Mencari Biaya Minimum Peperangan pada Pertempuran Stalingrad dalam Perang Dunia II

Muhammad Ayyub Abdurrahman 13518076[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13518076@std.stei.itb.ac.id

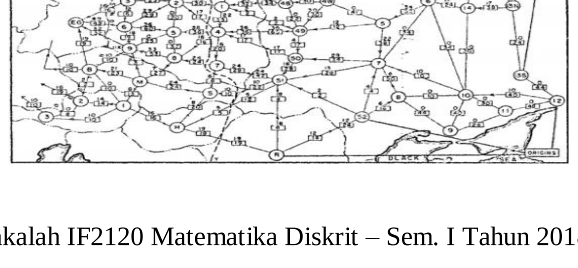
***Abstract*—Dalam peperangan, semua hal bisa terjadi. Segala cara dalam peperangan diperbolehkan, termasuk menghalangi logistik lawan. Sebagai contoh, pada pertempuran Stalingrad, Uni Soviet berusaha menghalangi produksi tank milik Jerman dengan menghancurkan jalur transportasi besi dari tambang menuju pabrik. Sayangnya, sumber daya yang ada terbatas. Untuk mengakalinya, diperlukan suatu metode untuk mencari tahu biaya minimum untuk menghancurkan jalur distribusi tersebut. Teorema Maximum Flow-Minimum Cut merupakan teori untuk mencari nilai cut-set dengan total bobot terkecil. Dengan memanfaatkan teorema ini, dapat dihitung biaya minimum untuk menghancurkan jalur distribusi tersebut**

***Keywords*—Algoritma Ford-Fulkerson, Teori Maximum Flow-Minimum Cut, Graf, Perang Dunia 2.**

I. PENDAHULUAN

Leonhard Euler, seorang matematikawan pertama kali (1736) menulis artikel ilmiah di bidang teori graf. Artikel dengan judul "*Seven Bridges of Königsberg"* yang ditulisnya membahas permasalahan ada atau tidaknya struktur yang saat ini dikenal sebagai sirkuit Euler pada graf keterhubungan daratan kota *Königsberg* (sekarang Kaliningrad, Russia) dan pulau kecil di tengah sungai Pregel yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan. Sejak saat itu, teori tentang graf mulai bermunculan dan mulai diaplikasikan pada kehidupan, terutama dalam menganalisis permasalahan yang melibatkan konteks geografis.

Permasalahan mengenai graf tersebut diaplikasikan pula dalam perang dunia. Pada perang dunia 2, Uni Soviet terlibat pertempuran dengan Pasukan Nazi Jerman. Pada saat itu,Uni Soviet ingin menghancurkan jalan kereta api milik Jerman yang terus mendukung logistik besi ke pabrik tank agar pabrik tersebut berhenti memproduksi tank yang lebih banyak. Saat itu, Uni Soviet kekurangan sumber daya. Mereka ingin mengetahui biaya penghancuran minimum untuk memisahkan antara pabrik tank dan tambang besi



Gambar 1. Skema Jalan Kereta Soviet

(Sumber: Schrijver, Alexander. On the history of the transportation and maximum flow problems dalam Math Programming, 2002)

Untuk menjawab persoalan tersebut, matematikawan Uni Soviet menemukan sebuah teori yang bernama maximum flow-minimum cut theorem. Pada makalah ini, akan dijelaskan aplikasi sederhana dari maximum flow-minimum cut theorem.

II. LANDASAN TEORI

A. Graf

Graf adalah salah satu cara untuk merepresentasikan objek-objek diskrit, terutama hubungan antara objek-objek tersebut. Graf biasanya ditampilkan dengan menggambarkan suatu bulatan atau titik sebagai objek, dan garis yang menghubungkan antara titik-titik objek sebagai hubungan antar objek. Graf biasanya dinotasikan sebagai G = (V, E) di mana G adalah graf, V adalah vertices (simpul atau titik), dan E adalah edges (sisi atau garis).

Graf ada berbagai jenis, yaitu :

1. Graf sederhana

   Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.

2. Graf tak-sederhana

   Graf tak-sederhana adalah graf yang memiliki gelang atau sisi ganda. Apabila graf memiliki gelang, maka graf tersebut disebut graf semu (pseudograph). Apabila graf tersebut memiliki sisi ganda, maka graf tersebut disebut graf ganda (multigraph).

3. Graf tak-berarah

   Graf tak-berarah adalah graf yang semua sisinya tidak memiliki orientasi arah. Biasanya, sisi dari graf ini digambarkan sebagai garis biasa tanpa diberi panah.

4. Graf berarah

   Graf berarah adalah graf ang setiap sisinya memiliki orientasi arah. Biasanya, sisi dari graf ini digambarkan dengan garis yang diberi tanda panah untuk menunjukkan orientasi arah dari sisi tersebut.

Dalam makalah ini, graf yang akan digunakan adalah graf sederhana dan graf tak-berarah.

Graf sederhana sendiri memiliki beberapa tipe khusus yang sering diaplikasikan ke dalam berbagai masalah di kehidupan. Berikut beberapa contoh dari graf sederhana khusus :

1. Graf Lengkap
   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul yang lain, biasa dinotasikan sebagai Kn dengan n = jumlah simpul.
2. Graf Lingkaran
   Graf lingkaran adalah graf sederhala yang setaip simpulnya berderajat 2, biasa dilambangkan sebagai Cn.
3. Graf Teratur
   Graf teratur adalah graf yang semua simpulnya memiliki derajat yang sama.
4. Graf Bipartit
   Graf bipartit adalah graf yang simpul-simpulnya dapat dikelompokan ke dalam dua kelompok himpunan (misal V1 dan V2), sehingga setiap sisi yang ada pada graf tersebut terhubung dari V1 ke V2 (bentuknya mirip dengan fungsi).

Selain itu, terdapat beberapa terminology (istilah) dasar yang terdapat pada teori graf :

1. Bertetangga
   Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika keduanya dihubungkan dengan satu sisi yang sama.
2. Bersisian
   Menunjukan relasi antara suatu sisi dan simpul yang saling terhubung.
3. Simpul Terpencil
   Simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya, dan tidak bertetangga dengan simpul manapun.
4. Graf Kosong
   Graf yang tidak memiliki sisi (himpunan sisinya merupakan himpunan kosong).
5. Derajat
   Menunjukan jumlah sisi yang bersisian pada suatu simpul.
6. Lintasan
   Barisan selang-seling simpul dan sisi yang membentuk suatu himpunan yang berawal dari simpul asal (v0) ke simpul akhir (vn)
7. Siklus atau Sirkuit
   Lintasan ang berawal dan berakhir di simpul yang sama.
8. Terhubung
   Dua simpul pada suatu graf dikatakan terhubung apabila terdapat lintasan yang menghubungkan dua simpul tersebut. Graf yang setiap simpulnya terhubung disebut graf terhubung. Untuk membahas masalah pada makalah ini, digunakan graf terhubung.
9. Upagraf dan Komplemen
   Upagraf Apabila terdapat dua graf G dan G1 dengan G = (V, E) dan G1 = (V1, E1), jika V1 merupakan bagian dari V dan E1 merupakan bagian dari E, maka G1 merupakan upagraf dari G.
10. Upagraf Merentang
    Jika G1 merupakan upagraf dari G, dan V1 = V (G1 mengandung semua simpul dari G), maka G1 merupakan upagraf merentang.
11. Cut-Set
    Cut set adalah himpunan sisi yang dapat membuat graf menjadi tidak terhubung.
12. Graf Berbobot
    Graf yang setiap sisinya memiliki bobot atau nilai.

B. Pewarnaan Graf

Ada tiga tipe pewarnaan graf, yaitu pewarnaan sisi, pewarnaan simpul, dan pewarnaan wilayah. Namun, inti dari pewarnaan graf semuanya sama, yaitu mewarnai setiap simpul/sisi/wilayah sehingga dua simpul/sisi/wilayah yang berdekatan (menempel) memiliki warna yang berbeda. Pada makalah ini, tipe pewarnaan yang akan digunakan adalah pewarnaan simpul. Terdapat istilah dalam pewarnaan graf, salah satunya adalah bilangan kromatik. Bilangan kromatik adalah jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk pewarnaan. Pada mulanya, bilangan kromatik graf planar telah diketahui sebesar 6. Kemudian, diperbaiki dikembangkan menjadi 5, dan kembali dikembangkan menjadi 4. Sekarang, telah diketahui bahwa bilangan kromatik graf planar sebesar 3. Untuk melakukan pewarnaan graf, dapat digunakan Algoritma Welch-Powell :

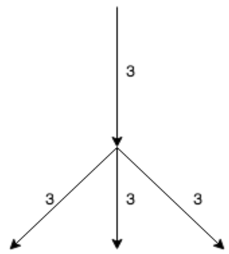
1. Urutkan simpul dari derajat yang paling besar ke derajat paling kecil.
2. Beri simpul yang memiliki derajat tertinggi sebuah warna, lalu warnai simpul-simpul lain yang tidak bertetangga dengan simpul ini dengan warna yang sama.
3. Ulangi langkah ke-2 kepada simpu yang memiliki derajat tertinggi setelah simpul pertama.

Pewarnaan graf biasanya diaplikasikan pada pewarnaan peta dalam mewarnain setiap wilayah pada peta dengan warna yang berbeda-beda.

C. Teori Maximum Flow-Minimum Cut

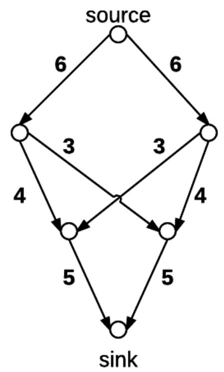
Teorema Maximum- flow Minimum-cut adalah teorema yang menyatakan bahwa arus maksimum yang melewati suatu jaringan graf dari suatu sumber tetap adalah sama dengan jumlah sisi dengan bobot minimum dari jaringan graf yang jika dihilangkan, akan menjadikan suatu graf menjadi graf tak terhubung. Arus disini dapat berupa apapun. Sebagai contoh, arus dapat berupa perjalanan kereta yang membawa besi atau data yang melewati computer dalam internet.

Semua jaringan graf, apapun yang mereka bawa, beroperasi dengan cara yang hampir mirip. Setiap jaringan graf ingin membawa suatu tipe objek dari sumber menuju targetnya. Jumlah objek yang dapat dibawa oleh suatu jaringan dibatasi oleh sisi dengan bobot terkecil pada jaringan tersebut, bahkan jika sisi yang lain memiliki kapasitas yang lebih besar, kapasitas yang bisa dibawa oleh suatu jaringan tidak dapat ditambah.



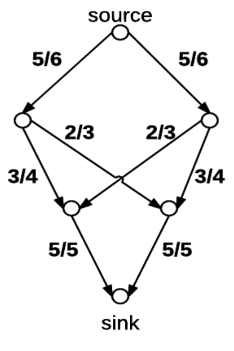
Gambar 2. Contoh Jaringan Graf
(Sumber:https://brilliant.org/wiki/max-flow-min-cut-algorithm/ diakses pada 4 Desember 2019 pukul 1.37)

Sebagai contoh, lihat gambar 2 diatas. Gambar 2 diatas adalah contoh jaringan graf dengan 4 sisi. Sumber objek berasal dari atas jaringan graf. Setiap sisi memiliki bobot 3. Dari jaringan graf ini, hanya dapat diperoleh 3 objek yang dapat diangkut. Objek memang mungkin dapat melalui ketiga sisi yang dibawah, namun objek dibatasi oleh sisi terdekat dengan sumber dengan bobot 3.



Gambar 3. Contoh Lain Jaringan Graf
(Sumber:https://brilliant.org/wiki/max-flow-min-cut-algorithm/ diakses pada 4 Desember 2019 pukul 1.39)

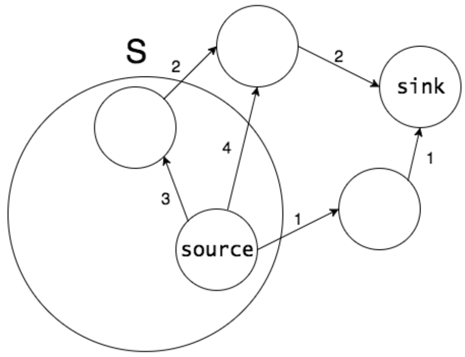
Contoh lain dari teori minimum cut-maximum flow adalah gambar 3. Pada Gambar 3 jaringan graf memiliki dengan 8 sisi dengan bobot yang berbeda beda. Sumber objek berasal dari atas jaringan graf, mengalir menuju bagian bawah graf. Pada jaringan ini, dapat terlihat jelas apabila 2 sisi dengan bobot 5 dihilangkan dari graf, maka jaringan graf diatas menjadi graf tak terhubung. Maka, dapat disimpulkan bahwa maksimim objek yang dapat dibawa adalah 10. Ilustrasi lebih jelas dapat dilihat pada gambar 4.



Gambar 4. Ilustrasi Jaringan Graf
(Sumber:https://brilliant.org/wiki/max-flow-min-cut-algorithm/ diakses pada 4 Desember 2019 pukul 1.43)

Secara umum, ada beberapa kunci dari teori ini agar teori ini bekerja dengan semestinya. Pertama, jaringan graf haruslah jaringan graf berarah yang memiliki bobot pada sisi-sisinya. Jaringan graf ini haruslah hanya bekerja dalam satu arah, dan tiap-tiap sisinya memiliki bobot maksimum sesuai dengan bobotnya. Arah pada jaringan graf haruslah berasal dari satu simpul dan arah pada tiap sisi yang bersisian dengan suatu simpul mengarah pada simpul final yang bernama ‘sink’.

Jaringan ini tentu akan memiliki cut-set, yang memisahkan jaringan graf menjadi 2 himpunan simpul. Dalam konteks ini, terdapat 2 himpunan simpul, dimana himpunan simpul pertama (S) memuat simpul sumber dan himpunan simpul kedua (T) memuat simpul sink. Simpul sumber dan simpul sink tidak dapat berada di himpunan simpul yang sama. Cut-set tentu memiliki bobotnya sendiri.



Gambar 5. Cut-Set dengan bobot 7
(Sumber:https://brilliant.org/wiki/max-flow-min-cut-algorithm/ diakses pada 4 Desember 2019 pukul 1.47)

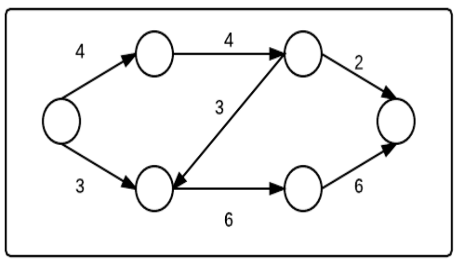
Dalam gambar 5, terdapat 2 himpunan simpul, dengan himpunan simpul S berada didalam lingkaran, sedangkan himpunan simpul T berada di luar lingkaran. Cut-set dari jaringan terebut adalah himpunan sisi-sisi yang berpotogan dengan lingkaran, dengan bobot total 7. Tujuan dari teori ini sendiri adalah mencari himpunan cut-set dengan bobot terkecil.

D. Algoritma Ford-Fulkerson

Algoritma Ford-Fulkerson adalah suatu algoritma untuk mencari nilai bobot cut-set terkecil dalam teorema maksimum flow-minimum cut. Algoritma ini ditemukan pada taun 1956 oleh Ford dan Fulkerson. Algoritma ini terkadang dianggap sebagai suatu metode karena sebagian dari protokolnya tidak terlalu spesifik dan bisa bervariasi pada tiap kasusnya.

Algoritma Ford-Fulkerson menerima masukan graf G, bersamaan dengan simpul sumber dan simpul target (sink). Graf tentu sesuai dengan definisi yang telah ditentukan pada teorema maksimum flow-minimum cut, dimana jaringan graf haruslah jaringan graf berarah yang memiliki bobot pada sisi-sisinya. Jaringan graf ini haruslah hanya bekerja dalam satu arah, dan tiap-tiap sisinya memiliki bobot maksimum sesuai dengan bobotnya. Arah pada jaringan graf haruslah berasal dari satu simpul dan arah pada tiap sisi yang bersisian dengan suatu simpul mengarah pada simpul final yang bernama ‘sink’.

Algoritma ini cukup sederhana. Perhatikan gambar 6 berikut.



Gambar 6. Ilustrasi Algoritma Ford-Fulkerson
(Sumber: https://brilliant.org/wiki/ford-fulkerson-algorithm/ diakses pada 4 Desember 2019 pukul 2.21)

Dalam gambar 6, terdapat 6 buah simpul, dimana simpul paling kiri menjadi simpul sumber dan simpul paling kanan menjadi sink. Terdapat 2 sisi yang bersisian dengan simpul sumber, dengan bobot masing masing 4 dan 3. Terdapat juga 2 sisi yang bersisian dengan simpul sink, denan bobot masing-masing 2 dan 6.

Menurut Ford dan Fulkerson, selagi terdapat lintasan yang menghubungkan sumber dan sink, kurangi setiap sisi pada lintasan tersebut dengan bobot terkecil pada lintasan tersebut. Apabila ada suatu sisi yang bobot dari suatu sisi bernilai 0, hilangkan sisi dari graf. Ulangi langkah tersebut hingga simpul sumber dan simpul sink tidak lagi terhubung. Jumlah bobot terkecil tadilah yag menjadi kapasitas maksimum suatu jaringan graf.

Sebagai contoh, perhatikan gambar 6. Perhatikan lintasan terbawah dari jaringan graf pada gambar 6. Pada lintasan tersebut, terdapat 3 sisi, dengan bobot masing masing 3, 6 dan 6. Kurangi semua sisi dengan 3, sehingga sisi dengan bobot 3 harus dihilangkan. Sisi yang masih bertahan sekarang masing-masing bernilai 3.

Selanjutnya, perhatikan lintasan teratas dari jaringan tersebut. Pada lintasan tersebut, terdapat 3 sisi, dengan bobot masing masing 4, 4 dan 2. Kurangi semua sisi dengan 2, sehingga sisi dengan bobot 2 harus dihilangkan. Sisi yang masih bertahan sekarang masing-masing bernilai 2. Lintasan yang tersisa sekarang hanya terdiri dari 5 sisi, dengan bobot masing-masing 2,2,3,3 dan 3. Pada lintasan ini, tentu bobot terkecil adalah 2, sehingga sisi dengan bobot 2 harus dihilangkan. Setelah langkah ini, tidak ada lagi lintasan yang menghubungkan simpul sumber dan simpul sink. Total jumlah bobot terkecil yang kita punya adalah 3 (pada lintasan terbawah) ditambah 2 (pada lintasan teratas) ditambah 2 lagi (pada lintasan terakhir), sehingga kapasitas maksimum pada jaringan graf ini adalah 7.

III. EKSPERIMEN

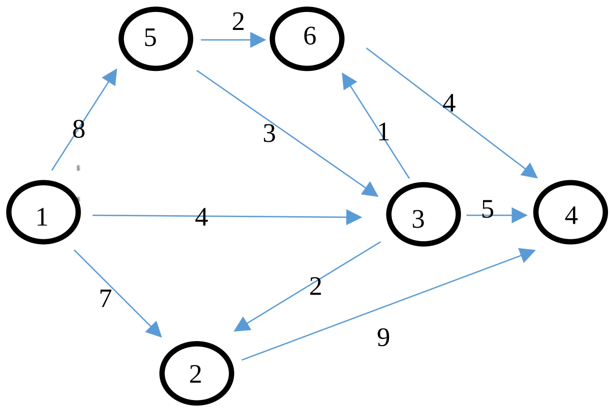
A. Asumsi yang Digunakan

Ada beberapa asumsi yang harus dilakukan agar Algoritma Ford-Fukerson dapat menerapkan Teorema Maksimum Flow-Minimum Cut secara baik. Pada eksperimen ini, jalan kereta diasumsikan sebagai sisi pada jaringan, sedangkan setiap pos pemberhentian dan persimpangan jalan dianggap sebagai simpul. Keseluruhan jalan tadi diilustrasikan sebagai suatu jaringan graf yang terdiri dari jalan dan persimpangan. Tingkat kesulitan penghancuran jalan dan biaya penghancuran jalan disini diilustrasikan sebagai bobot pada sisi Ada beberapa asumsi yang digunakan pada eksperimen ini. Pertama, dilakukan asumsi untuk jalan itu sendiri. Pada eksperimen ini, jalan diasumsikan lurus dan hanya bergerak satu arah, yakni dari pertambangan menuju pabrik tank.

Kedua, diasumsikan bahwa semua jalur distribusi telah tergambar didalam jaringan graf. Tidak ada jalur baru yang dapat dibentuk. Distibusi harus melalui jalur yang ada dan hanya berasal dari sumber saja.

B. Penerapan Teori pada Pertempuran Stalingrad

Misalkan ada contoh jalan seperti gambar 7 dibawah ini.

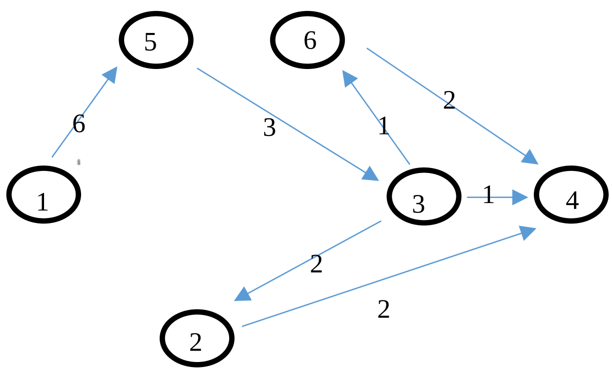


Gambar 7. Contoh Jalan Kereta Jerman
(Sumber: dokumen penulis)

Pada gambar 7, terdapat jaringan graf dengan 6 simpul dan 10 sisi. Pertama, perhatikan lintasan tengah yang melalui sisi dengan bobot 4 dan 5. Kurangi setiap bobot pada lintasan tersebut dengan 4, sehingga nilai bobot sisi menjadi 0 dan 1. Disini, kita mendapat jumlah maksimm flow sementara, yakni 4. Lalu kita lakukan langkah yang sama pada lintasan terbawah. Pada lintasan ini, bobot pada sisi-sisinya bernilai 7 dan 9. Maka, kurangi setiap sisinya dengan nilai 7, sehingga diperoleh nilai bobot pada sisi tersebut adalah 0 dan 2. Pada langkah ini, sisi dengan bobot 7 dihilangkan dari jaringan graf karena jumlahnya kurang dari 1. Hasil sementara kita menunjukkan bahwa jumlah maksimum flow adalah 11, yakni 4 pada langkah pertama dan 7 pada langkah kedua.

Mari kita lanjutkan langkah selanjutnya. Perhatikan lintasan teratas, yakni lintasan dengan bobot sisi-sisinya 8, 2, dan 4. Pada lintasan ini, bobot terkecil sisinya adalah 2. Kurangi setiap bobot dengan nilai 2, sehingga diperoleh nilai sisi-sisi lintasan yang baru adalah 6, 0 dan 2. Hilangkan lintasan dengan bobot 0 agar memudahkan mencari lintasan selanjutnya. Unutk sementara, nilai minimum flownya adalah 13.

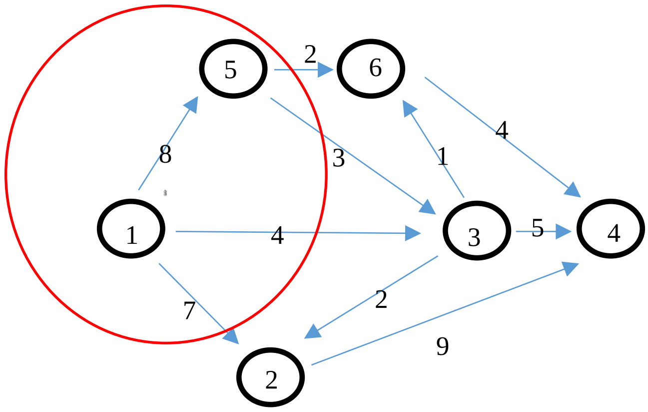
Lintasan yang tersisa dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 8. Hasil Operasi Pada Gambar 7
(Sumber: dokumen penulis)

Pada gambar 8, terlihat masih ada beberapa lintasan yang dapat dilalui oleh pihak musuh. Perhatikan lintasan dengan bobot sisi-sisinya 6, 3, dan 1. Kurangi sisi-sisi tersebut dengan 1, karena bobot terkecil pada lintasan tersebut 1. Diperoleh lintasan dengan bobot sisi yang baru, yakni 5, 2, dan 0. Hilangkan lagi sisi dengan bobot 0 untuk memudahkan mencari lintasan selanjutnya. Setelah langkah ini, kita memiliki jumlah maksimum flow baru, yakni 14.

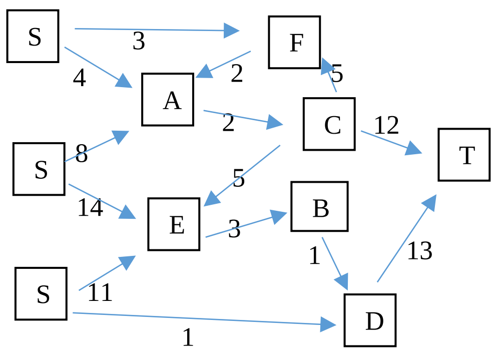
Ulangi kembali langkah tersebut ke lintasan yang berbeda. Penulis memilih lintasan dengan bobot sisi 5, 2, 2, dan 2. Kurangi bobot setiap sisi dengan 2, sehingga diperoleh bobot baru pada sisi tersebut, yakni 3, 0, 0, dan 0. Sekarang, kita memiliki jumlah maksimum flow baru, yakni 16. Apabila dicocokkan, kita akan mendapat cut-set seperti pada gambar 9.



Gambar 9. Hasil Final Pada Gambar 7
(Sumber: dokumen penulis)

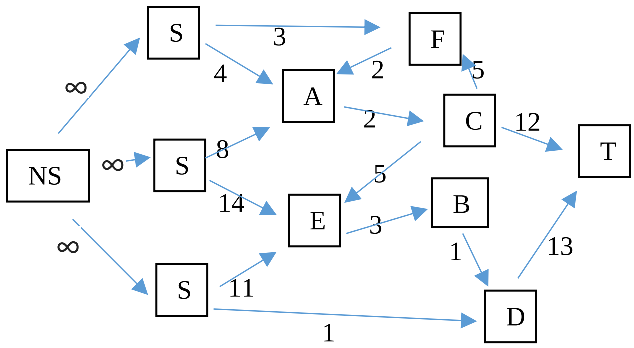
C. Contoh Penerapan pada Banyak Sumber

Bagaimana apabila sumber yang mensuplai pabrik tersebut lebih dari satu? Ternyata, teorema maximum-flow minimum cut masih mampu 'menangkal' masalah seperti ini. Perhatikan gambar 10 sebagai berikut



Gambar 10. Jalur Distribusi Dengan Jumlah Sumber Lebih Dari 1
(Sumber: dokumen penulis)

Pada gambar 10, arah arus berasal dari 3 buah simpul yang diberi label 'S' dan mengarah ke satu simpul sink yang diberi label 'T'. Terdapat 10 simpul dan 14 sisi yang ada di jaringan tersebut. Untuk mencari nilainya minimum cut-nya, kita dapat sedikit memodifikasi gambar menjadi seperti berikut.



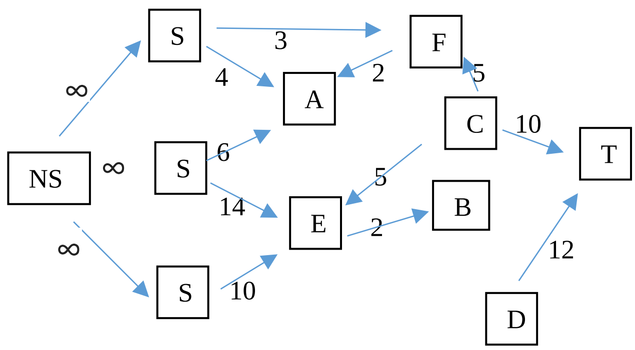
Gambar 11. Modifikasi Gambar 10
(Sumber: dokumen penulis)

Dengan modifikasi pada gambar 11, kita dapat menerapkan teori maksimum flow-minimum cut tanpa membuat nilai minimum cut-nya berubah, karena sisi-sisi tersebut bernilai infinite sehingga tidak mengubah nilai lintasannya.

Mari kita hitung nilai minimum cut pada jaringan graf pada gambar 11. Pertama, perhatikan lintasan terbawah dengan bobot sisi sisinya tak hingga, 1 dan 13. Pada lintasan ini, nilai sisi terkecil adalah 1, sehingga kita harus mengurangi nilai bobot sisi sisi dengan 1 dan mengeluarkan 1 dari gambar. Pada langkah ini, kita memberoleh perubahan nilai pada lintasan tersebut menjadi takhingga, 0 dan 12. Nilai sementara minimum cut adalah 1.

Lalu, perhatikan lintasan dengan bobot sisi tak hingga, 11, 3, 1 dan 12. Pada lintasan ini, nilai sisi terkecil adalah 1, sehingga kita harus mengurangi nilai bobot sisi-sisi dengan 1 dan mengeluarkan 1 dari graf. Pada langkah ini, kita memberoleh perubahan nilai pada lintasan tersebut menjadi takhingga, 10, 2, 0 dan 11. Nilai sementara minimum cut adalah 2.

Lalu, lihat kembali gambar 11. Pilih lintasan dengan sisi takhingga, 8, 2 dan 12. Pada lintasan ini, nilai bobot sisi terkecil adalah 2. Kurangi nilai sisi sisi dengan 2, sehingga diperoleh lintasan dengan sisi takhingga, 6, 0 dan 10. Setelah langah ini, kita memperoleh nilai maksimum flow-minimum cut baru, yakni 4. Kemudian, setelah rangkaian operasi diatas, gambar 11 berubah menjadi sebagai berikut.



Gambar 12. Hasil Final Jaringan Graf
(Sumber: dokumen penulis)

Pada gambar 12, apabila diperhatikan secara teliti, maka simpul NS dan simpul T tidak terhubung. Oleh karena itu, kita dapat mencukupkan penghitungan kita dan memperoleh nilai maksimum flow-minimum cut yang baru, yakni 4. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kita cukup menghancurkan jalan dengan jumlah bobot total 4 untuk membuat jalur distribusi terputus.

IV. KESIMPULAN

Dari eksperimen ini, dapat disimpulkan bahwa arus maksimum yang melewati suatu jaringan graf dari suatu sumber tetap adalah sama dengan jumlah sisi dengan bobot minimum dari jaringan graf yang jika dihilangkan, akan menjadikan suatu graf menjadi graf tak terhubung.

Untuk mencari nilai tersebut, ada 4 langkah yang harus dilakukan, yakni

1. Cari lintasan dari sumber menju target yang memiliki bobot positif. Jika tidak ada, keluar.
2. Tentukan bobot terkecil dari lintasan tersebut, lalu kurangi bobot dari sisi pada lintasan tersebut dengan bobot terecil tadi.
3. Apabila ada bobot yang bernilai 0, hilangkan dari lintasan untuk memudahkan pencarian lintasan baru.
4. Ulangi langkah 1.

Nilai minimum yang diperlukan adalah jumlah dari bobot terkecil di setiap lintasan.

V. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak-pihak yang telah mendukung penulis sehingga makalah ini dapat selesai dengan baik. Terima kasih kepada Tuhan YME yang telah memberkati penulis sehingga dapat menyelesaikan makalah ini. Terima kasih kepada kedua orang tua penulis atas segala dukungan baik lahir maupun batin.

Terima kasih kepada Pak Rinaldi selaku dosen Matematika Diskrit yang mengajar di kelas penulis sehingga penulis dapat memahami materi-materi yang diberikan dan dapat menulis makalah ini. Terima kasih juga kepada para penulis dan pencipta dari semua referensi yang digunakan oleh penulis sebagai sumber data dari makalah ini.

Terimakasih juga kepada teman-teman teknik informatika angkatan 2018 terutama yang sekelas di kelas K1 atas dukungannya dalam membuat makalah ini. Tanpa dukungan dari pihak-pihak diatas, saya ragu saya mampu meyelesaikan makalah ini dengan baik.

REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi. Matematika Diskrit, revisi keenam, Bandung, 2016.
[2] Schrijver, Alexander. On the history of the transportation and maximum flow problems dalam Jurnal Math Programming, 2002.
[3] https://brilliant.org/wiki/max-flow-min-cut-algorithm/ diakses pada 4 Desember 2019 pukul 1.47
[4] http://www.cs.toronto.edu/~lalla/373s16/notes/MFMC.pdf Waktu Akses : 4 Desember 2019 pukul 1.20 WIB.
[5] https://brilliant.org/wiki/ford-fulkerson-algorithm// diakses pada 4 Desember 2019 pukul 2.21
[6] http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter9.pdf Waktu Akses : 4 Desember 2019 pukul 2.40 WIB.
[7] https://www.youtube.com/watch?v=oHy3ddI9X3o Waktu Akses : 4 Desember 2019 pukul 1.40 WIB.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan

Bandung, 4 Desember 2019

Muhammad Ayyub Abdurrahman
13518076