Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika, Relasi Rekurens, dan Aljabar Boolean
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Fariska Zakhralativa
Kamis, 3 Oktober 2019
Waktu: 50 menit

1. Misalkan F_n adalah suku ke-*n* dari barisan Fibonacci. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap $n \geq 1$ berlaku $\boldsymbol{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}}$ **(Nilai = 25)**

Jawaban: Akan dibuktikan bahwa untuk setiap n >= 1 berlaku: $\mathbf{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}}$

(Basis Induksi)
Untuk kasus basis n = 1, maka kita peroleh : $\mathbf{F_1^2 = F_1F_2}$
Hal ini bernilai benar, karena $\mathbf{F_1^2 = 1^2 = 1,}$ dan $\mathbf{F_1F_2 = (1)(1) = 1}$.

(Langkah Induksi)
Andaikan untuk n = k pernyataan diatas bernilai benar. Akan dibuktikan bahwa untuk n = k+1 juga bernilai benar, yakni

$$\mathbf{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_{n+2}}$$

Juga bernilai benar. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + F_{n+1}^2} \\
&\mathbf{= (F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2) + F_{n+1}^2} \\
&\mathbf{= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2} \\
&\mathbf{= F_{n+1}(F_n + F_{n+1})} \\
&\mathbf{= F_{n+1}F_{n+2}}
\end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya terbukti benar, maka terbukti bahwa untuk setiap n >= 1 berlaku $\mathbf{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}}$

2. Dalam buku *85 Ways to Tie a Tie*, Fink dan Mao mengemukakan bahwa terdapat J_n cara untuk mengikat sebuah dasi dengan *n*+2 "belokan". J_n adalah suku ke-n dari *barisan Jacobsthal* , sebuah baris yang ditemukan oleh Ernst Jacobsthal. Barisan tersebut berlaku untuk bilangan asli *n* dan didefinisikan sbb:

$$J(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ 1, n = 1 \\ J(n-1) + 2J(n-2), n \geq 2 \end{cases}$$

(Nilai = 25)

Tentukan (a) Solusi *J(n)* sebagai fungsi dari *n*, (b) Banyaknya cara mengikat dasi dengan 10 buah "belokan".

Jawaban:

a. Buatlah persamaan karakteristik dari persoalan: $r^2 - r - 2 = 0$, diperoleh $r_1 = 2$ dan $r_2 = -1$.

Solusi umum adalah : $J(n) = C_1r_1^n + C_2r_2^n$. Dengan substitusi n=0 dan n=1, didapat $C_1 = ⅓$ dan $C_2 = -⅓$ sehingga persamaan menjadi: $J(n) = (2^n - (-1)^n)/3$

b. Cara mengikat dasi untuk 10 buah belokan adalah J(8) = 85

3. Gunakan Peta Karnaugh untuk merancang rangkaian logika yang dapat menentukan apakah tiga atau lebih dari empat individu di suatu kepanitiaan memilih setuju untuk sebuah isu, di mana setiap individu hanya bisa memilih antara setuju atau tidak setuju saat pemungutan suara. **(Nilai= 25)**

Jawaban: Soal ini adalah persalan *majority* problem. Tabel kebenarannya adalah sbb (angka 1 menyatakan setuju dan angka 0 menyatakan tidak setuju)

w	x	y	z	f(w,x,y,z)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Peta Karnaugh

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	1	1	1
	10	0	0	1	0

Hasil penyederhanaan: f(w,x,y,z) = xyz + wxz + wxy + wyz

4. Buatlah rangkaian logika yang membandingkan dua bilangan bulat biner $x=(x_1x_0)_2$ dan $y=(y_1y_0)_2$. Sirkuit akan mengembalikan 1 jika $x > y$. Sederhanakan terlebih dahulu dengan peta Karnaugh. **(Nilai = 25)**

Jawaban:

Fungsi dapat diperoleh melalui enumerasi nilai ataupun logika sederhana.

x lebih besar dari y jika $x_1 > y_1$ ($x_1 = 1$, $y_1 = 0$), atau jika $x_1 = y_1$ dan $x_0 > y_0$ ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$).

Fungsi Boolean:

$f(x_1, x_0, y_1, y_0) = x_1y_1' + ((x_1y_1 + x_1'y_1')x_0y_0'$

Tabel nilai

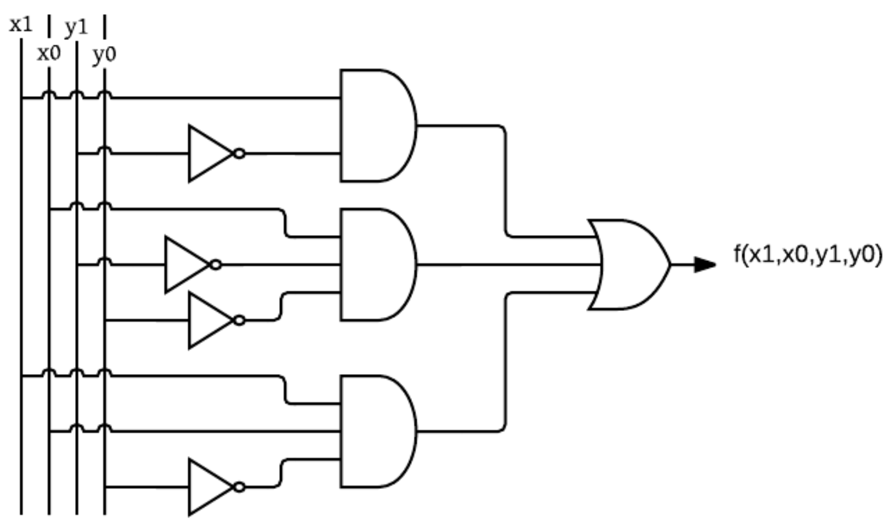
x_1	x_0	y_1	y_0	$f(x_1,x_0,y_1,y_0)$
1	1	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

Peta Karnaugh

x_1x_0/y_1y_0	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

Fungsi Boolean hasil penyederhanaan:

$f(x_1, x_0, y_1, y_0) = x_1y_1' + x_0y_1'y_0' + x_1x_0y_0'$



Jawaban setiap soal ditulis di bawah ini. Gunakan halaman dibalik atau kertas tambahan jika diperlukan.