Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Kuis 3 IF2120 Matematika Diskrit (Topik bahasan: Teori Bilangan dan Kombinatorial)
Kamis, 8 November 2018
Waktu: 55 menit

1. Dengan algoritma Euclidean, tentukan balikan modulo (*modulo invers*) dari $-2(mod\ 9)$

Jawaban:

$-2 = 0\,.\,9 + (-2)$ (i)
$9 = -4\,.\,(-2) + 1$ (ii)
$-2 = -2\,.\,1 + 0$ (iii)

Membuktikan bahwa $PBB(-2, 9) = 1$ dan memiliki invers

$1 = 9 + 4\,.\,(-2)$ (iv)
$-2 = (-2) + 0\,.\,9$ (v)

$1 = 9 + 4\,.\,((-2) + 0\,.\,9)$ (vi)
$1 = 1\,.\,9 + 4\,.\,(-2)$

Dari persamaan terakhir, diperoleh balikan dari $-2(mod\ 9)$ adalah 4

2. Tentukan semua bilangan bulat x yang memenuhi sistem kongruensi (*Chinese Remainder Problem*):

$$x \equiv 1(mod\ 5),\ x \equiv 2(mod\ 6),\ x \equiv 3(mod\ 7)$$

Jawaban:

Kongruensi pertama dapat dituliskan sebagai persamaan:

$x = 5v + 1$ $(\boldsymbol{i})$

dengan v sebuah bilangan bulat. Substitusikan persamaan tersebut ke dalam kongruensi kedua:

$5v + 1 \equiv 2(mod\ 6)$

$5v \equiv 1(mod\ 6)$

$5v \equiv (24 + 1)(mod\ 6)$

$v \equiv 5(mod\ 6)$

$v = 6u + 5$ $(\boldsymbol{ii})$

dengan u sebuah bilangan bulat. Substitusikan $(\boldsymbol{ii})$ ke dalam $(\boldsymbol{i})$:

$x = 5(6u + 5) + 1 = 30u + 26$ $(\boldsymbol{iii})$

Substitusikan $(\boldsymbol{iii})$ ke dalam kongruensi ketiga -> $\equiv 3(mod\ 7)$:

$$30u + 26 \equiv 3\ (mod\ 7)$$

$$30u \equiv -23(mod\ 7)$$

$$30u \equiv (-23 + 203)(mod\ 7)$$

$$u \equiv 6(mod\ 7)$$

$$u = 7w + 6 \qquad (\boldsymbol{iv})$$

dengan w sebuah bilangan bulat. Substitusikan $(\boldsymbol{iv})$ ke dalam $(\boldsymbol{iii})$:

$$x = 30(7v + 6) + 26 = 210u + 206$$

Persamaan yang dihasilkan dapat diubah kembali ke dalam bentuk kongruensi:

$$x \ \equiv \ 206\ (mod\ 210) \qquad (\boldsymbol{v})$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bilangan bulat x yang memenuhi sistem kongruensi di atas adalah semua bilangan yang kongruen dengan kongruensi $(\boldsymbol{v})$

3. Tentukan nilai X dan Y yang pada persamaan di bawah ini dengan menggunakan algoritma Euclidean. (jawaban tidak akan dinilai jika tidak diberi langkah mendapat jawaban):

$$122 * X + 250 * Y = 2$$

Jawaban:

$122 * X + 250 * Y = FPB(122, 250)$

$$FPB(122, 250) = 5$$
$$250 = 2 * 122 + 6$$
$$122 = 20 * 6 + 2$$
$$6 = 3 * 2 + 0$$

Dapat disusun menjadi

$$2 = 122 - 20 * 6 \quad (i)$$
$$6 = 250 - 2 * 122 \quad (ii)$$

Substitusi 6 pada persamaan (i) dengan persamaan (ii), lalu didapat

$$2 = 41 * 122 - 20 * 250$$

Sehingga didapat bahwa X = 41 dan Y = -20.

4. Pada suatu waktu di masa depan, dari 50 tim yang mengikuti ACM ICPC World Finals, terdapat 5 tim yang mewakili Indonesia. Jika peringkat 1 hingga 4 mendapatkan medali emas, 5 hingga 8 mendapatkan medali perak, dan 9 hingga 13 mendapatkan medali perunggu. Tentukan peluang kejadian Indonesia mendapatkan 3 medali emas! (Jika terdapat kesulitan dalam menghitung, cukup berikan jawaban dalam notasi Permutasi dan/atau Kombinasi)

Jawaban:

Banyak seluruh kejadian

$$P_{50}^{50}$$

Banyak cara menyusun medalis emas

$$P_4^4$$

Banyak kejadian 3 emas Indonesia dan 1 emas negara lain

$$C_1^{45} * C_3^5$$

Banyak susunan kejadian 3 emas Indonesia dan 1 emas negara lain

$$C_1^{45} * C_3^5 * \ P_4^4$$

Peluang kejadian

$$\frac{C_1^{45} * C_3^5 * \ P_4^4}{P_{50}^{50}}$$

5. Berapa banyak solusi integer $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 16$, jika $X_1 > 1$, $X_5 = 2$, sedangkan untuk X_i lainnya $0 \le X_i \le 16$ untuk

   Jawaban: Isi X1 minimal dengan 2, lalu isi X5 dengan 2. Sisa = 16 – 2 – 2 = 14
   Bagikan 14 ke 5 kotak (X1, X2, X3, X4, dan X6)
   r = 14, n = 5
   Banyak solusi = C(n + r – 1, r) = C(5 + 14 – 1, 14) = C(18, 14) = 18!/(14! 4!) = 18.17.16.15/(24)
   = 3060