Pembuktian Graf Planar dengan Pertidaksamaan Euler

Willy Santoso - 13517066
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13517066@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak* — Makalah ini membahas tentang pembuktian keplanaran graf dan contoh implementasinya pada berbagai macam graf sesuai yang telat dipelajari pada mata kuliah Matematika Diskrit. Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah lama diperkenalkan, tetapi memiliki banyak penerapannya hingga saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut yang digambarkan dengan simpul dan sisi. Salah satu jenis graf yang berguna dalam menyelesaikan masalah di kehidupan sehari-hari adalah graf planar. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar tanpa adanya sisi yang bersilangan. Dalam membuktikan keplanaran graf terdapat 2 cara, yaitu dengan teori graf Kuratowski dan pertidaksamaan Euler. Akan tetapi, penulis akan membatasi ruang lingkup permasalahan pada pembuktian graf planar, yaitu pembuktian dengan pertidaksamaan Euler. Penurunan dan pembuktian rumus pertidaksamaan ini yang akan dibahas pada makalah ini.**

Kata kunci — Graf, graf planar, pertidaksamaan Euler, pembuktian graf planar.

I. PENDAHULUAN

Teori graf banyak digunakan untuk menyelesaikan beberapa masalah di sekitar kita. Adapun tujuan dari pembuatan makalah ini adalah membuktikan penurunan pertidaksamaan Euler terhadap teori Graf Planar sehingga dapat dimengerti dengan baik. Terdapat beberapa cara untuk membuktikan keplanaran graf, tetapi setiap cara memiliki syarat tertentu untuk digunakan agar menghasilkan solusi yang tepat. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk membuktika keplanaran berbagai graf adalah dengan menggunakan rumus pertidaksamaan Euler.

Makalah ini akan membahas pembuktian rumus pertidaksamaan Euler beserta dengan penurunan rumus tersebut dan pembuktian suatu keplanaran graf dengan rumus pertidaksamaan Euler.

II. TINJAUAN TEORI

A. Sejarah Graf

Pada awalnya teori graf ditemukan dan digunakan matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk menyelesaikan permasalah jembatan Konigsberg. Di Kota Konigsberg terdapat sungai yang bercabang menjadi dua buah anak sungai. Untuk menghubungkan transportasi antar sungai, terdapat 7 buah jembatan [5]. Jembatan ini adalah jembatan yang menarik karena munculnya permasalahan untuk melewati tiap jembatan tepat sekali dan kembali ke tempat semula. Teori graf mampu menjawab permasalahan tersebut dan sejak saat itu penggunaan teori graf sering diaplikasikan dalam menyelesaikan beberapa hal.

Leonhard Euler dapat menjelaskan jawaban akan masalah ini secara matematis menggunakan teori graf. Jawaban yang dikemukakan adalah tidak mungkin untuk melewati ketujuh jembatan tepat satu kali sesuai dengan syarat pada masalah jembataan Koningsberg, jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap [5].

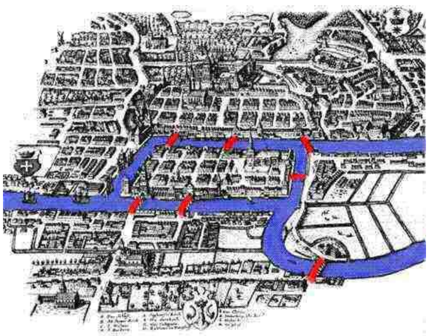


Fig. I Jembatan Konigsberg

B. Definisi Graf

Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari simpul dan sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut [4]. Graf dinotasikan G = (V,E) yang terdiri dari 2 himpunan. V adalah himpunan dari simpul (*vertex*) pada graf tersebut yang bukan merupakan himpunan kosong, sedangkan E adalah himpunan dari sisi (*edge)* pada graf tersebut yang menghubungkan sepasang simpul, namun E boleh merupakan himpunan kosong yang berarti graf tidak bersisi [3]. Teori graf dapat dimanfaatkan dalam menyelesaikan masalah di sekitar manusia.

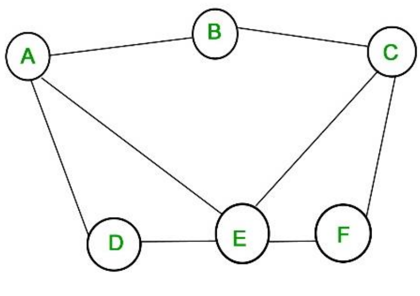


Fig. II Contoh Graf

C. Terminologi Graf

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)
   Jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan 2 buah simpul berbeda, maka kedua simpul tersebut dikatakan saling bertetangga karena terhubung langsung oleh sisi tersebut.
2. Bersisian (*Incident*)
   Jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan 2 buah simpul, maka kedua simpul bersisian dengan sisi tersebut.
3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)
   Simpul terpencil adalah simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya [1].
4. Graf Kosong (*Empty Graph*)
   Graf kosong adalah graf yang tidak memiliki sisi atau graf dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.
5. Derajat (*Degree*)
   Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut, sedangkan derajat suatu wilayah adalah jumlah sisi yang membatasi wilayah tersebut [4]. Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil adalah selalu genap [1]. Lemma Jabat Tangan adalah jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut [1]. Sama halnya dengan wilayah, jumlah derajat seluruh wilayah akan sama dengan dua kali jumlah sisi pada graf tersebut [4].
6. Lintasan (*Path*)
   Lintasan adalah panjang dengan satuan sisi yang menunjukan langkah dari satu simpul ke simpul lainnya di dalam graf tersebut.
7. Sirkuit (*Cycle*)
   Sirkuit adalah lintasan tertutup dengan lintasan yang berawal dan berakhir di simpul yang sama. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut [1].
8. Terhubung (*Connected*)
   Dua buah simpul dapat dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari satu simpul ke simpul lainnya. Jika pada suatu graf berarah, terdapat 2 lintasan berarah yang saling menghubungkan 2 simpul berbeda, maka kedua simpul tersebut terhubung kuat, sedangkan jika hanya ada 1 lintasan yang menghubungkan kedua simpul, maka kedua simpul tersebut terhubung lemah [1].
9. Upagraf (*Subgraph*)
   Upagraf adalah bagian dari graf yang memiliki ciri-ciri himpunan simpul upagraf yang merupakan himpunan bagian dari himpunan simpul graf awal dan himpunan sisi upagraf merupakan himpunan bagian dari himpunan sisi graf awal.
10. Komplemen Upagraf
    Komplemen upagraf adalah jika terdapat upagraf G1 dari graf G, jika upagraf G1 digabungkan dengan komplemen upagrafnya akan menjadi graf awal G.
11. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)
    Upagraf rentang adalah ketika terdapat upagraf G1 dari graf G, semua simpul yang terdapat pada graf G juga terdapat pada upagraf G1 dengan himpunan simpul pada graf G sama dengan himpunan simpul pada upagraf G1.
12. *Cut-Se*t
    Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung sehingga menghasilkan dua buah komplemen [1].
13. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)
    Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya memiliki nilai atau bobot.

D. Jenis-jenis Graf

Graf terbagi menjadi beberapa jenis. Pengklasifikasian jenis graf dikelompokkan berdasarkan pada faktor pembagi, orientasi arah sisi-sisinya, dan sifat khusus suatu graf. Menurut faktor pembaginya, graf terbagi menjadi 2 jenis yang didasarkan pada ada tidaknya sisi ganda atau gelang pada suatu graf.

1. Graf Sederhana (*Simple Graph*)
   Graf sederhana adalah suatu graf yang tidak memiliki sisi ganda dan gelang.
2. Graf Tak-Sederhana (*Unsimple-graph*)
   Graf tak-sederhana adalah suatu graf yang memiliki sisi ganda atau gelang. Terdapat 2 tipe pada graf tak-sederhana, yakni graf ganda dan graf semu. Graf yang memiliki jumlah sisi ganda 2 atau lebih dinamakan graf ganda, sedangkan graf yang memiliki gelang pada suatu atau beberapa simpulnya dinamakan graf semu.

Berdasarkan faktor orientasi arah pada sisi-sisinya, graf terbagi menjadi 2 jenis, yaitu:

1. Graf Berarah (*Directed Graph*)
   Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya memiliki orientasi arah.
2. Graf Tak-Sederhana (*Undirected Graph*)
   Graf tak sederhana adalah graf yang tidak memiliki orientasi arah pada sisi-sisinya.

Berdasarkan sifat khusus dari sebuah graf, graf terbagi menjadi 3, yaitu:

1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)
   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung dengan semua simpul sisanya sehingga setiap simpulnya berderajat sama dengan derajat n-1. Jumlah sisi pada graf lengkap adalah n(n-1)/2 dengan n adalah jumlah simpul graf.
2. Graf Lingkaran
   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang masing-masing simpulnya berderajat 2.
3. Graf Teratur
   Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya memiliki nilai derajat yang sama. Jumlah sisi pada graf teratur adalah jumlah simpul dikalikan dengan derajat simpul dan dibagi dengan 2, dengan n adalah banyak simpul dan r adalah derajat simpul.
4. Graf Bipartite (*Bipartite Graph*)
   Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V1 dan V2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V1 ke sebuah simpul di V2 disebut graf bipartite dan dinyatakan sebagai G(V1,V2) [1].

E. Graf Terhubung

Graf terhubung adalah graf yang jika setiap pasang simpul berbeda terdapat lintasan dari simpul yang satu ke simpul lainnya [1].

F. Graf Isomorfik

Dua buah graf dikatakan isomorfik jika setiap simpul dari kedua graf tersebut saling berkoresponden dan memiliki sifat yang sama. Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda karena sebuah graf dapat digambarkan dengan banyak cara [1].

Ciri-ciri graf yang isomorfik [1]. :

- Mempunyai jumlah simpul yang sama
- Mempunyai jumlah sisi yang sama
- Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

G. Graf Planar

Graf Planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan), kecuali simpul dimana mereka bertemu [2].

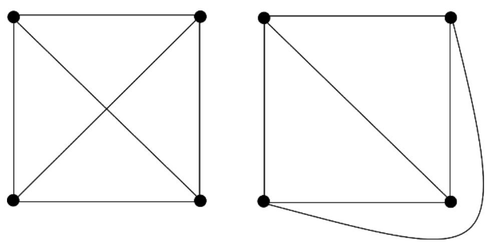


Fig. III Contoh Graph Planar

H. Graf Bidang

Graf bidang adalah penggambaran dari graf planar tanpa ada ruas yang berpotongan. Setiap graf bidang dari graf planar G membagi bidang menjadi beberapa bagian yang disebut dengan region [2]. Jika suatu graf adalah graf planar, maka graf tersebut dapat digambarkan menjadi graf bidang dengan tidak adanya sisi yang berpotongan.

I. Persamaan Euler

Representasi graf planar membagi bidang menjadi wilayah (region), termasuk wilayah yang tidak dibatasi. Jika G adalah graf planar sederhana dengan sisi sebanyak e dan simpul sebanyak v, maka akan terdapat r sebagai representasi graf planar yaitu wilayah dengan persamaan Euler sebagai berikut:

$$r = e - v + 2 \qquad (1).$$

Terdapat dua cara yang mampu membuktikan keplanaraf suatu graf, yaitu:

1. Teorema Kuratowski

   Kazimierz Kuratowski adalah seorang matematikawan yang berasal dari Polandia. Kuratowski memperkenalkan teorema yang dapat membuktikan keplanaran graf. Kuratowski memberikan 2 macam graf dan menyatakan bahwa jika sebuah graf memiliki upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf kuratowski, maka graf tersebut tidaklah planar.

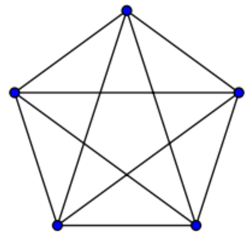
   

   Fig. IV Graf Kuratowski 1

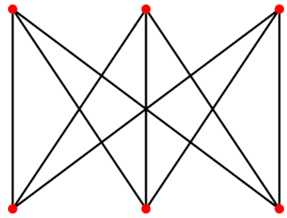
   

   Fig. V Graf Kuratowski 2

   Sifat -sifat graf Kuratowski adalah [1]:

   1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
   2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak planar
   3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkan menjadi graf planar.
   4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak planar dengan jumlah simpul minimum dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak planar dengan jumlah sisi minimum.

2. Pertidaksamaan Euler

   Jika terdapat suatu graf dengan n buah simpul dan e buah sisi, maka graf tersebut dapat dikatakan planar jika memenuhi pertidaksamaan Euler. Pertidaksamaan Euler adalah :

   $$e \le 3n - 6 \mid e > 2 \qquad (2).$$

   Jika terdapat graf terhubung dengan jumlah simpul lebih dari 2 dan tidak memiliki sirkuit dengan panjang 3, maka digunakan pertidaksamaan :

   $$e \le 2n - 4 \qquad (3).$$

III. Metode Penilitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu metode penelitian yang dilakukan dengan menggunakan studi kepustakaan, yang bersumber dari buku, jurnal penelitian, dan dokumen.

Prosedur Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Menyajikan pengertian dasar graf.
2. Menyajikan banyak simpul dan sisi pada graf.
3. Menyajikan derajat graf.
4. Menyajikan pengertian graf planar.
5. Menyajikan cara menentukan graf planar.
6. Pembuktian beberapa macam tipe graf dengan menggunakan pertidaksamaan Euler.
7. Menarik kesimpulan.

Perencanaan Tindakan

Pada tahap perencanaan tindakan, dilakukan dengan menyajikan beberapa contoh graf. Hal-hal yang akan dilakukan pada tahap ini adalah:

1. Menjelaskan tentang beberapa jenis graf.
2. Menjelaskan terminologi graf.
3. Menjelaskan sifat graf planar.
4. Menyiapkan beberapa graf yang berbeda-beda.
5. Menyelesaikan pembuktian keplanaran setiap graf dengan pembuktian pertidaksamaan Euler

Pelaksanaan Tindakan

Setelah perencanaan tindakan, penulis akan melakukan tahap pelaksanaan tindakan. Langkah-langkah yang akan dilaksanakan adalah:

1. Peneliti memelajari graf planar beserta pembuktian pertidaksamaan Euler.
2. Peneliti menyelesaikan pembuktian keplanaran beberapa graf dengan pembuktian pertidaksamaan Euler.

Analisis dan Refleksi

Setelah melakukan beberapa tindakan mengenai graf planar dan pertidaksamaan Euler, selanjutnya peneliti akan melakukan pembahasan dengan mencari ciri-ciri graf yang dapat dibuktikan dengan graf planar. Kegiatan refleksi peneliti didasarkan pada pembahasan. Hal-hal yang akan dilakukan dalam refleksi tindakan adalah:

1. Membahas semua graf planar dapat dibuktikan dengan pertidaksamaan Euler?
2. Membahas semua graf tidak planar tidak dapat dibuktikan dengan peritdaksamaan Euler?
3. Membuktikan penggunaan pertidaksamaan Euler untuk membuktikan graf planar?

IV. Hasil dan Pembahasan

Graf adalah sebuah konsep dengan simpul dan sisi yang menghubungkan simpul-simpulnya. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar tanpa adanya sisi yang saling berpotongan sehingga akan terdapat graf bidangnya. Pertidaksamaan Euler digunakan untuk menentukan keplanaran suatu graf. Rumus pertidaksamaan Euler yang pertama adalah persamaan (2) untuk nilai sisi (e) dengan $e > 2$. Rumus pertidaksamaan Euler yang kedua adalah persamaan (3) untuk nilai simpul (v) dengan $v > 2$ dan tidak memiliki Panjang sirkuit bernilai 3. Dalam membuktikan kedua pertidaksamaan, peneliti akan menggunakan teorema Lemma Jabat Tangan dan derajat wilayah pada suatu graf.

Pembuktian Pertidaksamaan Euler 1

Graf merupakan graf sederhana sehingga nilai minimal untuk derajat masing-masing wilayah haruslah lebih besar dari 2, termasuk pada wilayah yang tidak terbatas karena perlu diperhatikan bahwa jumlah simpul dari graf adalah minimal 3.

Dari teori tersebut akan didapatkan pertidaksamaan :

$$2e = \sum_{semua\ wilayah\ R} deg(R) \ \geq 3r \tag{4.}$$

Dari persamaan (4) akan diturunkan dan disederhanakan menjadi :

$$r \leq \left(\frac{2}{3}\right) e \tag{5.}$$

Kemudian, dengan menggunakan persamaan Euler, (1) untuk disubstitusikan pada nilai r menjadi :

$$e - v + 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right) e \tag{6.}$$

Kemudian disederhanakan menjadi :

$$3\mathrm{e} - 3\mathrm{v} + 6 \leq 2\mathrm{e} \tag{7.}$$

Sehingga pertidaksamaan akhir adalah :

$$\mathrm{e} \leq 3\mathrm{v} + 6 \tag{2.}$$

Dari penurunan rumus diatas, maka akan didapatkan hasil pertidaksamaan yang merupakan pertidaksamaan dari (2) dengan nilai e sebagai jumlah sisi yang lebih besar dari 2.

Pembuktian Pertidaksamaan Euler 2

Melalui penggunaan teori pada derajat wilayah, kita dapat mengetahui bahwa jumlah dari derajat seluruh wilayah akan sama dengan 2 kali jumlah sisi pada graf. Maka derajat setiap wilayah pastilah lebih besar sama dengan 4 karena graf tidak memiliki sirkuit dengan panjang sama dengan 3.

Sehingga akan menjadi pertidaksamaan sebagai berikut :

$$4r \leq 2e \tag{8.}$$

Kemudian pertidaksamaan disederhanakan menjadi :

$$r \ \leq (\frac{1}{2}) e \tag{9.}$$

Kemudian, dengan menggunakan persamaan Euler, (1) untuk disubstitusikan pada nilai r menjadi :

$$e - v + 2 \ \leq (\frac{1}{2}) e \tag{10.}$$

Kemudian disederhanakan menjadi :

$$2e - 2v + 4 \leq e \tag{11.}$$

Sehingga pertidaksamaan akhir adalah :

$$e \leq 2v - 4 \tag{3.}$$

Dari penurunan rumus di atas, maka akan didapatkan hasil pertidaksamaan yang merupakan pertidaksamaan dari (3) dengan jumlah simpul lebih dari 2 dan tidak memiliki sirkuit dengan panjang 3.

Langkah selanjutnya, kedua pertidaksamaan akan dibuktikan dengan diimplementasikan kepada 4 contoh graf uji sebagai berikut :

Contoh Graf Uji 1:

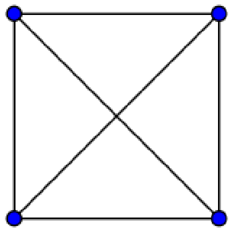


Fig. VI Graf Uji 1

Pada Graf Uji 1 akan didapatkan :

- Jumlah simpul (n) = 4
- Jumlah sisi (e) = 6
- Jumlah derajat tiap simpul (r) = 3
- Terdapat sirkuit dengan panjang 3

Menurut informasi di atas, diketahui bahwa untuk membuktikan keplanaran graf uji 1 adalah menggunakan rumus pertidaksamaan Euler pertama karena pada graf terdapat sirkuit dengan panjang 3 dan jumlah sisi (e) = 6.

Rumus pertidaksamaan Euler pertama ialah :

$$e \leq 3n - 6 \tag{2}$$

Kemudian substitusikan nilai e dengan jumlah sisi graf dan nilai n dengan jumlah simpul pada graf sehingga :

$$(6) \leq 3(4) - 6$$
$$6 \leq 12 - 6$$
$$\mathbf{6} \leq \mathbf{6}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Euler pertama, maka akan didapatkan nilai $\mathbf{6} \leq \mathbf{6}$ yang artinya benar. Oleh karena itu, kesimpulan dari solusi ini adalah pertidaksamaan bernilai benar maka **graf uji 1 adalah graf planar**.

Graf bidang hasil dari perubahan pada graf planar uji 1 adalah :

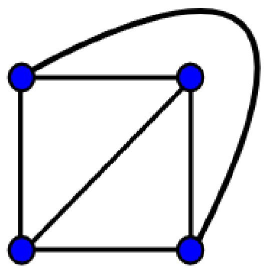


Fig. VII Graf Bidang Uji 1

Contoh Graf Uji 2:

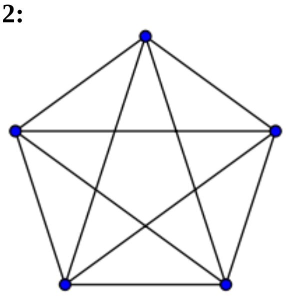


Fig. VIII Graf Uji 2

Pada Graf Uji 2 akan didapatkan :

- Jumlah simpul (n) = 5
- Jumlah sisi (e) = 10
- Jumlah derajat tiap simpul (r) = 4
- Terdapat sirkuit dengan panjang 3

Dalam membuktikan keplanaran graf uji 2, kita dapat menggunakan informasi di atas dengan menggunakan rumus pertidaksamaan Euler yang pertama karena pada graf terdapat sirkuit dengan panjang 3 dan jumlah sisi (e) = 10. Sebelumnya sudah diketahui bahwa uji graf 2 merupakan graf Kuratowski yang pertama dan merupakan graf non-planar, oleh karena itu hasil pengujian ini harus bernilai salah dan menyatakan bahwa graf adalah tidak planar.

Rumus pertidaksamaan Euler pertama ialah :

$$e \leq 3n - 6 \tag{2}$$

Kemudian substitusikan nilai e dengan jumlah sisi graf dan nilai n dengan jumlah simpul pada graf sehingga :

$$(10) \leq 3(5) - 6$$
$$10 \leq 15 - 6$$
$$\mathbf{10} \leq \mathbf{9}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Euler pertama, maka akan didapatkan nilai $\mathbf{10} \leq \mathbf{9}$ yang artinya tidak benar. Kesimpulan dari solusi ini adalah pertidaksamaan bernilai salah maka **graf uji 2 adalah graf tidak planar atau graf non-planar**.

Contoh Graf Uji 3:

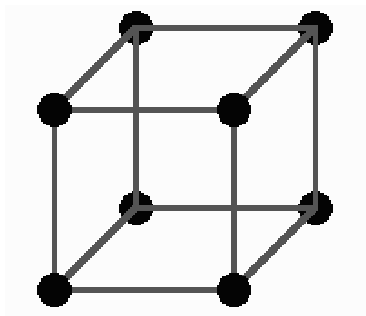


Fig. IX Graf Uji 3

Pada Graf Uji 3 akan didapatkan :

- Jumlah simpul (n) = 8
- Jumlah sisi (e) = 12
- Jumlah derajat tiap simpul (r) = 3
- Tidak terdapat sirkuit dengan panjang 3

Dari informasi di atas, untuk membuktikan keplanaran graf uji 3 adalah menggunakan rumus pertidaksamaan Euler yang kedua karena pada graf tidak terdapat sirkuit dengan panjang 3 dan jumlah sisi (n) = 8.

Rumus pertidaksamaan Euler kedua ialah :

$$e \leq 2n - 4 \tag{3}$$

Kemudian substitusikan nilai e dengan jumlah sisi graf dan nilai n dengan jumlah simpul pada graf sehingga :

$$(12) \leq 2(8) - 4$$
$$12 \leq 16 - 4$$
$$\mathbf{12 \leq 12}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Euler kedua, maka akan didapatkan nilai $\mathbf{12 \leq 12}$ yang artinya benar. Oleh karena itu, kesimpulan dari solusi ini adalah pertidaksamaan bernilai benar maka **graf uji 3 adalah graf planar**.

Graf bidang hasil dari perubahan pada graf planar uji 3 adalah :

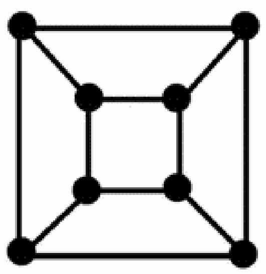


Fig. X Graf Bidang Uji 3

Contoh Graf Uji 4:

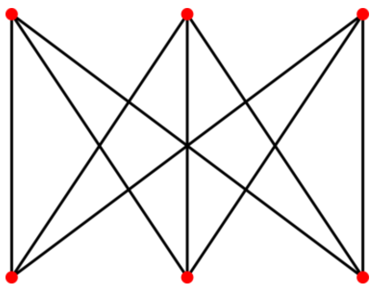


Fig. XI Graf Uji 4

Pada Graf Uji 4 akan didapatkan :

- Jumlah simpul (n) = 6
- Jumlah sisi (e) = 9
- Jumlah derajat tiap simpul (r) = 3
- Tidak terdapat sirkuit dengan panjang 3

Melalui informasi di atas, maka untuk membuktikan keplanaran graf uji 4 adalah menggunakan rumus pertidaksamaan Euler yang kedua karena pada graf tidak terdapat sirkuit dengan panjang 3 dan jumlah sisi (e) = 9. Sebelumnya sudah diketahui bahwa uji graf 2 merupakan graf Kuratowski yang kedua dan merupakan graf non-planar, oleh karena itu hasill pengujian ini haruslah bernilai salah dan menyatakan bahwa graf adalah tidak planar.

Rumus pertidaksamaan Euler kedua ialah :

$$e \leq 2n - 4 \qquad (3).$$

Kemudian substitusikan nilai e dengan jumlah sisi graf dan nilai n dengan jumlah simpul pada graf sehingga :

$$9 \leq 2(6) - 4$$
$$9 \leq 12 - 4$$
$$\mathbf{9 \leq 8}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Euler kedua, maka akan didapatkan nilai $\mathbf{9 \leq 8}$ yang artinya tidak benar. Oleh karena itu, kesimpulan dari solusi ini adalah pertidaksamaan bernilai salah maka **graf uji 4 adalah graf tidak planar atau graf non-planar**.

V. Kesimpulan

Graf terdapat 2 jenis, yaitu graf planar dan graf tidak planar atau non-planar. Suatu graf dapat dikatakan sebagai graf planar jika dapat digambarkan pada bidang datar tanpa ada dua ruas yang berpotongan. Melalui pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa dalam membahas semua graf planar dapat dibuktikan dengan pertidaksamaan Euler. Terdapat 2 rumus pertidaksamaan Euler, yang masing-masing persamaan dapat digunakan untuk graf dengan karakteristik tertentu. Baik graf planar maupun graf tidak planar (non-planar) dapat dibuktikan dengan rumus pertidaksamaan Euler. Penggunaan rumus pertidaksamaan Euler merupakan cara yang tepat dan dapat membuktikan keplanaran graf untuk berbagai jenis.

VI. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada seluruh pihak yang telah membantu penulis baik secara langsung dan tidak langsung selama pembuatan makalah ini.

References

[1] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung, 2009.

[2] J. A. Ruba, *Graf Planar*. Yogyakarta, 2007.

[3] J. Ginting, H. Banjarnahor, *Graf Petersen dengan Beberapa Sifat-sifat yang berkaitan dalam teori graf*. Medan, 2016.

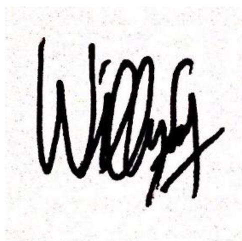
[4] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition*. New York: McGraw Hill, 2012.

[5] F. Firdaus, *Pengaplikasian Graf Planar pada Analisis Mesh*. Bandung, 2011.

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2017



Willy Santoso - 13517066