Aplikasi Himpunan dan Clique Graf Kompatibilitas dalam Pengaturan Lalu Lintas

T. Antra Oksidian Tafly / 13517020
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13517020@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Teknologi semakin berkembang, dan seiring berkembangnya teknologi, sarana transportasi semakin mudah didapat. Oleh karena itu pula, kemacetan lalu lintas semakin marak terjadi. Kemacetan tersebut seringkali terjadi di tempat penyebrangan (zebra cross) dan pertigaan atau perempatan. Maka dari itu, makalah ini akan membahas salah satu cara mengurangi kemacetan lalu lintas menggunakan teori himpunan dan graf.**

***Keywords*—Clique, Graf Kompatibilitas, Himpunan, Pengaturan Lalu Lintas.**

I. Pendahuluan

Di zaman yang modern ini, jalanan telah dipenuhi oleh alat-alat transportasi seperti mobil dan motor. Banyaknya alat transportasi tersebut, ditambah dengan banyaknya perempatan di jalanan, mengakibatkan banyaknya macet yang terjadi di kota-kota besar seperti Bandung.

Gambar 1. Kemacetan di dalam perempatan
Sumber : https://sinews.siam.org/Details-Page/mathematically-optimizing-traffic-lights-in-road-intersections

Sebenarnya banyak sekali cara mengatasi kemacetan lalu lintas tersebut. Salah satunya adalah pengaturan lalu lintas yang optimal. Dalam makalah ini, definisi optimal adalah jumlah kendaraan atau pejalan kaki yang harus menunggu dalam macet haruslah minimal. Jika dengan tenaga manusia, hal ini dapat dengan mudah dicapai karena tenaga manusia tersebut dapat menilai arus kendaraan mana yang didahulukan untuk mengurangi kemacetan. Sayangnya, tenaga kerja manusia tersebut tidaklah murah dan efisien dalam era teknologi ini.

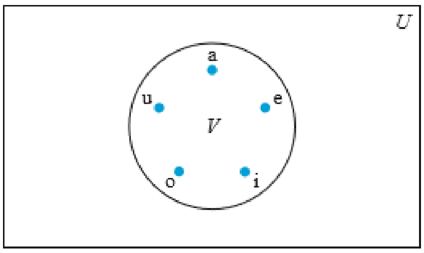
Oleh karena itu, dibuatlah system pengaturan lalu lintas dengan lampu lalu lintas, tetapi dengan lampu lalu lintas kita hanya dapat menentukan waktu pergantian lampu secara konstan. Maka dari itu diperlukan algoritma yang menentukan waktu pergantian lampu yang tepat agar jumlah kendaraan yang harus menunggu lampu merah dapat diminimalisir. Dengan teori himpunan dan graf yang telah dipelajari di matematika diskrit, waktu yang tepat tersebut dapat ditemukan.

Selain teori graf dan himpunan, makalah ini juga akan menggunakan graf kompatibilitas, teori clique dan system pertidaksamaan sederhana. Makalah ini akan menjelaskan graf kompatibilitas, clique dan maximum clique.

II. Teori Dasar

A. Himpunan

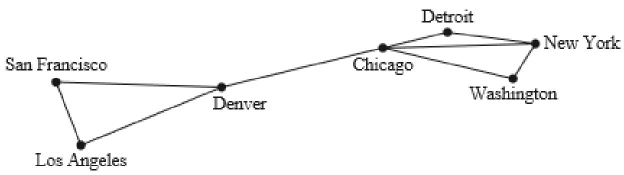
Himpunan, secara matematis, didefinisikan sebagai kelompok objek-objek yang tidak berurutan. Objek-objek tersebut disebut sebagai anggota himpunan. Contoh dari sebuah himpunan salah satunya adalah himpunan U, dimana U adalah himpunan semua objek yang ada, maka dari itu Himpunan U disebut himpunan universal. Contoh lain yang dapat dilihat adalah V, dimana V merupakan himpunan huruf-huruf vokal, maka didapatkan anggota dari V tersebut adalah huruf a, e, i, o, u. Sebuah himpunan dapat digambarkan dalam sebuah diagram venn. Diagram venn merupakan sebuah cara merepresentasikan himpunan dengan menggambarkan himpunan sebagai sebuah lingkaran dengan anggota-anggotanya didalam lingkaran tersebut. Contoh diagram venn himpunan V:



Gambar 2. Diagram venn himpunan V
Sumber : Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Ed. -Rosen

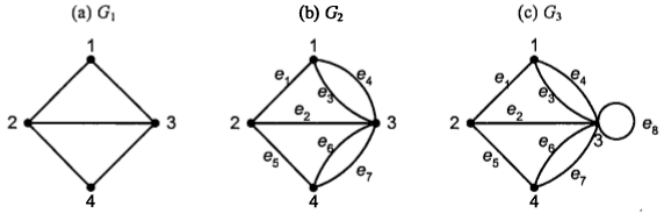
B. Graf

Secara matematis, Graf didefinisikan sebagai himpunan (V,G) dimana V (*vertices* atau *nodes*) adalah simpul-simpul yang dihubungkan oleh sisi-sisi E (*edges* atau *arcs*). V tersebut tidak boleh kosong dan setiap E menguhubungkan 2 titik yang disebut dengan titik ujung (kedua titik tersebut boleh sama), E boleh kosong. Graf dengan jumlah V tidak terhingga biasa disebut dengan graf tidak terhingga. Walau begitu, makalah ini hanya akan membahas graf terbatas (dimana jumlah V terbatas).



Gambar 3. Graf terbatas yang menggambarkan jaringan computer
Sumber : Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Ed. -Rosen

Graf juga terbagi menjadi beberapa jenis sesuai dengan karakteristik sisi yang terdapat dalam graf. Graf dengan dua titik memiliki dua atau lebih sisi yang menghubungkan mereka disebut graf ganda, graf yang memiliki sebuah sisi yang kedua ujungnya adalah titik yang sama disebut dengan graf semu, graf yang semua sisinya menghubungkan dua titik yang berbeda dan semua pasang titik maksimal memiliki satu sisi yang menghubungkan mereka disebut dengan graf sederhana. Makalah ini mendefinisikan graf sederhana sebagai graf.



Gambar 4. Tiga buah graf (a) graf sederhana, (b) graf ganda, (c) graf semu
Sumber : Matematika Diskrit, Edisi 3, -Rinaldi Munir

Selain dari karakteristik sisi, graf juga bias dibedakan jenisnya berdasarkan apakah sisinya memiliki arah atau tidak, graf dengan sisi yang memiliki arah disebut juga sebagai graf berarah, sedangkan graf dimana semua sisinya tidak memiliki arah disebut juga sebagai graf tidak berarah.

C. Terminologi dalam Himpunan

Dalam makalah ini, ada beberapa istilah himpunan yang akan dibahas yaitu:

1. Enumerasi

Jika terdapat sebuah himpunan yang tidak terlalu besar sehingga semua anggotanya dapat dinyatakan, himpunan tersebut dapat dienumerasi. Enumerasi adalah salah satu cara menyatakan sebuah himpunan selain menggunakan diagram venn. Contoh dari sebuah enumerasi adalah enumerasi himpunan V dari Gambar 2:

$$V = \{a, i, u, e, o\}$$

Dari enumerasi tersebut dapat diketahui a merupakan anggota dari V, maka dapat dinyatakan $a \in V$, dengan $\in$ menyatakan sebuah keanggotaan.

2. Himpunan bagian (Subset)

Sebuah himpunan dapat merupakan bagian dari himpunan lain jika semua anggota yang ada di dalam himpunan tersebut terdapat di himpunan lain. Himpunan ini dapat dikatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan lain. Contoh dari himpunan bagian adalah himpunan V dari Gambar 2 merupakan himpunan bagian dari himpunan universal U.

3. Himpunan yang sama (Equal)

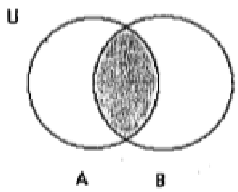
Sebuah himpunan dikatakan sama dengan himpunan lain jika semua anggota himpunan tersebut adalah anggota dari anggota himpunan lain dan juga sebaliknya. Himpunan yang sama berbeda dengan sebuah himpunan bagian dimana semua anggota dalam kedua himpunan tersebut adalah anggota kedua himpunan tersebut.

4. Himpunan saling lepas (Disjoint)

Kedua himpunan dikatakan saling lepas (disjoint) jika tidak ada objek yang merupakan anggota kedua himpunan tersebut secara bersamaan. Contoh dari sebuah himpunan saling lepas adalah kedua himpunan C dan V, dimana C merupakan himpunan huruf konsonan dan V merupakan himpunan huruf vokal. Kedua himpunan tersebut saling lepas karena tidak ada huruf yang merupakan huruf vocal dan konsonan. Himpunan saling lepas dapat dinyatakan dalam notasi sebagai berikut: C//V.

5. Irisan (Intersection)

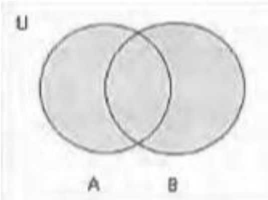
Sebuah irisan merupakan sebuah operasi terhadap dua himpunan atau lebih yang menghasilkan sebuah himpunan. Sebuah irisan dari himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang mana semua anggotanya merupakan anggota himpunan A dan himpunan B. Operasi irisan dapat dinyatakan sebagai berikut: $A \cap B$.



Gambar 5 : Irisan Himpunan A dan B
Sumber : Matematika Diskrit, Edisi 3, -Rinaldi Munir

6. Gabungan (Union)

Sebuah gabungan merupakan sebuah operasi terhadap dua himpunan atau lebih yang menghasilkan sebuah himpunan. Sebuah gabungan dari himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang mana semua anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B. Operasi gabungan dapat dinyatakan sebagai berikut: $A \cup B$.



Gambar 6 : Gabungan Himpunan A dan B
Sumber : Matematika Diskrit, Edisi 3, -Rinaldi Munir

7. Himpunan Kosong

Himpunan kosong merupakan himpunan yang memiliki jumlah anggota nol. Tidak ada objek yang menjadi anggota dari sebuah himpunan kosong.

8. Himpunan Universal

Himpunan universal merupakan kebalikan dari himpunan kosong, dimana semua objek merupakan anggota dari himpunan universal. Himpunan universal dinyatakan sebagai U.

9. Komplemen

Komplemen dari suatu himpunan A adalah sebuah himpunan dimana anggota dari himpunan tersebut adalah anggota himpunan universal U dan bukan merupakan anggota dari himpunan A. Komplemen dinotasikan dengan menambahkan garis di huruf yang melambangkan himpunan tersebut. Contoh:$\bar{A}$

10. Selisih

Selisih merupakan sebuah operasi terhadap dua atau lebih himpunan. Selisih dari dua himpunan A dan B merupakan himpunan dimana semua anggotanya merupakan anggota himpunan A tetapi bukan anggota himpunan B. Selisih dilambangkan oleh tanda kurang (-). Contoh : $A - B$ dengan $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{2,3,4\}$ adalah $C = \{1,5\}$.

11. Beda Setangkup (Symmetric difference)

Beda setangkup atau symmetric difference merupakan sebuah operasi terhadap dua atau lebih himpunan. Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan anggota himpunan A atau B tetapi tidak keduanya. Contoh : Beda setangkup dari $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{2,3,4\}$ adalah $C = \{1,2,4,5\}$.

12. Perkalian Kartesian (Cartesian Product)

Perkalian kartesian merupakan sebuah operasi terhadap dua atau lebih himpunan. Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (ordered pairs) yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B. Perkalian kartesian dilambangkan dengan tanda kali (×). Contoh dari suatu perkalian kartesian dua himpunan adalah: $A \times B$ dimana $A = \{2,3,4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ maka $A \times B = \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$.

D. Terminologi dalam Graf

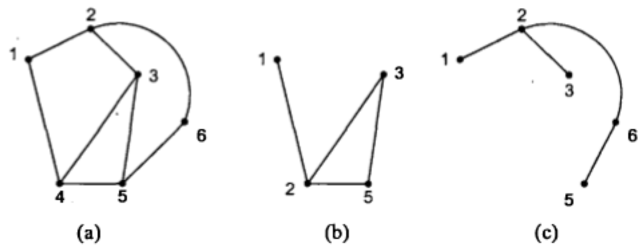
Dalam makalah ini, ada beberapa istilah graf yang perlu dibahas yaitu:

1. Ketetanggaan (Adjacency)

Dua buah simpul pada graf tidak berarah G dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi yang sama. Sebagai contoh, pada graf G1 di Gambar 4, simpul 1 dan 3 dikatakan bertetanggaan, dengan 2 adalah tetangga dari 1 dan juga sebaliknya.

2. Upagraf (Subgraph)

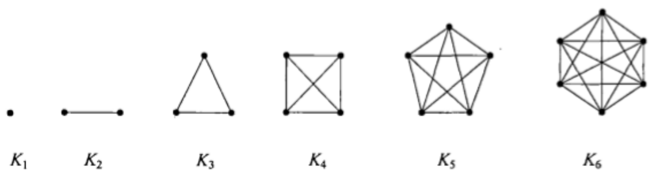
Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graf. G1 = (V1. E1) adalah upagraf dari G jika semua anggota V1 merupakan anggota V dan semua anggota E1 adalah anggota dari E. Salah satu contoh dari upagraf adalah sebagai berikut:



Gambar 7. (a) Graf G1, (b) Upagraf dari G1, (c) Komplemen dari upagraf (b)
Sumber : Matematika Diskrit, Edisi 3, -Rinaldi Munir

3. Graf Lengkap

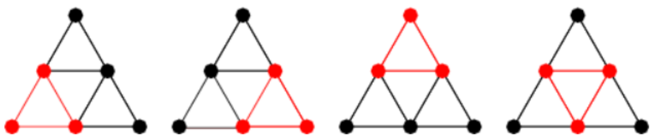
Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi dengan simpul-simpul lainnya (tidak ada dua simpul yang tidak terhubung). Graf lengkap dengan N buah simpul dilambangkan dengan K_n.



Gambar 8. Graf lengkap, dari K_1 sampai K_6
Sumber : Matematika Diskrit, Edisi 3, -Rinaldi Munir

4. Clique

Sebuah clique dari graf G adalah sebuah upagraf lengkap dari graf G (dimana setiap simpul dalam upagraf terhubung dengan semua simpul yang lain). Graf G dapat memiliki lebih dari satu clique.



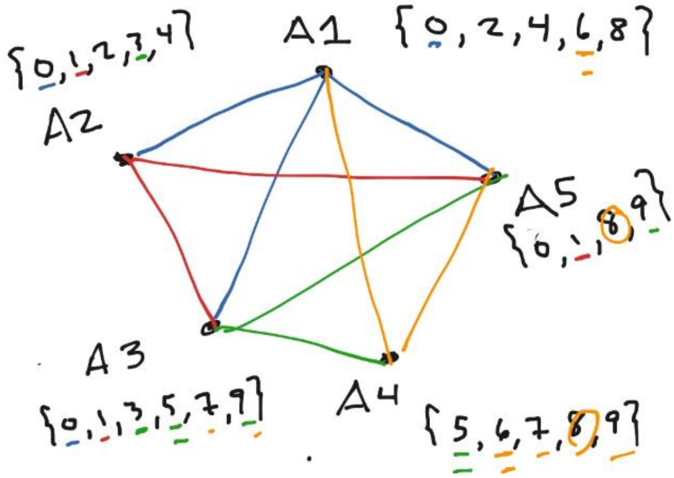
Gambar 9. Beberapa clique dari sebuah graf
Sumber : http://mathworld.wolfram.com/Clique.html

Sebuah clique yang memiliki jumlah simpul terbanyak disebut dengan clique maximum. Maximal clique adalah sebuah clique yang tidak bias lagi diperluas dengan menambahkan satu lagi simpul yang terdapat di graf asalnya.

Teori clique dalam graf berguna dalam pewarnaan graf dan aplikasi lainnya.

5. Graf Irisan

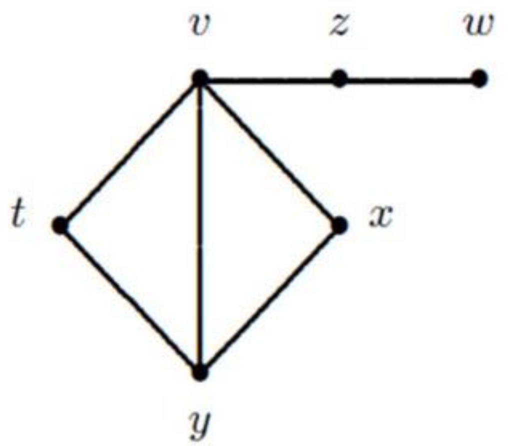
Graf irisan adalah graf yang merepresentasikan saling lepasnya himpunan. Dalam graf irisan, simpul-simpul yang terdapat dalam sebuah graf melambangkan sebuah himpunan, dengan aturan dua simpul hanya berhubungan jika dan hanya jika hasil irisan kedua himpunan tersebut bukan merupakan himpunan kosong (himpunan tersebut beririsan).



Gambar 10. Sebuah graf irisan, semua simpul melambangkan sebuah himpunan dan hanya akan terhubung jika kedua himpunan beririsan.
Sumber : https://www.showme.com/sh/?h=Wxqnhrc

III. GRAF KOMPATIBILITAS

Dalam makalah ini, graf kompatibilitas didefinisikan sebagai sebuah graf yang merepresentasikan hubungan beberapa objek. Berbeda dengan graph yang digunakan dalam pewarnaan graf dimana dua simpul yang terhubung harus dikelompokkan dalam kelompok atau himpunan yang berbeda, dalam graf kompatibilitas dua simpul yang tidak terhubung harus berada dalam kelompok yang berbeda. Sebagai contoh, jika terdapat compatibility graph sebagai berikut:

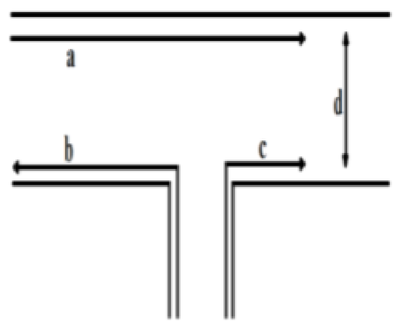


Gambar 11. Sebuah graf kompatibilitas G
Sumber : Traffic Flow and Circular-arc Graph, -Harold Parker

Graf G tersebut merepresentasikan himpunan sebagai berikut: $A = \{t, v, y\}$, $B = \{v, x, y\}$, $C = \{v, z\}$, $D = \{w, z\}$. Keempat himpunan tersebut dapat diperoleh dengan mencari semua clique yang ada dalam graf G. Setiap clique merepresentasikan sebuah himpunan yang berbeda.

IV. APLIKASI HIMPUNAN DAN GRAF KOMPATIBILITAS DALAM PENGATURAN LALU LINTAS

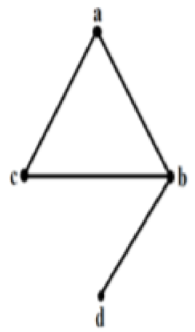
Misalkan terdapat sebuah pertigaan dimana arus lalu lintas berlaku pada gambar berikut:



Gambar 12. Sebuah pertigaan di sebuah balai kota
Sumber : Application of Graph Theory in Traffic Management, Darshankumar D.

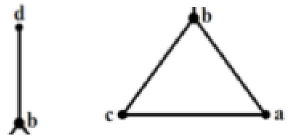
Pada Gambar 12, panah-panah yang ada di gambar merepresentasikan suatu arus kendaraan atau arus pejalan kaki tertentu. Dengan adanya sebuah lampu lalu lintas yang akan mengatur lalu lintas tersebut. Dimisalkan pada panah a terdapat arus lalu lintas yang akan lurus menyusuri pertigaan. Panah b dan c adalah arus kendaraan yang akan berbelok kiri dan kekanan. Panah d adalah arus pejalan kaki yang diasumsikan akan terus mengalir. Dalam kasus ini, ada beberapa arus yang dapat mengalir secara bersamaan (kompatibel). Contohnya arus a dan b dapat mengalir bersamaan (kompatibel), tetapi arus c dan d tidak, karena keduanya akan bertabrakan. Kompatibilitas arus itulah yang akan menentukan waktu yang tepat untuk pergantian lampu lalu lintas. Jadi bisa dibuat agar pada saat lampu lalu lintas menunjukkan lampu hijau kepada arus a, arus b juga akan mendapatkan lampu hijau.

Misalkan satu siklus adalah durasi lampu merah ditambah dengan durasi lampu hijau, dan diasumsikan satu siklus bernilai dua menit. Bisa dibuat sebuah graf G dengan simpul-simpulnya merepresentasikan semua arus lalu lintas yang ada pada Gambar 12, dengan simpul hanya akan berhubungan dengan simpul lain jika kedua arus yang direpresentasikan oleh simpul tersebut kompatibel (bias mengalir secara bersamaan). Graf G yang didapatkan adalah sebagai berikut:



Gambar 13. Graf kompatibilitas G
Sumber : Application of Graph Theory in Traffic Management, Darshankumar D.

Menentukan waktu pergantian dan durasi sebelum pergantian lampu lalu lintas berikutnya yang efisien dapat diperoleh dengan menentukan jumlah arus maksimum yang dapat berjalan secara bersamaan. Dari graf kompatibilitas G, dapat ditentukan jumlah arus maksimum yang dapat berjalan secara bersamaan dengan menentukan maximal clique dari graph G. Karena dalam sebuah clique semua simpul, yang dalam graf merepresentasikan arus, terhubung, maka semua arus yang ada dalam clique dapat berjalan secara bersamaan. Dari graf G kita dapat menentukan clique yang ada:



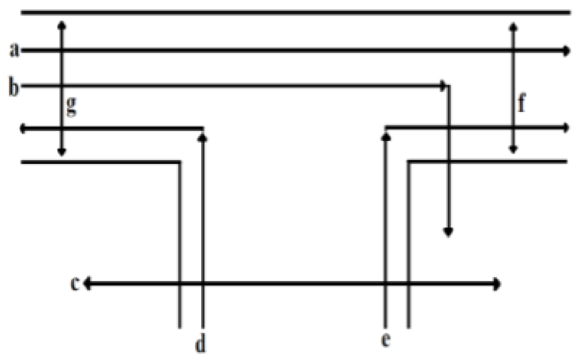
Gambar 14. Clique dari graf G yang berupa K2 (Kiri) dan K3 (Kanan).
Sumber : Application of Graph Theory in Traffic Management, Darshankumar D.

Kemangkusan siklus lampu lalu lintas pada makalah ini didasari oleh total waktu yang harus ditunggu oleh setiap arus lalu lintas saat mereka diberhentikan oleh lampu merah. Semakin sedikit total waktu tersebut, semakin mangkus siklus yang dibuat.

Sesuai dengan teori yang telah disebutkan sebelumnya, semua arus dalam satu clique akan selalu berjalan bersamaan. Karena hasil pencarian clique menghasilkan dua clique, maka fase yang dibutuhkan hanyalah dua fase dalam satu siklus. Dalam fase 1, arus yang ada pada K_1, $K_1 = \{a, b, c\}$, mendapatkan lampu hijau, sedangkan dalam fase 2, arus yang ada pada K_2, $K_2 = \{b, d\}$, mendapatkan lampu hijau. Misalkan kita menaruh waktu lampu hijau D_i untuk setiap K_i. Maka tujuan yang ingin dicapai adalah menentukan setiap D_i agar total waktu menunggu lampu merah minimal. Lalu, kita juga dapat menganggap bahwa waktu minimal lampu hijau yang diberikan adalah 20 detik. Arus kendaraan a mendapat lampu merah saat arus di K_2 mendapatkan lampu hijau, maka waktu menunggu lampu merah arus kendaraan a adalah D_2. Hal yang sama juga berlaku untuk arus lalu lintas c dan d, yang mana waktu menunggu lampu merah masing-masing adalah D_2 dan D_1.

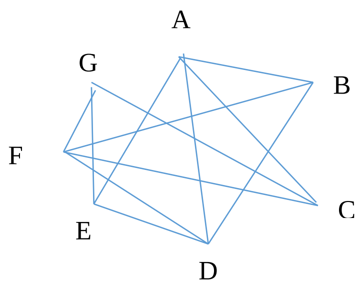
Maka dari itu, didapatkan total waktu menunggu lampu merah untuk semua arus adalah $Z = 2D_2 + D_1$. Tujuan yang ingin dicapai adalah menemukan nilai Z terkecil dengan syarat $D_1 \geq 20$ dan $D_2 \geq 20$ (waktu minimum lampu hijau), serta $D_1 + D_2 = 120$ (waktu total satu siklus). Maka, solusi optimal yang didapatkan untuk kasus ini adalah $D_1 = 100$ dan $D_2 = 20$. $Z = 140$.

Contoh lain yang lebih rumit adalah sebagai berikut:



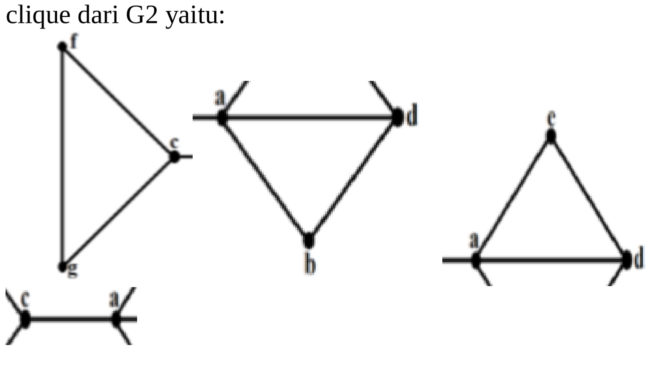
Gambar 15. Sebuah pertigaan dengan arus lalu lintas tertentu
Sumber : Application of Graph Theory in Traffic Management, Darshankumar D.

Dari Gambar 15 tersebut dapat diperoleh sebuah graf kompatibilitas G2 sebagai berikut:



Gambar 16. Graf kompatibilitas G2
Sumber : Dibuat oleh penulis

Lalu dari graf kompatibilitas G2 dapat diperoleh maximum clique dari G2 yaitu:



Gambar 17. Clique dari graf G2
Sumber : Application of Graph Theory in Traffic Management, Darshankumar D.

Didapatkan maximal clique adalah : $K_1 = \{a, e, d\}$, $K_2 = \{a, b, d\}$, $K_3 = \{a, c\}$, $K_4 = \{c, f, g\}$. Maka dengan syarat seperti sebelumnya didapatkan: $D_1 = 80$, $D_2 = 20$, $D_3 = 0$, $D_4 = 20$. Dengan $Z = 460$ ($D_3 = 0$ karena arus a dan c mendapat lampu hijau di fase lainnya).

V. KESIMPULAN

Aplikasi Graf dan clique dari sebuah graf tidak hanya sampai pemetaan jarak terdekat ataupun pengelompokkan berdasarkan warna saja. Dengan menggabungkan teori graf dengan teori himpunan serta memperluasnya. Masalah yang rumit seperti kemacetan dan pengaturan lalu lintas pun dapat diselesaikan menggunakan matematika diskrit.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmatnya, penulis bisa menuntaskan tugas makalah ini. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada kedua orangtua penulis yang telah mendoakan akan kesuksesan penulis dan turut selalu mendukung penulis. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada Ibu Harlili selaku dosen mata kuliah Matematika Diskrit, yang selama ini telah memberikan ilmu Matematika Diskrit yang menjadi dasar dalam pengerjaan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Bapak Judhi Santoso yang turut serta merealisasikan mata kuliah Matematika Diskrit ini.

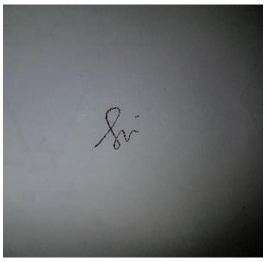
REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi. Matematika Diskrit, Bandung: Informatika, 2010, edisi ketiga.
[2] Rosen, K. H. Discrete Mathematics and Its Application. New York: McGraw-Hill, 2012, edisi ketujuh.
[3] Darshankumar, D. Application of Graph Theory in Traffic Management. India : Parul Institute of Technology, Juni 2014, volume 3, issue 12.
[4] http://mathworld.wolfram.com/Clique.html. Diakses 8 Desember 2017.
[5] https://www.showme.com/sh/?h=Wxqnhrc. Diakses 8 Desember 2017.
[6] https://sinews.siam.org/Details-Page/mathematically-optimizing-traffic-lights-in-road-intersections. Diakses 8 Desember 2017.
[7] http://slideplayer.com/slide/4610993/ Diakses 8 Desember 2017

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2018



T. Antra Oksidian Tafly
13517020