

Matriks, Relasi, dan Fungsi

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Matriks

- Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.
- Dalam praktek, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi ringkas $A = [a_{ij}]$.

Contoh 1. Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks simetri adalah matriks yang $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j .

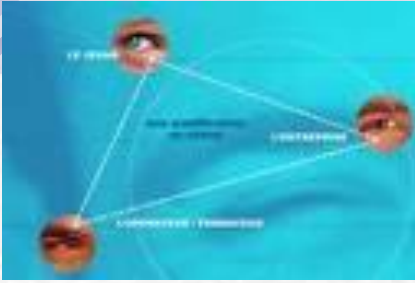
Contoh 2. Di bawah ini adalah contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks *zero-one* (0/1) adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.

Contoh 3. Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Relasi



- Jika ada dua himpunan A dan B , bagaimana menyatakan hubungan antara anggota kedua himpunan tersebut?
- Kita bisa menggunakan pasangan terurut (*ordered pairs*) (a, b) , yang dalam hal ini a diambil dari A dan b diambil dari B .
- Kita katakan a dihubungkan dengan b oleh sebuah **relasi**.

Contoh 1: Misalkan

$$A = \{\text{Hasan, Tanti, Rommi, Yusuf, Aditya}\}$$

adalah himpunan mahasiswa,

$B = \{\text{Toyota, Daihatsu, Mercedes, VW}\}$ adalah himpunan kendaraan.

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mahasiswa dan mobil yang dikendarainya.

$$R = \{(\text{Hasan, Daihatsu}), (\text{Rommi, Toyota}), (\text{Yusuf, Mercedes}), (\text{Aditya, Toyota})\}$$

Ini berarti Hasan mengendarai Daihatsu, Rommi mengendarai Toyota, Yusuf mengendarai Mercedes, dan Aditya mengendarai Toyota. Yusuf tidak mengendarai mobil apapun. Mobil VW tidak diekndarai siapapun di dalam relasi itu.

Contoh 2: Misalkan

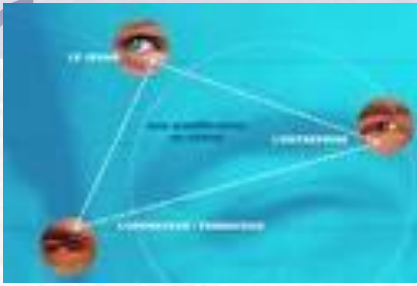
$A = \{\text{Daffa, Yosef, Harkunti, Mahendra, Wayan}\}$
adalah himpunan mahasiswa,

$B = \{A, AB, B, BC, C, D, E\}$ adalah himpunan nilai.
Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mahasiswa dan nilai mata kuliah Matdis yang diperolehnya pada semester ganjil.

$$R = \{(\text{Daffa}, BC), (\text{Yosef}, A), \\ (\text{Harkunti}, A), (\text{Mahendra}, B)\}$$

Ini berarti Daffa mendapat BC, Yosef mendapat A, Harkunti mendapat A, Mahendra mendapat B. Wayan tidak mengambil mata kuliah Matdis. Tiak ada mahasiswa yang mendapat C, D, dan E.

Relasi



- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- $a R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R
- $a \not R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R .
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R , dan himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R .

Contoh 3. Misalkan

$$A = \{\text{Amir, Budi, Cecep}\}, \quad B = \{\text{IF221, IF251, IF342, IF323}\}$$

$$A \times B = \{(\text{Amir, IF221}), (\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF342}), \\ (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), \\ (\text{Budi, IF342}), (\text{Budi, IF323}), (\text{Cecep, IF221}), \\ (\text{Cecep, IF251}), (\text{Cecep, IF342}), (\text{Cecep, IF323}) \}$$

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

$$R = \{(\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), \\ (\text{Budi, IF251}), (\text{Cecep, IF323}) \}$$

Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,

- A adalah daerah asal R , dan B adalah daerah hasil R .
- $(\text{Amir, IF251}) \in R$ atau Amir R IF251
- $(\text{Amir, IF342}) \notin R$ atau Amir $\not R$ IF342.

Contoh 4. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

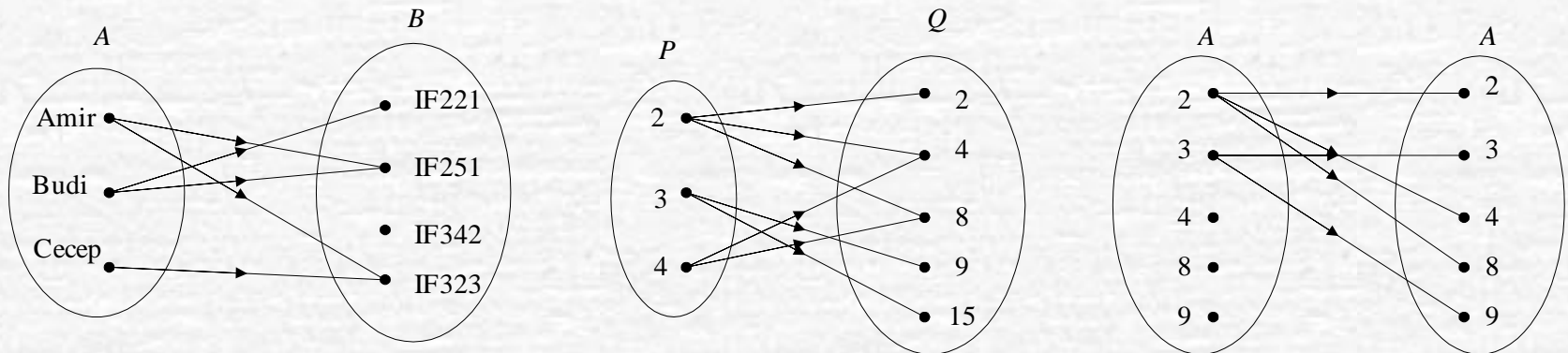
- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

Contoh 5. Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y . Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah



. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 1

<i>A</i>	<i>B</i>
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2

<i>P</i>	<i>Q</i>
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 3

<i>A</i>	<i>A</i>
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & \left[\begin{array}{cccc} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{array} \right. \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_m & \end{matrix}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 6. Relasi R pada Contoh 3 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini, $a_1 = \text{Amir}$, $a_2 = \text{Budi}$, $a_3 = \text{Cecep}$, dan $b_1 = \text{IF221}$, $b_2 = \text{IF251}$, $b_3 = \text{IF342}$, dan $b_4 = \text{IF323}$.

Relasi R pada Contoh 4 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

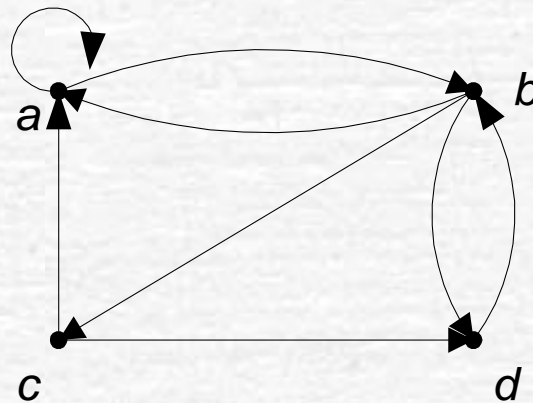
yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

4. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

- Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)
- Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b . Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).
- Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Contoh 7. Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



Sifat-sifat Relasi Biner

- Relasi biner yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat.

1. Refleksif (*reflexive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.
- Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 8. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A , maka

- (a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a) , yaitu $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, dan $(4, 4)$.
- (b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$.

Contoh 9. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh 10. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif \mathbf{N} .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 5, \quad T : 3x + y = 10$$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan $(2, 2)$ bukan anggota R , S , maupun T .

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

2. Menghantar (*transitive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 11. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A , maka

- (a) $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bersifat menghantar. Lihat tabel berikut:

Pasangan berbentuk		
(a, b)	(b, c)	(a, c)
$(3, 2)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$
$(4, 2)$	$(2, 1)$	$(4, 1)$
$(4, 3)$	$(3, 1)$	$(4, 1)$
$(4, 3)$	$(3, 2)$	$(4, 2)$

- (b) $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak menghantar karena $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$, tetapi $(2, 2) \notin R$, begitu juga $(4, 2)$ dan $(2, 3) \in R$, tetapi $(4, 3) \notin R$.
- (c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ jelas menghantar
- (d) Relasi $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.

Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti $R = \{(4, 5)\}$ selalu menghantar.

Contoh 12. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa a habis membagi b dan b habis membagi c . Maka terdapat bilangan positif m dan n sedemikian sehingga $b = ma$ dan $c = nb$. Di sini $c = nma$, sehingga a habis membagi c . Jadi, relasi “habis membagi” bersifat menghantar.

Contoh 13. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif \mathbf{N} .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 6, \quad T : 3x + y = 10$$

- R adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.
- S tidak menghantar karena, misalkan $(4, 2)$ dan $(2, 4)$ adalah anggota S tetapi $(4, 4) \notin S$.
- $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ tidak menghantar.

- Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya
- Sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari a ke b dan dari b ke c , maka juga terdapat busur berarah dari a ke c .

3. Setangkup (*symmetric*) dan tolak-setangkup (*antisymmetric*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$.
- Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.
- Relasi R pada himpunan A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$ disebut **tolak-setangkup**.
- Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

Contoh 14. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A , maka

- (a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$. Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.
- (b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak setangkup karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.
- (c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ tolak-setangkup karena $1 = 1$ dan $(1, 1) \in R$, $2 = 2$ dan $(2, 2) \in R$, dan $3 = 3$ dan $(3, 3) \in R$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.
- (d) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$ dan, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$ dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.
- (e) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$ tidak tolak-setangkup karena $2 \neq 4$ tetapi $(2, 4)$ dan $(4, 2)$ anggota R . Relasi R pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.
- (f) Relasi $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ tidak setangkup tetapi tolak-setangkup.

Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$ tidak setangkup dan tidak tolak-setangkup. R tidak setangkup karena $(4, 2) \in R$ tetapi $(2, 4) \notin R$. R tidak tolak-setangkup karena $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \in R$ tetap $2 \neq 3$.

Contoh 15. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika a habis membagi b , b tidak habis membagi a , kecuali jika $a = b$. Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, $(2, 4) \in R$ tetapi $(4, 2) \notin R$. Relasi “habis membagi” tolak-setangkup karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, $(4, 4) \in R$ dan $4 = 4$.

Contoh 16. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif \mathbf{N} .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 6, \quad T : 3x + y = 10$$

- R bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.
- S relasi setangkup karena $(4, 2)$ dan $(2, 4)$ adalah anggota S .
- T tidak setangkup karena, misalkan $(3, 1)$ adalah anggota T tetapi $(1, 3)$ bukan anggota T .
- S bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in S$ dan $(4, 2) \in S$ tetapi $4 \neq 2$.
- Relasi R dan T keduanya tolak-setangkup (tunjukkan!).

- Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari a ke b , maka juga ada busur dari b ke a .

- Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

Relasi Inversi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B . Invers dari relasi R , dilambangkan dengan R^{-1} , adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{ (b, a) \mid (a, b) \in R \}$$

Contoh 17. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R , yaitu relasi dari Q ke P dengan

$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R ,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1} , misalkan N , diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M ,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengkombinasikan Relasi

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.
- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B , maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B .

Contoh 18. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

$$\text{Relasi } R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$\text{Relasi } R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R_1} dan M_{R_2} , maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \quad \text{dan} \quad M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

Contoh 19. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Komposisi Relasi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B , dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C . Komposisi R dan S , dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S \}$$

Contoh 20. Misalkan

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

adalah relasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$ ke himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ dan

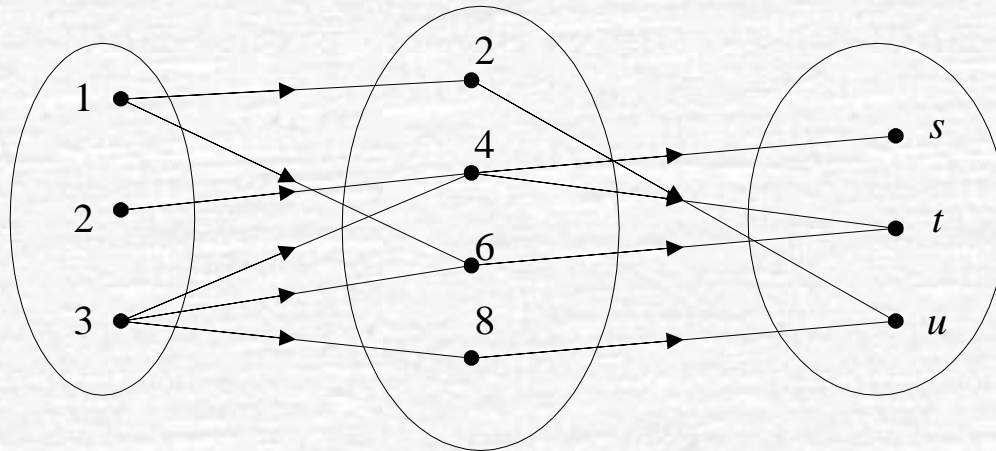
$$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

adalah relasi dari himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ ke himpunan $\{s, t, u\}$.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$$

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R_1} dan M_{R_2} , maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \cdot M_{R_2}$$

yang dalam hal ini operator “.” sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan “ \wedge ” dan tanda tambah dengan “ \vee ”.

Contoh 21. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \cdot M_{R_2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relasi n -ary

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.
- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi n -ary (baca: ener).
- Jika $n = 2$, maka relasinya dinamakan relasi biner ($bi = 2$). Relasi n -ary mempunyai terapan penting di dalam basisdata.
- Misalkan A_1, A_2, \dots, A_n adalah himpunan. Relasi n -ary R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Himpunan A_1, A_2, \dots, A_n disebut daerah asal relasi dan n disebut **derajat**.

Contoh 22. Misalkan

$$NIM = \{13598011, 13598014, 13598015, 13598019, \\ 13598021, 13598025\}$$

$$Nama = \{\text{Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}\}$$

$$MatKul = \{\text{Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data, \\ Arsitektur Komputer}\}$$

$$Nilai = \{A, B, C, D, E\}$$

Relasi MHS terdiri dari 5-tupel $(NIM, Nama, MatKul, Nilai)$:

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

$$\begin{aligned} MHS = \{ & (13598011, \text{Amir, Matematika Diskrit, A}), \\ & (13598011, \text{Amir, Arsitektur Komputer, B}), \\ & (13598014, \text{Santi, Arsitektur Komputer, D}), \\ & (13598015, \text{Irwan, Algoritma, C}), \\ & (13598015, \text{Irwan, Struktur Data C}), \\ & (13598015, \text{Irwan, Arsitektur Komputer, B}), \\ & (13598019, \text{Ahmad, Algoritma, E}), \\ & (13598021, \text{Cecep, Algoritma, A}), \\ & (13598021, \text{Cecep, Arsitektur Komputer, B}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Matematika Diskrit, B}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Algoritma, A, B}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Struktur Data, C}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Ars. Komputer, B}) \\ & \} \end{aligned}$$

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

- Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel.
- Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*). Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.
- Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**. Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.
- Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.
- Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.
- Secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.
- Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasi secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).

- Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.
- Contoh *query*:
 - “tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit”
 - “tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015”
 - “tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil”
- *Query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.
- Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

Seleksi

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.

Operator: σ

Contoh 23. Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul}=\text{"Matematika Diskrit"}}(\text{MHS})$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)

Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.

Operator: π

Contoh 24. Operasi proyeksi

$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}} (\text{MHS})$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$\pi_{\text{NIM, Nama}} (\text{MHS})$

menghasilkan Tabel 3.6.

Tabel 3.5

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 3.6

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

Join

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.

Operator: τ

Contoh 25. Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*

$$\tau_{\text{NIM, Nama}}(\text{MHS1, MHS2})$$

menghasilkan Tabel 3.9.

Tabel 3.7

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 3.8

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statistik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 3.9

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

Fungsi

- Misalkan A dan B himpunan.
Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B .

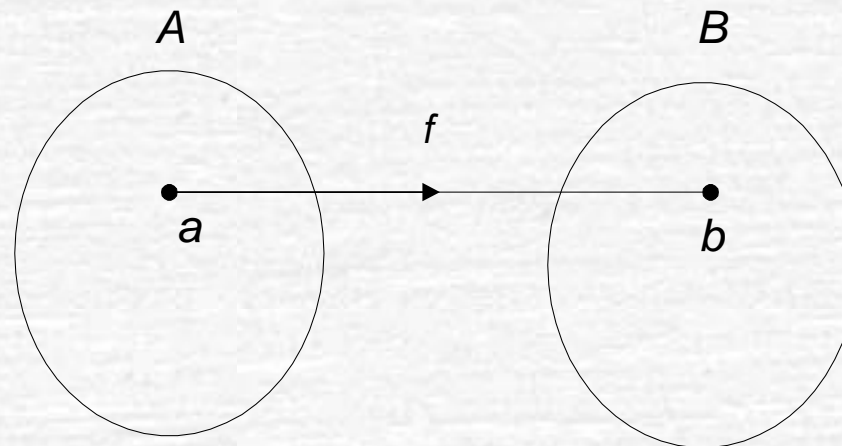
Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f: A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B .

- A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f .
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.
- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B .

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b .
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f . Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B .



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
 1. Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f .
 2. Frasa “dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B ” berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut.
Seperti pada relasi.

2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

3. Kata-kata
Contoh: “ f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner”.

4. Kode program (*source code*)
Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs (x:integer) :integer;  
begin  
    if x < 0 then  
        abs := -x  
    else  
        abs := x;  
end;
```

Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B . Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B . Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B .

Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B , meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A . Daerah asal fungsi adalah A , daerah hasilnya adalah B , dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B .

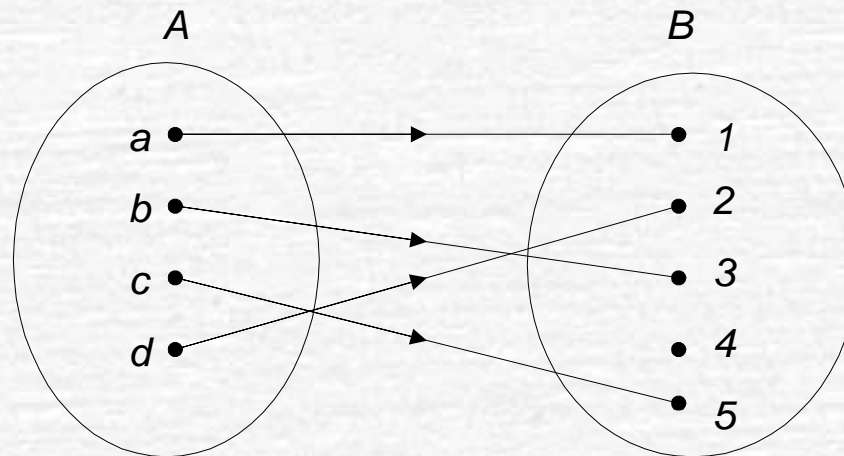
Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B , yaitu u dan v .

Contoh 30. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

- Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.



Contoh 31. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

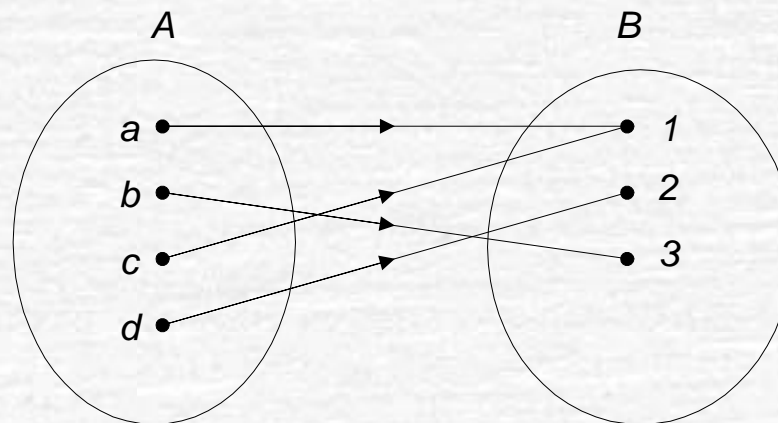
Contoh 32. Misalkan $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Penyelesaian:

- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,
 $a - 1 \neq b - 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A .
- Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f . Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B .



Contoh 33. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f .

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f .

Contoh 34. Misalkan $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f .
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y , selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

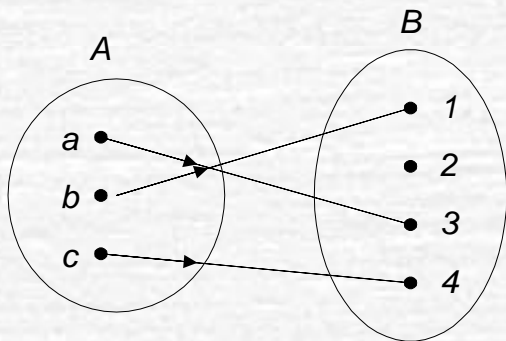
Contoh 35. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

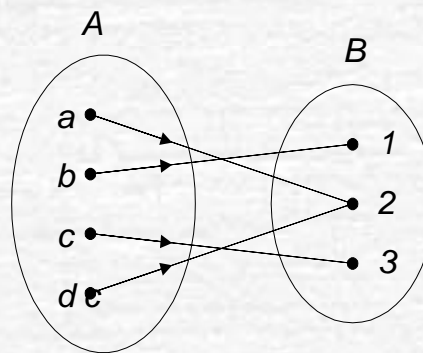
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 36. Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

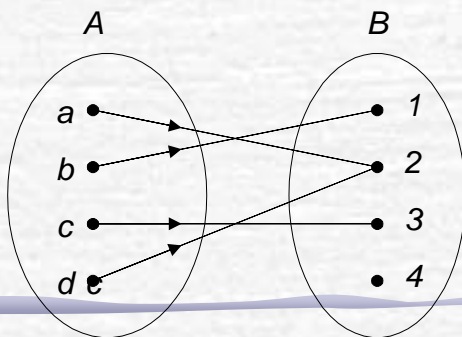
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



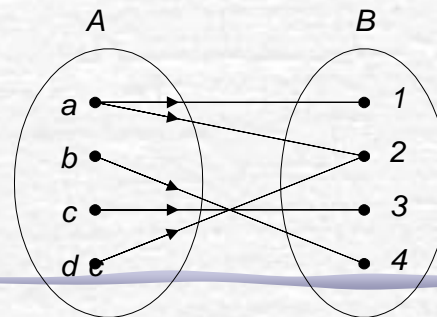
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Bukan fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B , maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f .
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1} . Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B , maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.
- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikkannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikkannya tidak ada.

Contoh 37. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh 38. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

Contoh 39. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 3.41 dan 3.44 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x - 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B , dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C . Komposisi f dan g , dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 40. Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

Contoh 41. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$.
Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

$$(i) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2.$$

$$(ii) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.

Fungsi *floor* dari x :

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Fungsi *ceiling* dari x :

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas.

Contoh 42. Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$$

$$\lceil 3.5 \rceil = 4$$

$$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$$

$$\lceil 0.5 \rceil = 1$$

$$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$$

$$\lceil 4.8 \rceil = 5$$

$$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$$

$$\lceil -0.5 \rceil = 0$$

$$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$$

$$\lceil -3.5 \rceil = -3$$

Contoh 42. Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian *byte*, satu *byte* terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah *byte* yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah $\lceil 125/8 \rceil = 16$ *byte*. Perhatikanlah bahwa $16 \times 8 = 128$ bit, sehingga untuk *byte* yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu *byte* tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut *padding bits*).

2. Fungsi modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.

$a \bmod m$ memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m

$a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Contoh 43. Beberapa contoh fungsi modulo

$$25 \bmod 7 = 4$$

$$15 \bmod 4 = 3$$

$$3612 \bmod 45 = 12$$

$$0 \bmod 5 = 0$$

$$-25 \bmod 7 = 3 \quad (\text{sebab } -25 = 7 \cdot (-4) + 3)$$

3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_n & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

5. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a \log x \quad \leftrightarrow \quad x = a^y$$

Fungsi Rekursif

- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n - 1) \times n = (n - 1)! \times n.$

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n - 1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*

Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif.

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

- Contoh definisi rekursif dari faktorial:

(a) basis:

$$n! = 1 \quad , \text{ jika } n = 0$$

(b) rekurens:

$$n! = n \times (n - 1)! \quad , \text{ jika } n > 0$$

5! dihitung dengan langkah berikut:

$$(1) 5! = 5 \times 4! \quad (\text{rekurens})$$

$$(2) \quad 4! = 4 \times 3!$$

$$(3) \quad 3! = 3 \times 2!$$

$$(4) \quad 2! = 2 \times 1!$$

$$(5) \quad 1! = 1 \times 0!$$

$$(6) \quad 0! = 1$$

$$(6') 0! = 1$$

$$(5') 1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$$

$$(4') 2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$$

$$(3') 3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$$

$$(2') 4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$$

$$(1') 5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$$

Jadi, $5! = 120$.

Contoh 44. Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

$$1. F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n, x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x & , n = 1 \\ 2xT(n-1, x) - T(n-2, x) & , n > 1 \end{cases}$$

3. Fungsi fibonacci:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & , n > 1 \end{cases}$$

Relasi Kesetaraan

DEFINISI. Relasi R pada himpunan A disebut **relasi kesetaraan** (*equivalence relation*) jika ia refleksif, setangkup dan menghantar.

- Secara intuitif, di dalam relasi kesetaraan, dua benda berhubungan jika keduanya memiliki beberapa sifat yang sama atau memenuhi beberapa persyaratan yang sama.
- Dua elemen yang dihubungkan dengan relasi kesetaraan dinamakan **setara** (*equivalent*).

Contoh:

A = himpunan mahasiswa, R relasi pada A :
 $(a, b) \in R$ jika a satu angkatan dengan b .

R refleksif: setiap mahasiswa seangkatan dengan dirinya sendiri

R setangkup: jika a seangkatan dengan b , maka b pasti seangkatan dengan a .

R menghantar: jika a seangkatan dengan b dan b seangkatan dengan c , maka pastilah a seangkatan dengan c .

Dengan demikian, R adalah relasi kesetaraan.

Relasi Pengurutan Parsial

DEFINISI. Relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi pengurutan parsial** (*partial ordering relation*) jika ia refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar.

Himpunan S bersama-sama dengan relasi R disebut **himpunan terurut secara parsial** (*partially ordered set*, atau *poset*), dan dilambangkan dengan (S, R) .

Contoh: Relasi \geq pada himpunan bilangan bulat adalah relasi pengurutan parsial.

Alasan:

Relasi \geq refleksif, karena $a \geq a$ untuk setiap bilangan bulat a ;

Relasi \geq tolak-setangkup, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq a$, maka $a = b$;

Relasi \geq menghantar, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq c$ maka $a \geq c$.

Contoh: Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat adalah relasi pengurutan parsial.

Alasan: relasi “habis membagi” bersifat refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar.

- Secara intuitif, di dalam relasi pengurutan parsial, dua buah benda saling berhubungan jika salah satunya -
 - lebih kecil (lebih besar) daripada,
 - atau lebih rendah (lebih tinggi) daripada lainnya menurut sifat atau kriteria tertentu.

- Istilah pengurutan menyatakan bahwa benda-benda di dalam himpunan tersebut dirutkan berdasarkan sifat atau kriteria tersebut.
- Ada juga kemungkinan dua buah benda di dalam himpunan tidak berhubungan dalam suatu relasi pengurutan parsial. Dalam hal demikian, kita tidak dapat membandingkan keduanya sehingga tidak dapat diidentifikasi mana yang lebih besar atau lebih kecil.
- Itulah alasan digunakan istilah pengurutan parsial atau pengurutan tak-lengkap

Klosur Relasi (*closure of relation*)

- Contoh 1: Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ tidak refleksif.
- Bagaimana membuat relasi refleksif yang sesedikit mungkin dan mengandung R ?

➤ Tambahkan $(2, 2)$ dan $(3, 3)$ ke dalam R (karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam R)

➤ Relasi baru, S , mengandung R , yaitu

$$S = \{(1, 1), (1, 3), \mathbf{(2, 2)}, (2, 3), (3, 2), \mathbf{(3, 3)}\}$$

➤ Relasi S disebut **klosur refleksif** (*reflexive closure*) dari R .

- Contoh 2: Relasi $R = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ tidak setangkup.
- Bagaimana membuat relasi setangkup yang sesedikit mungkin dan mengandung R ?

- Tambahkan $(3, 1)$ dan $(2, 3)$ ke dalam R (karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam S agar S menjadi setangkup).

- Relasi baru, S , mengandung R :

$$S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

- Relasi S disebut **klosur setangkup** (*symmetric closure*) dari R .

• Misalkan R adalah relasi pada himpunan A . R dapat memiliki atau tidak memiliki sifat P , seperti refleksif, setangkup, atau menghantar. Jika terdapat relasi S dengan sifat P yang mengandung R sedemikian sehingga S adalah himpunan bagian dari setiap relasi dengan sifat P yang mengandung R , maka S disebut **klosur** (*closure*) atau tutupan dari R [ROS03].

Klosur Refleksif

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A .
- Klosur refleksif dari R adalah $R \cup \Delta$, yang dalam hal ini $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Contoh: $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$
adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3\}$

maka $\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

sehingga klosur refleksif dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup \Delta &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\} \cup \\ &\quad \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), \\ &\quad (3, 3)\} \end{aligned}$$

• **Contoh:** Misalkan R adalah relasi

$$\{(a, b) \mid a \neq b\}$$

pada himpunan bilangan bulat.

Klosur refleksif dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup \Delta &= \{(a, b) \mid a \neq b\} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \end{aligned}$$

Klosur setangkup

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A .
- Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$, dengan $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

Contoh: $R = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3\}$,

maka

$$R^{-1} = \{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

sehingga klosur setangkup dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\} \cup \\ &\quad \{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), \\ &\quad (2, 3), (3, 3)\} \end{aligned}$$

- Contoh: Misalkan R adalah relasi $\{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b\}$ pada himpunan bilangan bulat.

Klosur setangkup dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b\} \cup \\ &\quad \{(b, a) \mid b \text{ habis membagi } a\} \\ &= \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b \text{ atau } b \\ &\quad \text{habis membagi } a\} \end{aligned}$$

Klosur menghantar

- Pembentukan klosur menghantar lebih sulit daripada dua buah klosur sebelumnya.
- Contoh: $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
 R tidak transitif karena tidak mengandung semua pasangan (a, c) sedemikian sehingga (a, b) dan (b, c) di dalam R .

Pasangan (a, c) yang tidak terdapat di dalam R adalah $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, dan $(3, 1)$.

- Penambahan semua pasangan ini ke dalam R sehingga menjadi

$$S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

tidak menghasilkan relasi yang bersifat menghantar karena, misalnya terdapat $(3, 1) \in S$ dan $(1, 4) \in S$, tetapi $(3, 4) \notin S$.

• Kosur menghantar dari R adalah

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

• Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan R pada sebuah himpunan dengan n elemen, maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \dots \vee M_R^{[n]}$$

Misalkan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan klosur menghantar dari R .

Penyelesaian:

Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks klosur menghantar dari R adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Karena

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

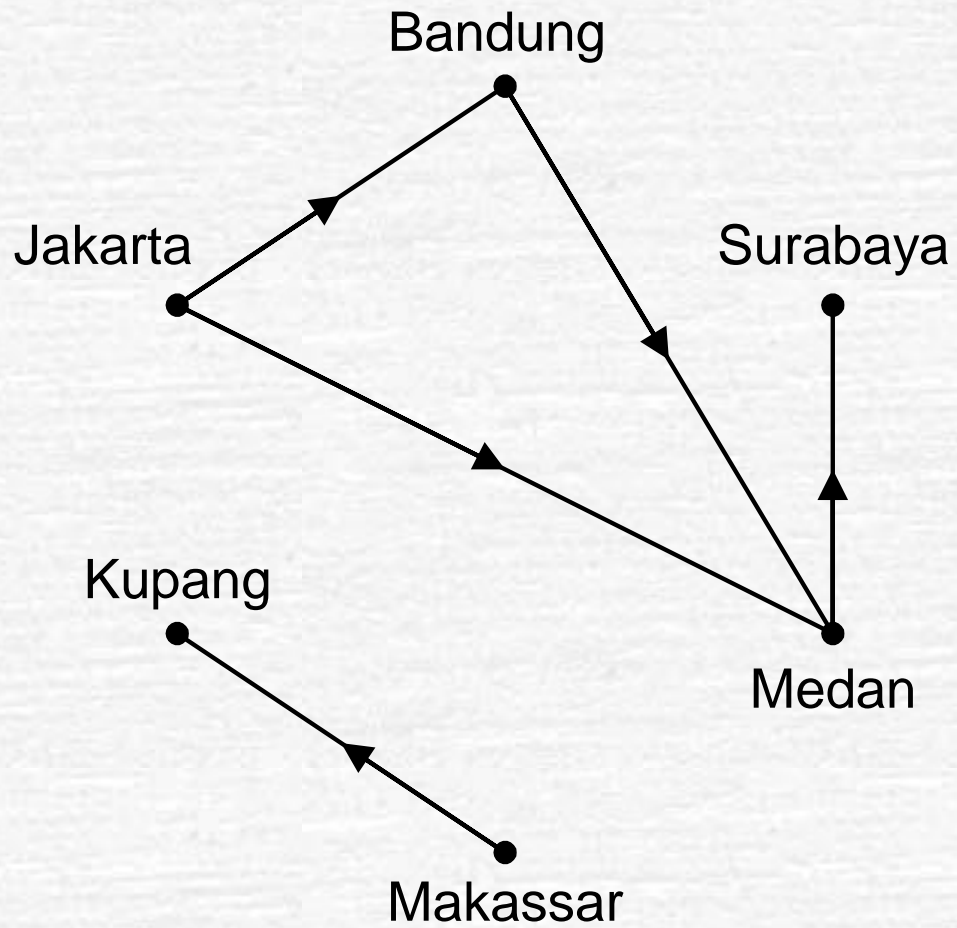
$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Aplikasi klosur menghantar

- Klosur menghantar menggambarkan bagaimana pesan dapat dikirim dari satu kota ke kota lain baik melalui hubungan komunikasi langsung atau melalui kota antara sebanyak mungkin [LIU85].

- Misalkan jaringan komputer mempunyai pusat data di Jakarta, Bandung, Surabaya, Medan, Makassar, dan Kupang.
- Misalkan R adalah relasi yang mengandung (a, b) jika terdapat saluran telepon dari kota a ke kota b .



- Karena tidak semua *link* langsung dari satu kota ke kota lain, maka pengiriman data dari Jakarta ke Surabaya tidak dapat dilakukan secara langsung.
- Relasi R tidak menghantar karena ia tidak mengandung semua pasangan pusat data yang dapat dihubungkan (baik *link* langsung atau tidak langsung).
- Klosur menghantar adalah relasi yang paling minimal yang berisi semua pasangan pusat data yang mempunyai link langsung atau tidak langsung dan mengandung R .