Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Induksi Matematika
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Judhi Santoso
Senin, 13 September 2018
Waktu: 50 menit

1. Dari beberapa pernyataan berikut tentukanlah apakah Andi berhasil lulus mata kuliah Matdis dengan menggunakan hukum-hukum logika dan penarikan kesimpulan yang sahih (modus tollens, modus ponen, dsb).
   a. Jika Andi lulus ujian matdis dan lulus kuis Matdis maka ia lulus mata kuliah matdis
   b. Jika Andi mengikuti tutorial matdis maka ia lulus ujian Matdis
   c. Andi lulus kuis matdis atau lulus kuis logif
   d. Jika Andi lulus kuis logif maka ia senang
   e. Andi mengikuti tutorial matdis
   f. Andi tidak senang

   Jawaban:
   Misalkan
   p : Andi lulus ujian matdis
   q : Andi lulus kuis matdis
   r : Andi lulus mata kuliah matdis
   s : Andi mengikuti tutor matdis
   t : Andi lulus kuis logif
   u : Andi senang

   Jawab :
   1. $p \wedge q$ -> r
   2. s -> p
   3. $q \vee t$
   4. t -> u
   5. s
   6. ~u
   7. p (modus ponen 2 & 5)
   8. ~t (modus tollen 4 & 6)
   9. q (Silogisme disjungtif 3 & 8)
   10. r (modus ponen 7,9 & 1)

   Jadi kesimpulannya adalah r (Andi lulus mata kuliah matdis)

2. *Farhan boleh mengulang mata kuliah Algeo tahun ini atau mengambil mata kuliah Agama. Jika Farhan mengambil mata kuliah Agama maka ia wajib ikut responsi setiap hari Jumat. Tapi Farhan tidak mengulang mata kuliah Algeo tahun ini. Oleh karena itu ia wajib ikut responsi setiap hari Jumat.*
   Buktikan dengan tabel kebenaran apakah argumen diatas sahih atau tidak !
   Jawaban:
   Misalkan :
   p = Farhan boleh mengulang mata kuliah Algeo tahun ini
   q = Fahan mengambil mata kuliah Agama
   r = Farhan wajib ikuit response setiap hari Jumat

   maka argumen diatas dapat disusun menjadi :
   p V q
   q → r
   ~p
   ----
   r

Untuk membuktikan kesahihan argumen, harus diperlihatkan bahwa
$[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim p] \rightarrow r$ merupakan tautologi.

p	q	r	p V q	q → r		(p V q) Λ (q → r) Λ ~p	[(p V q) Λ (q → r) Λ ~p] → r
			B	B		S	B
			B	S		S	B
			B	B		S	B
			B	B		S	B
			B	B		B	B
			B	S		S	B
			S	B		S	B
			S	B		S	B

Kesimpulan : argument sah

3. Tentukan banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 atau 3, tetapi tidak habis dibagi 5 pada *range* bilangan [1..100]

Jawaban:

Misal A adalah bilangan yang habis dibagi 2.
Maka:

$$|A| = \frac{100}{2}$$
$$|A| = 50$$

Misal B adalah bilangan yang habis dibagi 3.
Maka:

$$|B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor$$
$$|B| = 33$$

Misal C adalah bilangan yang habis dibagi 5.
Maka:

$$|C| = \frac{100}{5}$$
$$|C| = 20$$

Solusi yang dibahas:
$|(A \cup B) - C|$
Alternatif lain:
$|(A - C) \cup (B - C)|$
Banyak bilangan yang habis dibagi 2 dan habis dibagi 3:

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor$$
$$|A \cap B| = 16$$

Banyak bilangan yang habis dibagi 2 dan habis dibagi 5:

$$|A \cap C| = \frac{100}{10}$$
$$|A \cap C| = 10$$

Banyak bilangan yang habis dibagi 3 dan habis dibagi 5:

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor$$
$$|B \cap C| = 6$$

Banyak bilangan yang habis dibagi 2, 3, dan 5:

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor$$
$$|A \cap B \cap C| = 3$$

Misal D adalah bilangan yang habis dibagi 2 atau 3:

$$|D| = |A \cup B|$$
$$|D| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|D| = 50 + 33 - 16$$
$$|D| = 67$$

Misal E adalah bilangan yang habis dibagi 2 atau 3, tetapi tidak habis dibagi 5:

$$|E| = |(A \cup B) - C|$$
$$|E| = |D| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|)$$
$$|E| = 67 - (10 + 6 - 3)$$
$$|E| = 54$$

4. Jika *A* dan *B* himpunan, buktikan bahwa $(A \oplus B) - ((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = B - A$. Tuliskan hukum-hukum himpunan yang digunakan.

<u>Jawaban</u>:

$((A - B) \cup (B - A)) - ((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}))$	(Definisi Operator ⊕)
$((A - B) \cup (B - A)) - ((A \cap (B \cup \overline{B}))$	(Hukum Distribusi)
$((A - B) \cup (B - A)) - (A \cap U)$	(Hukum Komplemen)
$((A - B) \cup (B - A)) - A$	(Hukum Identitas)
$((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{A}$	(Definisi Operator –) 3x
$(((A \cap \overline{B}) \cap \overline{A}) \cup ((B \cap \overline{A}) \cap \overline{A}))$	(Hukum Distribusi)
$((A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{A}))$	(Hukum Asosiatif)
$((\emptyset \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{A}))$	(Hukum Komplemen)
$((\emptyset \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}))$	(Hukum Idempoten)
$(\emptyset \cup (B \cap \overline{A}))$	(Hukum *Null*/Dominasi)
$(B \cap \overline{A})$	(Hukum Identitas)
$(B - A)$	(Definisi Operator –)

5. Untuk soal nomor 5, <u>pilih salah satu</u> soal induksi matematika di bawah ini:
   (a) Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa untuk *semua bilangan bulat positif* n, *hasil dari* $3^{2n} - 1$ *habis dibagi 8.*
   (b) Suatu string biner panjangnya *n* bit. Jumlah string biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1}. Buktikan Pernyataan tersebut untuk $n \geq 1$.

Jawaban:

(a)

$P(n) : 3^{2n} - 1$

(i) Basis induksi:

Untuk $n = 1$, $P(n) : 3^{2n} - 1$ jelas benar sebab:

$3^{2 \cdot 1} - 1 = 8$

(ii) Langkah induksi:

Andaikan bahwa untuk suatu bilangan bulat $k \geq 1$, pernyataan "$hasil\ P(k) : 3^{2k} - 1\ habis\ dibagi\ 8$" adalah benar(*hipotesis induksi*), akan ditunjukkan bahwa pernyataan "$hasil\ dari\ P(k) : 3^{2(k+1)} - 1\ habis\ dibagi\ 8$" juga benar. Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 \\ &= 3^2 \cdot 3^{2k} - 1 \\ &= 9 \cdot 3^{2k} - 1 \\ &= (8 + 1) \cdot 3^{2k} - 1 \\ &= 8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} - 1 \end{aligned}$$

$8 \cdot 3^{2k}$ dan $3^{2k} - 1$ habis dibagi 8, maka $3^{2(k+1)} - 1$ habis dibagi 8.

Karena langkah *(i)* dan *(ii)* telah dibuktikan benar, maka untuk *semua bilangan positif bulat* n, pernyataan "$hasil\ dari\ 3^{2n} - 1\ habis\ dibagi\ 8$" adalah benar.

(c) p(n) ≡ Untuk string biner sepanjang n bit, jumlah string bner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1} untuk $n \geq 1$.

(i) Basis induksi:

Untuk n = 1, string biner hanya 0 atau 1. String biner yang mempunyai bit 1 seumlah genap hanya satu buah, yaitu string 0 saja. Jumlah ini sesuai dengan rumus $2^{1-1} = 2^0 = 1$. Jadi p(1) benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan p(n) benar, yaitu untuk string biner sepanjang n bit, jumlah string biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1} untuk $n \geq 1$ adalah benar (hipotesis induksi).

Kita harus membuktikan bahwa p(n+1) benar, yaitu jumlah string biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^n. Hal ini ditunjukkkan sebagai berikut: Untuk string biner dengan *n* bit, banyaknya string biner berbeda yang dapat disusun adalah 2^n. Untuk tambahan bit ke-(n+1), banyaknya string biner berbeda yang dapat disusun adalah 2^{n+1} atau $2 \cdot 2^n$. Menurut hipotesis induksi, untuk string biner sepanjang n bit (yang berarti jumlah string biner berbeda adalah 2^n) , jumlah string biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1} . Sehingga, untuk strin biner sepanjang n+1 bit, jumlah string biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah $2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1+1} = 2^n$.

Karena langkah *(i)* dan *(ii)* telah dibuktikan benar, maka terbukti untuk string biner sepanjang n bit, jumlah string bner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1} untuk $n \geq 1$.