

Pemanfaatan Pohon Merentang Minimum dan Algoritma Prim untuk Menentukan Jarak Minimum yang Menghubungkan Tiap Kota Tim Liga Inggris Musim 2019/2020

Hengky Surya Angkasa - 13518048¹
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
¹13518048@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—Pohon merentang adalah upagraf merentang dari suatu graf terhubung. Pohon merentang minimum adalah pohon merentang yang tiap sisinya memiliki bobot. Pada makalah ini, pohon merentang minimum dari suatu graf terhubung-berbobot dicari dengan Algoritma Prim. Konsep Algoritma Prim adalah mencari sisi dengan bobot minimum yang terhubung dengan pohon T.

Kata kunci—Algoritma Prim, graf terhubung-berbobot, pohon, pohon merentang minimum.

menentukan jarak minimum yang menghubungkan tiap kota tim Liga Inggris musim 2019/2020. Liga Inggris merupakan salah satu liga sepakbola terpopuler di dunia. Liga Inggris diikuti oleh dua puluh tim. Tim-tim tersebut tersebar di beberapa kota di Inggris. Banyak pemain sepakbola hebat dan terkenal yang merumpuk bersama tim-tim peserta Liga Inggris. Akibatnya, Liga Inggris memiliki penonton setia yang ada di seluruh dunia. Liga Inggris sejak tahun 1992 lebih dikenal dengan format *Premier League* yang mengedepankan industri dan bisnis dalam sepakbola.

I. PENDAHULUAN

Salah satu teori yang dipelajari dalam Matematika Diskrit adalah pohon. Pohon merupakan graf yang tidak berarah dan tidak mengandung sirkuit. Salah satu bagian dari teori pohon adalah pohon merentang.

Pohon merentang merupakan upagraf merentang dari graf terhubung. Setiap graf terhubung minimal memiliki satu buah pohon merentang. Adapun, pohon merentang minimum merupakan pohon merentang yang memiliki jumlah bobot tiap sisi minimum dibandingkan pohon merentang lain. Aplikasi pohon merentang minimum dapat diterapkan di berbagai aspek kehidupan. Contohnya, menentukan jarak minimum jaringan listrik, menentukan biaya pembangunan jalan raya yang menghubungkan setiap kota di suatu daerah, dan lain sebagainya. Untuk menemukan pohon merentang minimum terdapat dua algoritma yang umum digunakan. Kedua algoritma tersebut adalah Algoritma Prim dan Algoritma Kruskal. Pada makalah ini, Algoritma Prim digunakan dalam menemukan pohon merentang minimum.

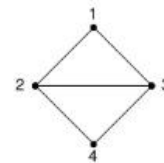
Algoritma Prim merupakan algoritma yang dikembangkan oleh Robert C. Prim. Hal utama dalam algoritma ini adalah memilih sisi yang memiliki bobot minimum dari suatu graf terhubung G . Lalu, memilih sisi yang memiliki bobot minimum dari graf G yang terhubung dengan pohon merentang T yang telah terbentuk pada langkah sebelumnya. Hal tersebut dilakukan hingga semua simpul terdapat di pohon merentang T .

Pada makalah ini akan dibahas pemanfaatan pohon merentang minimum dari suatu graf terhubung-berbobot untuk

II. LANDASAN TEORI

A. Graf

Graf G merupakan pasangan himpunan (V,E) . V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex* atau *node*). Sedangkan, E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul ^[1].

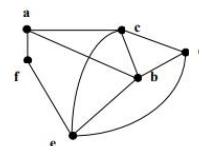


Gambar 2.1 Graf sederhana

(Sumber: [http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20\(2015\).pdf](http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf) - diakses 22 November 2019 pukul 20.30 WIB)

B. Graf Terhubung

Suatu graf tak-berarah G ($G = (V,E)$) merupakan graf terhubung jika setiap pasang simpul u dan v pada himpunan V terdapat lintasan dari u ke v . Jika tidak, graf G disebut graf tak terhubung ^[2].

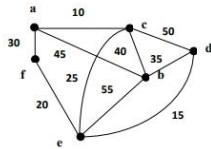


Gambar 2.2 Graf terhubung

(Sumber: <https://lib.unnes.ac.id/23034/1/4111410035.pdf> - diakses 22 November 2019 pukul 20.36 WIB)

C. Graf Berbobot

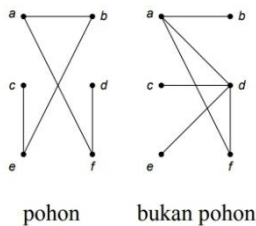
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya memiliki bobot atau nilai. Bobot tersebut dapat berupa jarak antar dua kota, biaya, dan lain-lain. Terdapat istilah lain graf berbobot, yaitu graf berlabel. Label tidak hanya diberikan pada sisi, melainkan juga pada simpul. Sisi diberi label bilangan tak negatif dan simpul diberi label data lain. Contohnya pada graf yang memodelkan keterhubungan kota. Simpul pada graf diberi nama kota dan label pada sisi graf merepresentasikan jarak antar kota.



Gambar 2.3 Pohon merentang berbobot dari graf berbobot (Sumber: <https://lib.unnes.ac.id/23034/1/4111410035.pdf> - diakses 22 November 2019 pukul 20.50 WIB)

D. Pohon

Pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit [2]. Pohon $G = (V,E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n . Berikut adalah sifat-sifat pohon G . Pertama, setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal. Kedua, G terhubung dan memiliki $n-1$ buah sisi. Ketiga, G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $n-1$ sisi. Keempat, G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit [3].

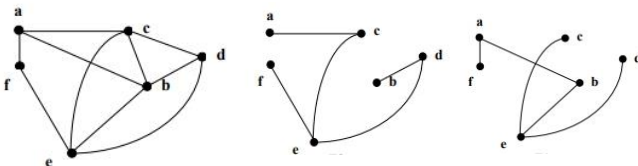


Gambar 2.4 Pohon dan bukan pohon

(Sumber: [http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/Pohon%20\(2013\).pdf](http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/Pohon%20(2013).pdf) - diakses 22 November 2019 pukul 20.00 WIB)

E. Pohon Merentang

Pohon merentang adalah upagraf merentang yang berupa pohon dari graf terhubung. Pohon merentang dapat diperoleh dengan memutus sirkuit dalam graf terhubung. Simpul pada pohon merentang T sama dengan simpul pada graf G dan sisi-sisi pada pohon merentang T merupakan subset dari sisi-sisi graf G .

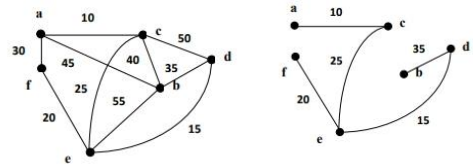


Gambar 2.5 Pohon merentang dari suatu graf

(Sumber: <https://lib.unnes.ac.id/23034/1/4111410035.pdf> - diakses 22 November 2019 pukul 20.36 WIB)

F. Pohon Merentang Minimum

Pohon merentang minimum adalah pohon rentang dari suatu graf berbobot G yang memiliki bobot minimum diantara pohon rentang lain yang mungkin dibentuk dari graf berbobot G . Misalkan G adalah graf berbobot, bobot pohon rentang T dari graf G merupakan jumlah bobot dari semua sisi di T . Persoalan pohon merentang minimum adalah menentukan sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada jaringan sehingga didapatkan jumlah bobot sisi yang minimum.

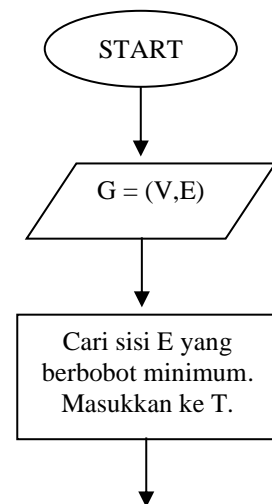


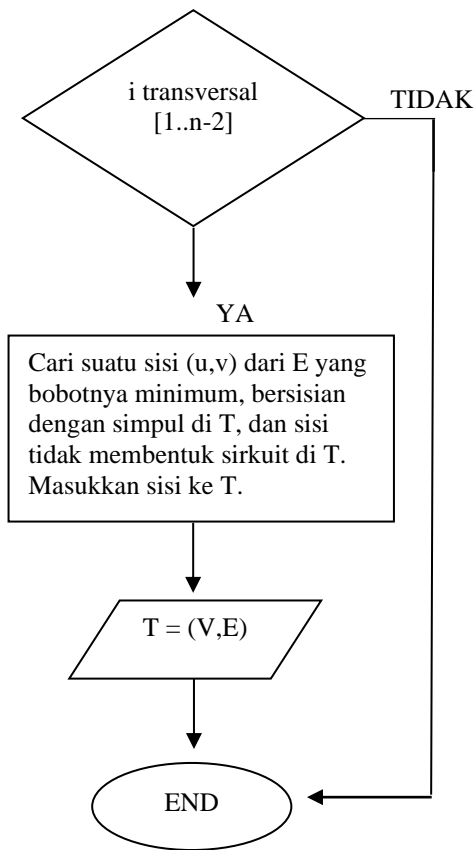
Gambar 2.6 Pohon merentang berbobot dari graf berbobot (Sumber: <https://lib.unnes.ac.id/23034/1/4111410035.pdf> - diakses 22 November 2019 pukul 20.50 WIB)

G. Algoritma Prim

Algoritma Prim ditemukan oleh Robert Clay Prim. Algoritma Prim digunakan untuk mencari pohon merentang minimum. Konsep utama dari Algoritma Prim adalah memilih sisi (*edge*) dari graf terhubung yang memiliki bobot minimum yang terhubung dengan pohon merentang (T) yang telah terbentuk. Namun demikian, sisi yang memiliki bobot minimum tersebut tidak boleh membentuk sirkuit pada pohon merentang (T) [2].

Terdapat tiga langkah utama dalam Algoritma Prim. Langkah pertama, ambil sisi dari graf G yang memiliki bobot minimum dan masukkan ke dalam pohon merentang T . Langkah kedua, pilih sisi (u,v) yang memiliki bobot minimum dan bersisian dengan T , tetapi sisi (u,v) tidak boleh membentuk sirkuit di pohon merentang T . Masukkan sisi (u,v) ke pohon merentang T . Langkah ketiga, ulangi langkah kedua sebanyak $n-2$ kali yaitu sampai pohon merentang minimum terbentuk.





III. LIGA INGGRIS 2019/2020

A. Tim Liga Inggris 2019/2020

Liga Inggris merupakan salah satu liga sepakbola yang paling populer. Kompetisi Liga Inggris merupakan kompetisi liga sepakbola tertua karena telah dimulai sejak tahun 1888. Dewasa ini, Liga Inggris lebih dikenal dengan nama *Premier League*, format liga baru yang telah dimulai sejak 1992. [4]

Pada musim 2019/2020, terdapat dua puluh tim peserta Liga Inggris (*Premier League*). Tim-tim tersebut tersebar di beberapa kota di Inggris. Berikut tim-tim peserta Liga Inggris 2019/2020 beserta kota asal tim tersebut.

Nama Tim	Kota Asal
Arsenal	London
Aston Villa	Birmingham
Brighton & Hove Albion	Brighton
Burnley	Burnley
Chelsea	London
Crystal Palace	London
Everton	Liverpool
Leicester City	Leicester
Liverpool	Liverpool
Manchester City	Manchester
Manchester United	Manchester
Newcastle United	Newcastle upon Tyne
Norwich City	Norwich
Sheffield United	Sheffield

Southampton	Southampton
Tottenham Hotspur	London
Watford	Watford
West Ham United	London
Wolverhampton Wanderers	Wolverhampton

Tabel 3.1 Daftar Tim Liga Inggris 2019/2020 beserta kota asal
(Sumber: <https://www.premierleague.com/clubs> - diakses 23 November 2019 pukul 15.00 WIB)

B. Jarak Antar-Kota melalui Jalan Raya

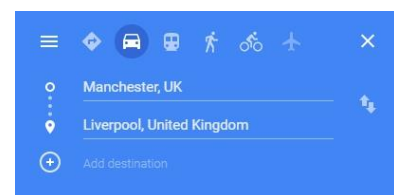
Penentuan jarak antar-kota yang terhubung dengan jalan raya menggunakan aplikasi *Google Maps*. Berikut adalah salah satu contoh cara penentuan jarak antar-kota.



Gambar 3.1 Peta Negara Inggris

(Sumber: *Google Maps* - diakses 23 November 2019 pukul 15.40 WIB)

Berikut adalah penentuan jarak kota Manchester ke kota Liverpool. Cara ini berlaku juga untuk jarak antar-kota yang lain, dengan mengganti input nama kota di aplikasi *Google Maps*.



Gambar 3.2 Input kota di Google Maps

(Sumber: *Google Maps* - diakses 23 November 2019 pukul 15.40 WIB)

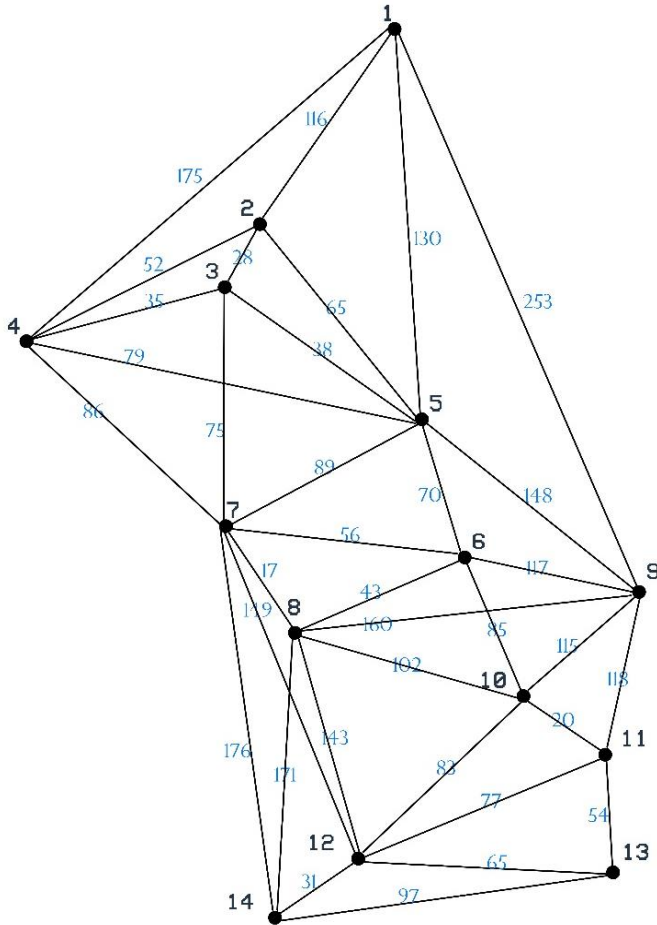
Berikut adalah jarak kota Manchester ke kota Liverpool menggunakan jalan raya yaitu sebesar 36 mil (dibulatkan ke bawah), maupun sebaliknya (jarak sama). Jika terdapat lebih dari satu opsi perjalanan melalui jalan raya di aplikasi *Google Maps*, maka jarak yang diambil adalah rute yang memiliki jarak paling minimum.



Gambar 3.3 Jarak Manchester ke Liverpool pada Google Maps
(Sumber: *Google Maps* - diakses 23 November 2019 pukul 15.40 WIB)

C. Graf Terhubung-Berbobot Tiap Kota Tim Liga Inggris 2019/2020

Simpul pada graf merepresentasikan kota. Sedangkan, sisi pada graf merepresentasikan keterhubungan dua kota melalui jalan raya. Bobot pada sisi graf terhubung merupakan representasi jarak antar-kota dalam satuan mil.



Gambar 3.4 Graf Terhubung-Berbobot yang Menghubungkan Tiap Kota Tim Liga Inggris 2019/2020

Simpul	Representasi Kota
1	Newcastle
2	Burnley
3	Manchester
4	Liverpool
5	Sheffield
6	Leicester
7	Wolverhampton
8	Birmingham
9	Norwich
10	Watford
11	London
12	Southampton
13	Brighton
14	Bournemouth

Tabel 3.2 Keterangan simpul pada graf terhubung-berbobot

IV. ALGORITMA PRIM UNTUK MENEMUKAN POHON MERENTANG MINIMUM

Pada bagian ini, akan ditunjukkan langkah-langkah untuk menemukan pohon merentang minimum dari graf di gambar 3.4. Sesuai dengan landasan teori di bagian II, terdapat $n-2$ (langkah 2) + 1 (langkah 1) langkah pengerjaan. Pada graf di gambar 3.4 terdapat 14 simpul (n) sehingga terdapat 13 langkah untuk menemukan pohon merentang minimum. Berikut adalah langkah-langkah dalam menemukan pohon merentang minimum dari graf terhubung-berbobot yang menghubungkan tiap kota tim Liga Inggris 2019/2020.

Langkah 1:

Mencari sisi dari graf yang berbobot minimum. Dari graf pada gambar 3.4 terlihat bahwa sisi yang menghubungkan simpul 7 dengan simpul 8 memiliki bobot paling minimum dibandingkan sisi lainnya. Sisi yang menghubungkan simpul 7 dan 8 berbobot 17.

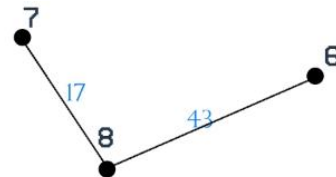


Gambar 4.1 Pohon merentang T dari langkah 1

Langkah 2:

Mencari sisi dari graf yang berbobot minimum. Sisi graf tersebut harus bersisian dengan simpul di pohon merentang T. Adapun, sisi yang dipilih tidak diperbolehkan membentuk sirkuit di T.

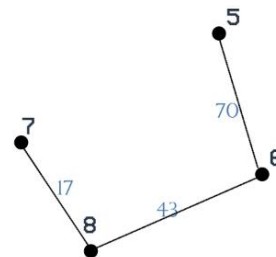
Dari graf di gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 7 dan 8 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 6 dan 8. Sisi tersebut memiliki bobot 43.



Gambar 4.2 Pohon merentang T dari langkah 2

Langkah 3:

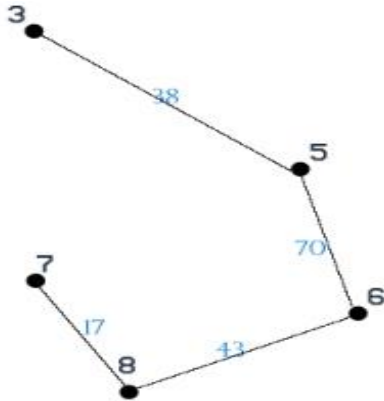
Sama seperti langkah 2, dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 6, 7, 8 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 5 dan 6. Sisi tersebut memiliki bobot 70.



Gambar 4.3 Pohon merentang T dari langkah 3

Langkah 4:

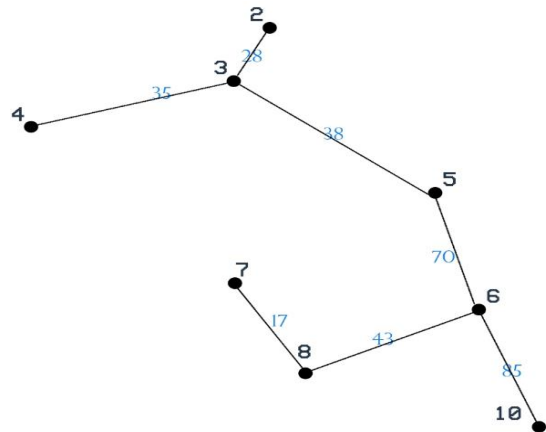
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 5,6,7,8 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 3 dan 5. Sisi tersebut memiliki bobot 38.



Gambar 4.4 Pohon merentang T dari langkah 4

Langkah 7:

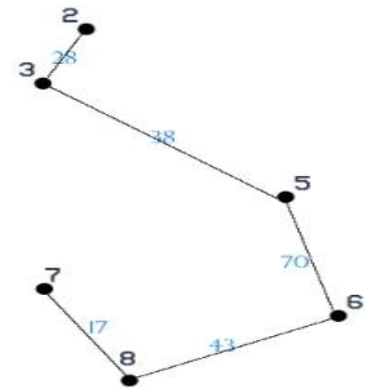
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 6 dan 10. Sisi tersebut memiliki bobot 85.



Gambar 4.7 Pohon merentang T dari langkah 7

Langkah 5:

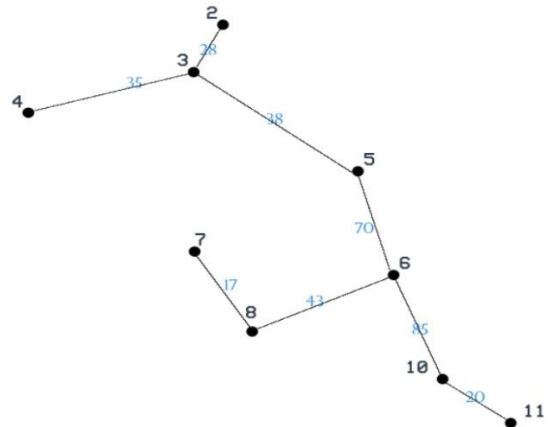
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 3,5,6,7,8 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 2 dan 3. Sisi tersebut memiliki bobot 28.



Gambar 4.5 Pohon merentang T dari langkah 5

Langkah 8:

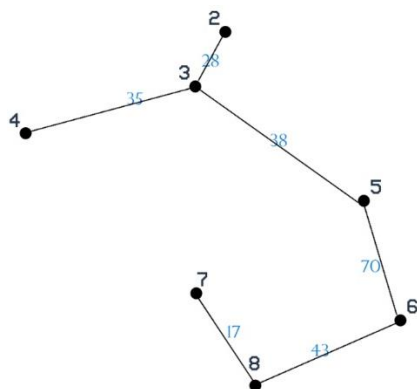
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8,10 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 10 dan 11. Sisi tersebut memiliki bobot 20.



Gambar 4.8 Pohon merentang T dari langkah 8

Langkah 6:

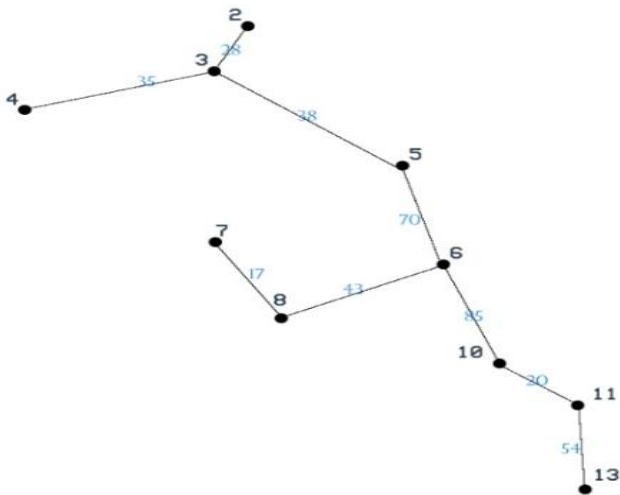
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,5,6,7,8 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 3 dan 4. Sisi tersebut memiliki bobot 35.



Gambar 4.6 Pohon merentang T dari langkah 6

Langkah 9:

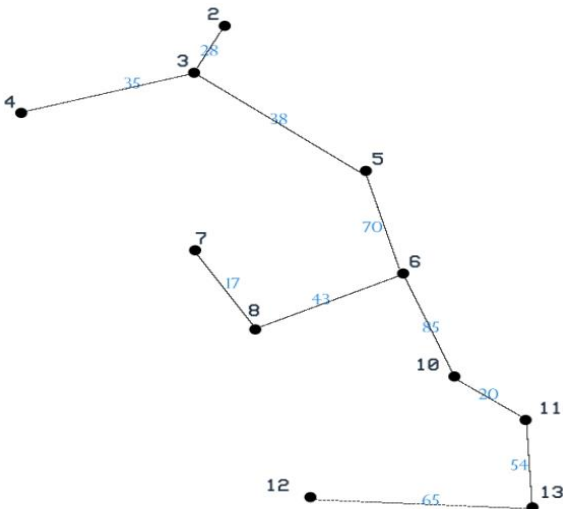
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8,10,11 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 11 dan 13. Sisi tersebut memiliki bobot 54.



Gambar 4.9 Pohon merentang T dari langkah 9

Langkah 10:

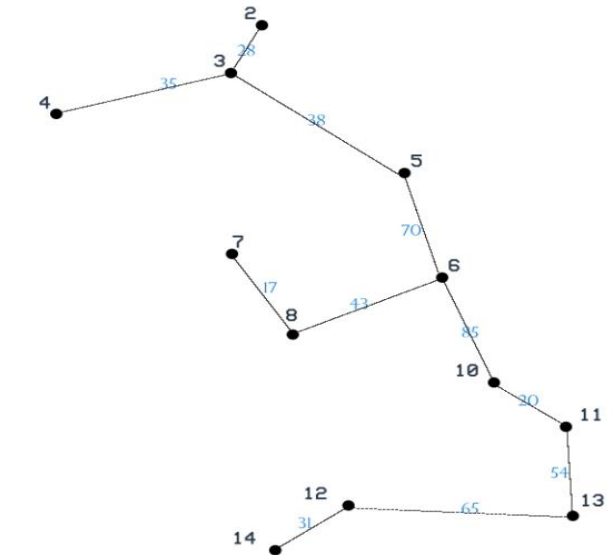
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8,10,11,13 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 12 dan 13. Sisi tersebut memiliki bobot 65.



Gambar 4.10 Pohon merentang T dari langkah 10

Langkah 11:

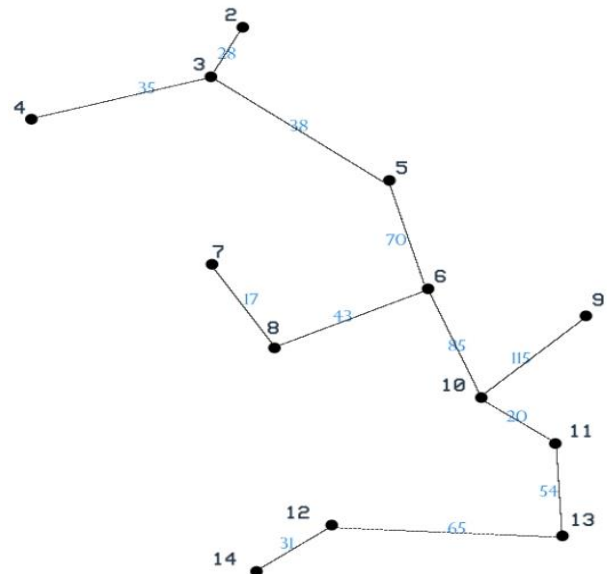
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 12 dan 14. Sisi tersebut memiliki bobot 31.



Gambar 4.11 Pohon merentang T dari langkah 11

Langkah 12:

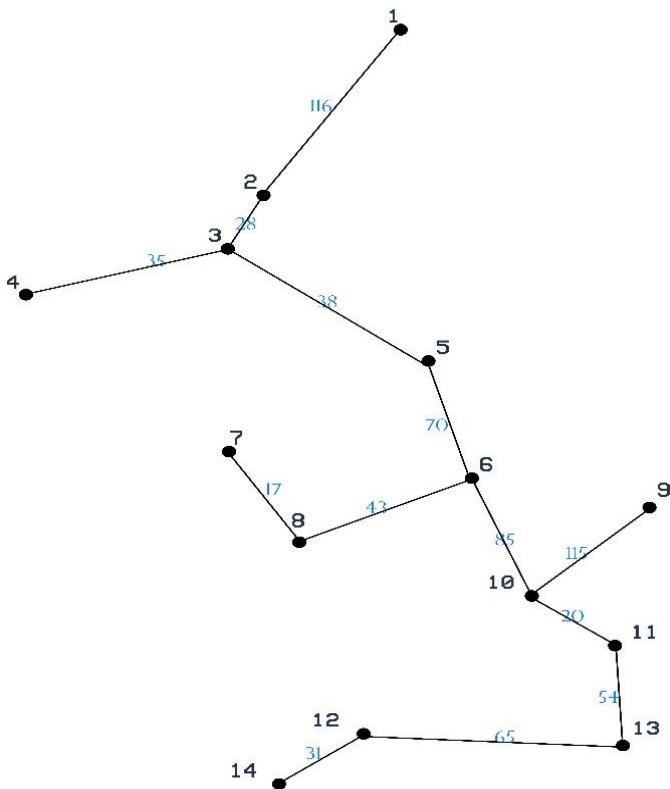
Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 9 dan 10. Sisi tersebut memiliki bobot 115.



Gambar 4.12 Pohon merentang T dari langkah 12

Langkah 13:

Langkah terakhir. Dari graf pada gambar 3.4, terlihat bahwa sisi yang bersisian dengan simpul 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 dan memiliki bobot minimum serta tidak membentuk sirkuit di T adalah sisi yang menghubungkan simpul 1 dan 2. Sisi tersebut memiliki bobot 116.



Gambar 4.13 Pohon merentang minimum dari Graf Terhubung-Berbobot yang menghubungkan tiap kota tim Liga Inggris 2019/2020

V. KESIMPULAN

Algoritma Prim dapat digunakan untuk menemukan pohon merentang minimum suatu graf terhubung-berbobot. Dalam makalah ini, Algoritma Prim digunakan untuk menemukan pohon merentang minimum dari graf yang menghubungkan tiap kota tim Liga Inggris 2019/2020. Dari pohon merentang minimum yang ditemukan, jarak minimum yang menghubungkan tiap kota tim Liga Inggris 2019/2020 adalah 717 mil.

VI. PENUTUP

Penulis mengucapkan puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena dengan berkat-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini dengan baik. Adapun, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada dosen-dosen Matematika Diskrit yaitu Bapak Rinaldi Munir, Ibu Harlili, dan Ibu Fariska Zakhralativa yang telah membagikan ilmunya kepada penulis sehingga dapat menulis makalah ini. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada orangtua dan keluarga yang selalu memberikan penulis semangat dalam kuliah.

REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika diakses dari <http://eprints.uny.ac.id/26562/2/BAB%20II.pdf> - diakses pada 22 Nov 2019 pukul 20.00
- [2] Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika diakses dari <https://lib.unnes.ac.id/23034/1/4111410035.pdf> dan http://repository.amikom.ac.id/files/Publikasi_07.11.1385.pdf - diakses pada 22 Nov 2019 pukul 20.00
- [3] [http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/Pohon%20\(2013\).pdf](http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/Pohon%20(2013).pdf) - diakses pada 28 Nov 2019 pukul 19.00

[4] <https://www.jurnalisbola.com/sejarah-liga-inggris/> - diakses pada 25 November pukul 15.00

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 1 Desember 2019

Hengky Surya Angkasa
13518048