi SPL dengan metode eliminasi metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n pebuah dan n persamaan).
2. Menyelesaikan persoalan interpolasi.
3. Menghitung determinan matriks dengan berbagai cara yang disebutkan di atas, matriks kofaktor, dan matriks *adjoin* dari sebuah matriks $n \times n$.

Spesifikasi program adalah sebagai berikut:

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari *keyboard* maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari *keyboard* adalah m, n , koefisien a_{ij} , dan b_i . Masukan dari *file* berbentuk matriks *augmented* tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 4.5 & 2.8 & 10 & 12 & \\ -3 & 7 & 8.3 & 11 & -4 & \\ 0.5 & -10 & -9 & 12 & 0 & \end{array}$$

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari *keyboard* adalah n dan koefisien a_{ij} . Masukan dari *file* berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

$$\begin{array}{cccc} 3 & 4.5 & 2.8 & 10 \\ -3 & 7 & 8.3 & 11 \\ 0.5 & -10 & -9 & 12 \end{array}$$

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n , (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , dan nilai x yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah $(8.0, 2.0794)$, $(9.0, 2.1972)$, dan $(9.5, 2.2513)$, maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

$$8.0 \ 2.0794$$

9.0 2.1972

9.5 2.2513

3. Untup persoalan SPL, luaran (*output*) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya $x_4 = -2$, $x_3 = 2s - t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$.)
4. Untuk persoalan determinan, matriks balikan, matriks kofaktor, dan adjoin, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing
5. Untuk persoalan polinom interpolasi, luarannya adalah persamaan polinom dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.
6. Luaran program harus dapat ditampilkan **pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file**.
7. Bahasa program yang digunakan adalah Java.
8. Program **tidak harus** berbasis GUI, cukup text-based saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas *Eclipse* misalnya).
9. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan ditrancang masing-masing. Misalnya, menu:

MENU

1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Matriks kofaktor
5. Adjoin
6. Interpolasi Polinom
7. Keluar

Untuk pilihan menu nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Begitu juga untuk pilihan menu nomor 2 dan 3.

10. Sebagai pembanding, bandingkan solusi program anda dengan hasil dari Wolfram Alpha.

PROSEDUR Pengerjaan

1. Tugas dikerjakan secara berkelompok yang terdiri dari 3 orang.
2. Tugas ini dikumpulkan hari Jumat 27 September 2019 paling lambat pukul 9.00 pagi di atas loker Lab IRK. Silakan isi presens pengumpulan dan tanggal untuk demo program di depan asisten. Penilaian tugas adalah melalui demo di depan asisten.

LAPORAN

1. *Cover*: *Cover* laporan ada foto anggota kelompok (foto bertiga, bebas gaya). Foto ini menggantikan logo “gajah” ganesha.

Bab 1: Deskripsi masalah (dapat meng-copy paste file tugas ini). File doc akan dikirim lewat milis, file pdf dapat diunduh dari laman web

<http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2019-2020/algeo19-20.htm>

Bab 2: Teori singkat mengenai metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, deteminan, matriks balikan, matriks kofaktor, matriks adjoin, kaidah Cramer, interpolasi polinom.

Bab 3: Implementasi program dalam Java, meliputi struktur *class* yang didefinisikan (atribut dan method), garis besar program, dll.

Bab 4: Eksperimen. Bab ini berisi hasil eksekusi program terhadap contoh-contoh kasus yang diberikan berikut analisis hasil eksekusi tersebut

Bab 5: Kesimpulan, saran, dan refleksi (hasil yang dicapai, saran pengembangan, dan refleksi anda terhadap tugas ini).

Tuliskan juga referensi (buku, web), yang dipakai/diacu di dalam Daftar Referensi.

Keterangan laporan dan program:

- a) Laporan ditulis dalam bahasa Indonesia yang baik dan benar, tidak perlu panjang tetapi tepat sasaran dan jelas.
- b) Laporan tidak perlu memakai *cover* mika dan dijilid. Cukup dibuat agar laporan tidak akan tercecer bila dibaca.
- c) Laporan boleh menggunakan kertas rius, boleh bolak-balik, boleh dalam satu halaman kertas terdapat dua halaman tulisan asalkan masih terbaca.
- d) Identitas per halaman harus jelas (misalnya : halaman, kode kuliah).
- e) *Listing* program tidak perlu disertakan pada laporan.
- e) Program disimpan di dalam *folder* Algeo-xxxxx. Lima digit terakhir adalah NIM anggota terkecil. Didalam *folder* tersebut terdapat tiga folder bin, src dan doc yang masing-masing berisi :
Folder *bin* berisi *java byte code* (.class)
Folder *src* berisi *source code* dari program java
Folder *test* berisi data uji.
Folder *doc* berisi dokumentasi program dan *readme*

PENGUMPULAN TUGAS

1. Yang diserahkan saat pengumpulan tugas adalah:
 - a) Laporan (*hard copy*)
 - b) Kode program + Java *bytecode* + soft copy laporan dikirim ke alamat *Google Drive* yang nanti akan diumumkan oleh asisten.

2. *Java bytecode* dapat dijalankan. Asisten pemeriksa tidak akan melakukan *setting* atau kompilasi lagi agar program dapat berjalan. Program yang tidak dapat dijalankan tidak akan diberi nilai.
3. Laporan akan dikembalikan setelah dinilai.

PENILAIAN

Komposisi penilaian umum adalah sebagai berikut :

1. Program: 80 %
2. Laporan : 20 %

STUDI KASUS

Untuk menguji program anda, tes dengan beberapa SPL, persoalan interpolasi polinom, dan matriks-matriks sebagai berikut:

1. Temukan solusi SPL $Ax = b$, berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk $n = 6$ dan $n = 10$.

2. SPL berbentuk matriks *augmented*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. SPL berbentuk

(i)

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\ 0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\ 0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\ 0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\ 0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\ 0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\ 0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04 \end{aligned}$$

3. Untuk persoalan determinan, matrisk balikan, dan matriks kofaktor, silakan cari masing-masing dua buah matriks yang berukuran 5 x 5 dan 10 x 10.

4. Interpolasi

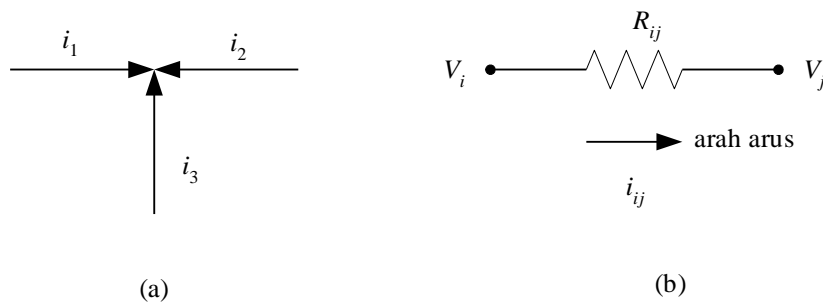
Dalam sebuah rangkaian listrik berlaku hukum-hukum arus Kirchoff menyatakan bahwa jumlah aljabar dari semua arus yang memasuki suatu simpul (Gambar 4.4a) haruslah nol:

$$\sum i = 0$$

Dalam hal ini, semua arus i yang memasuki simpul dianggap bertanda positif. Sedangkan hukum Ohm (Gambar 1) menyatakan bahwa arus i yang melalui suatu tahanan adalah :

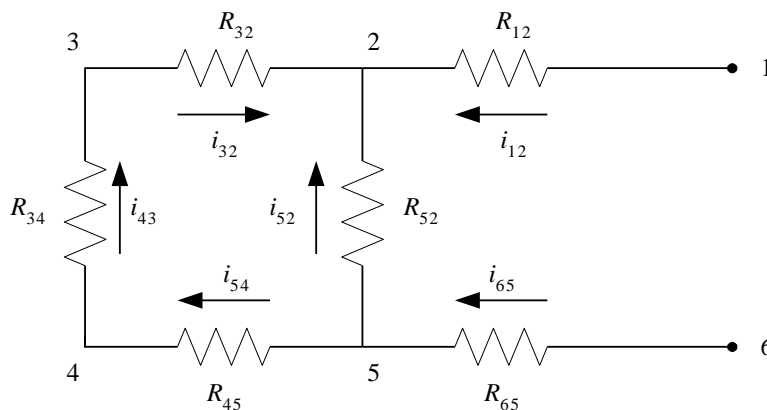
$$i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

yang dalam hal ini V adalah tegangan dan R adalah tahanan.



Gambar 1 (a) Hukum Kirchoff, (b) hukum Ohm

Diberikan sebuah rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan seperti pada Gambar 2 Anda diminta menghitung arus pada masing-masing rangkaian.



Gambar 2 Rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan

Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{array}{rclcl} i_{12} & + & i_{52} & + & i_{32} & = & 0 \\ i_{65} & - & i_{52} & - & i_{54} & = & 0 \\ i_{43} & - & i_{32} & & & = & 0 \\ i_{54} & - & i_{43} & & & = & 0 \end{array}$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$\begin{array}{rclcl}
i_{32} R_{32} & - V_3 & + V_2 & = & 0 \\
i_{43} R_{43} & - V_4 & + V_3 & = & 0 \\
i_{65} R_{65} & & + V_5 & = & 0 \\
i_{12} R_{12} & & + V_2 & = & 0 \\
i_{54} R_{54} & - V_5 & + V_4 & = & 0 \\
i_{52} R_{52} & - V_5 & + V_2 & = & 0
\end{array}$$

Tentukan

$$i_{12}, i_{52}, i_{32}, i_{65}, i_{54}, i_{13}, V_2, V_3, V_4, V_5$$

bila diketahui

$$\begin{array}{l}
R_{12} = 5 \text{ ohm}, \quad R_{52} = 10 \text{ ohm}, \quad R_{32} = 10 \text{ ohm} \\
R_{65} = 20 \text{ ohm}, \quad R_{54} = 15 \text{ ohm}, \quad R_{14} = 5 \text{ ohm.} \\
V_1 = 200 \text{ volt}, \quad V_6 = 0 \text{ volt.}
\end{array}$$

5. **(Interpolasi)** Jumlah penduduk Jawa Barat dari tahun 1971 hingga 2010 (dibulatkan ke juta) adalah sebagai berikut:

| Tahun | Jumlah x 10 ⁶) |
|-------|----------------------------|
| 1971 | 21,6 |
| 1980 | 27,4 |
| 1990 | 35,4 |
| 1995 | 39,2 |
| 2000 | 35,7 |
| 2010 | 43,2 |
| 2015 | 46,7 |
| 2019 | 49.1 |

Berdasarkan data tersebut prediksilah jumlah penduduk Jawa Barat pada tahun 1975, 1983, 1992, 2005, 2012 (atau nilai lain sesuai masukan user) dengan menggunakan polinom interpolasi.

6. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang $[0, 2]$. Sebagai contoh, jika $n = 5$, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang $[0, 2]$ berjarak $h = (2 - 0)/5 = 0.4$.