

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Himpunan, Relasi dan Fungsi
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Fariska Zakhralatifa
Senin, 12 September 2019
Waktu: 50 menit

1. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa IF dan B adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit (Matdis). Buatlah ekspresi matematika himpunan dari pernyataan berikut dalam istilah A dan B. (20)
- Himpunan mahasiswa IF yang mengambil kuliah Matdis
 - Himpunan mahasiswa IF yang tidak mengambil kuliah Matdis
 - Himpunan mahasiswa ITB yang merupakan mahasiswa IF atau, yang mengambil kuliah Matdis
 - Himpunan mahasiswa ITB yang **bukan** merupakan mahasiswa IF atau, yang **tidak** mengambil kuliah Matdis.

Jawaban: a) $A \cap B$ b) $A - B$ c) $A \cup B$ d) $A^c \cup B^c$ atau $(A \cap B)^c$

2. Jika A,B,dan C adalah himpunan, berikanlah bukti bahwa $(A - B) - (B - C) = (A - B)$ dengan menyertakan hukum-hukum himpunan yang Anda gunakan! (20)

Jawaban:

$$\begin{aligned}(A - B) - (B - C) &= (A \cap B^c) \cap (B \cap C^c)^c \text{ bentuk lain} \\ &= (A \cap B^c) \cap (B^c \cup C) \text{ Hukum de Morgan} \\ &= [(A \cap B^c) \cap B^c] \cup [(A \cap B^c) \cap C] \text{ hukum distributif} \\ &= [A \cap (B^c \cap B^c)] \cup [A \cap (B^c \cap C)] \text{ hukum asosiatif} \\ &= [A \cap B^c] \cup [A \cap (B^c \cap C)] \text{ hukum idempoten} \\ &= A \cap [B^c \cup (B^c \cap C)] \text{ hukum distributif} \\ &= A \cap B^c \text{ hukum absorpsi} \\ &= A - B \text{ bentuk lain}\end{aligned}$$

3. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan R relasi pada himpunan A, yaitu $R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,4)\}$. Tentukan apakah R refleksif/tidak, setangkup/tidak, tolak-setangkup/tidak, menghantar/tidak. (20)

Jawaban: Sifat-sifat relasi A:

- Tidak refleksif, karena $(2,2)$ dan $(3,3) \notin A$
- Tidak menghantar, karena $(1, 3)$ dan $(3, 2) \in A$, tetapi $(1, 2) \notin A$.
- Tidak setangkup, karena $(3, 2) \in A$, tetapi $(2, 3) \notin A$.
- Tidak tolak-setangkup, karena $(1, 3)$ dan $(3, 1) \in A$ tetapi $1 \neq 2$

Relasi A belum refleksif, menghantar, dan setangkup.

- Untuk membuat relasi A refleksif, tambahkan $(2,2)$ dan $(3,3)$ ke dalam A.

Relasi baru, S, mengandung A,yaitu

$$S = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

Relasi S adalah relasi klosur refleksif dari relasi A.

- Untuk membuat relasi A menghantar, tambahkan (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3) ke dalam A.

Relasi baru, S, mengandung A, yaitu

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Relasi S adalah relasi klosur menghantar dari relasi A.

- Untuk membuat relasi A setangkup, tambahkan (2,3) ke dalam A.

Relasi baru, S, mengandung A, yaitu

$$S = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

Relasi S adalah relasi klosur setangkup dari relasi A.

4. Dalam rangka pemindahan ibukota ke tempat yang baru, pemerintah berencana membangun infrastruktur jalan untuk menghubungkan antar kabupaten di Provinsi Kalimantan Timur. Terdapat 4 kabupaten yang akan dibangun jalannya, yaitu Kabupaten Paser, Balikpapan, Bontang, dan Samarinda. Semua jalan yang menghubungkan kota A dan B hanya berlaku satu arah, artinya jika ada jalan dari kota A ke kota B belum tentu terdapat jalan sebaliknya. Sampai saat ini hanya terdapat 6 jalan yang terbangun yaitu jalan **Paser - Balikpapan, Bontang - Samarinda, Balikpapan - Bontang, Samarinda - Bontang, Paser - Bontang, dan Samarinda - Paser**. Tentukan ruas jalan yang harus dibangun secara minimal, jika semua jalan yang sudah terbangun berlaku 2 arah. (20)

Jawaban: Permasalahan diatas dapat diubah menjadi bentuk relasi. Untuk mempermudah kita misalkan kabupaten sebagai variabel.

Misalkan :

- A = Paser
- B = Balikpapan
- C = Bontang
- D = Samarinda

Misalkan relasi (a,b) menyatakan bahwa terdapat jalan dari kota A ke kota B, maka didapat himpunan relasi : $R = \{(A,B), (C,D), (B,C), (D,C), (A,C), (D,A)\}$

Agar jalan terhubung 2 arah, relasi haruslah bersifat setangkup. Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$, dengan $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$

$$R^{-1} = \{(B,A), (D,C), (C,B), (C,D), (C,A), (A,D)\}$$

Sehingga klosur setangkup dari R adalah

$$R \cup R^{-1} = \{(A,B), (C,D), (B,C), (D,C), (A,C), (D,A), (B,A), (C,B), (C,A), (A,D)\}$$

Sehingga ruas jalan yang harus dibangun adalah ruas jalan **Balikpapan - Paser, Bontang - Balikpapan, Bontang - Paser, dan Paser - Samarinda**.

5. Tentukan apakah fungsi di bawah ini memiliki balikan atau tidak beserta alasannya. Jika memiliki balikan, tentukan fungsi balikannya ! (20)

a. $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

b. $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, h(x) = |x| + 5$, dengan $|x|$ bernilai x jika $x \geq 0$, bernilai $-x$ jika $x < 0$

c. $f : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{a,b,c,d\}, f = \{(1,b), (2,a), (3,d), (4,c)\}$

Jawaban: Suatu fungsi dikatakan memiliki balikan (invers) jika fungsi tersebut merupakan bijektif. Sebuah fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

- a. Fungsi tersebut dapat disederhanakan menjadi $g(x) = (x - 1)^3 + 1$. Fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif, karena seluruh elemen dari kodomain fungsi tersebut merupakan bayangan dari setidaknya satu elemen dari domain. Fungsi tersebut juga merupakan fungsi injektif, karena setiap elemen domain memiliki bayangan yang berbeda. Sehingga fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif. Oleh karena itu, fungsi tersebut memiliki balikan.

Misal $g(x) = y$, sehingga $y = (x - 1)^3 + 1$. Dengan operasi aljabar didapat $x = \sqrt[3]{(y - 1) + 1}$. Jadi fungsi balikannya adalah $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x - 1) + 1}$

- b. Fungsi tersebut tidak memiliki balikan, karena fungsi tersebut bukan merupakan fungsi injektif. Pada fungsi tersebut, terdapat elemen domain yang memiliki bayangan yang sama. Misalnya untuk $x = 1$ dan $x = -1$ memiliki bayangan yang sama, yaitu $f(1) = f(-1) = 6$.

- c. Fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif, karena seluruh elemen dari kodomain fungsi tersebut merupakan bayangan dari setidaknya satu elemen dari domain. Fungsi tersebut juga merupakan fungsi injektif, karena setiap elemen domain memiliki bayangan yang berbeda. Sehingga fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif. Oleh karena itu, fungsi tersebut memiliki balikan.

Balikan dari fungsi tersebut adalah

$$f : \{a,b,c,d\} \rightarrow \{1,2,3,4\}, f = \{(a,2), (b,1), (c,4), (d,3)\}$$