Aplikasi Teorema Kuratowski dalam Perancangan Rangkaian Listrik

Hoshea 10216058[1]
Program Studi Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*hoshea446@gmail.com*

***Abstrak*—Elektronika merupakan sesuatu hal yang sangat penting di dalam perkembangan dunia teknologi. Oleh karena itu banyak orang maupun perusahaan yang bergerak dalam bidang ini. Selain itu, banyak juga yang menjadikan perancangan elektronika sebagai hobi. Namun, dalam perancangan elektronika ini banyak berbagai kendala seiring semakin kompleksnya struktur rangkaian yang perlu digunakan. Salah satu kendala yang biasa terjadi dalam perancangan rangkaian elektronika ini adalah rangkaian yang bersilangan. Rangkaian yang bersilangan ini merupakan kesalahan yang biasa terjadi pada perancangan elektronika. Namun, kesalahan ini dapat menyebabkan hal yang fatal. Salah satunya dapat menyebabkan kerusakan komponen elektronika saat perancangan, bahkan satu sistem itu sendiri. Untuk mencari *error* pada rangkaian yang sederhana masih cukup mudah tetapi masalahnya adalah jika rangkaian tersebut kompleks. Oleh karena itu, teorema keplanaran graf Kuratowski merupakan salah satu dari permasalahan tersebut.**

***Kata Kunci*—Graf, Graf Planar, Teorema Kuratowski, Isomorfik.**

I. PENDAHULUAN

Elektronika merupakan sesuatu yang vital dalam perkembangan teknologi serta mempermudah pekerjaan manusia sehingga di era ini diperlukan pengetahuan tentang elektronika. Di dalam elektronika, kita ditekankan untuk memahami konsep desain rangkaian elektronika. Namun, dalam perancangan rangkaian elektronika ini, hal tersebut tidaklah mudah karena seringkali masih banyak kesalahan dalam merangkai. Kesalahan umum yang sering dilakukan adalah membuat rangkaian listrik yang jalurnya bertabrakan. Rangkaian listrik yang jalurnya bertabrakan ini dapat membuat rangkaian yang kita buat ini menjadi *short* atau membuat arus pendek sehingga dapat membuat komponen yang kita gunakan rusak. Oleh karena itu, dalam perancangan rangkaian listrik ini kita memerlukan desain yang tidak saling bersilangan. Agar rangkaian yang kita inginkan tidak bersilangan, maka konsep graf planar kuratowski dapat menyelesaikan permasalahan ini.

II. LANDASAN TEORI

A. Teori Graf

1. Definisi Graf

Graf merupakan himpunan pasangan simpul dan sisi (V,E), dituliskan $G = (V, E)$ dimana V (*vertices*) adalah himpunan simpul yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang anggotanya menghubungkan anggota simpul tersebut.

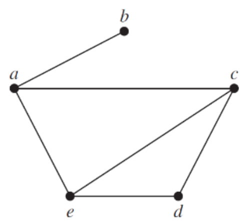
2. Jenis-jenis Graf

Graf itu sendiri dapat dikelompokkan berdasarkan ada atau tidaknya gelang atau sisi ganda, gelang merupakan sisi yang menghubungkan simpulnya sendiri sehingga membentuk sebuah *loop* sedangkan sisi ganda merupakan dua buah sisi yang menghubungkan simpul yang sama. Oleh karena pengelompokkan tersebut, graf dibagi ke dalam dua kelompok, yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana.

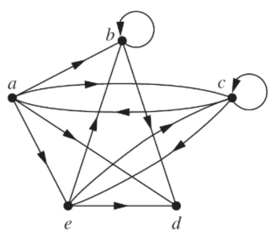
a. Graf Sederhana
Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki simpul ganda dan simpul gelang.

b. Graf Tidak Sederhana
Graf ini merupakan graf yang memiliki simpul ganda maupun simpul ganda.

Contoh kedua graf tersebut ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 1. Graf Sederhana (Sumber: Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Application 7th Edition*)



Gambar 2. Graf Tidak Sederhana (Sumber: Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Application 7th Edition*)

Sisi pada graf dapat pula memiliki orientasi arah, oleh karena itu graf juga dapat dikelompokkan menjadi dua berdasarkan ada atau tidak arahnya.

a. Graf Tidak Berarah
Graf ini merupakan graf yang tidak memiliki arah. Graf seperti ini ditunjukkan dengan tidak adanya arah panah. Contohnya terdapat pada gambar 1.

b. Graf Berarah
Graf ini merupakan graf yang memiliki arah sehingga jika dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan anggota dari sebuah himpunan simpul dan sisi (v, e) tidak akan sama dengan (e, v). Contohnya diberikan pada gambar 2.

3. Terminologi Dasar pada Graf.
Terdapat berbagai istilah dasar pada teori graf yang digunakan pada topik ini, diantaranya adalah sebagai berikut.

a. Upagraf (*Subgraph)*
Upagraf, dinotasikan $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan graf yang dibentuk dari graf sebelumnya sehingga himpunan simpul (V_1) dan himpunan sisi (E_1) merupakan sub himpunan dari himpunan simpul dan sisi graf sebelumnya.

b. Bertetangga
Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga apabila kedua simpulnya terhubung langsung dengan sisi.

c. Bersisian
Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan v jika berlaku $e = (u, v)$.

d. Derajat
Derajat dari suatu simpul, dinotasikan dengan $d(v)$, merupakan jumlah sisi yang bersisian pada simpul yang bersangkutan.

e. Simpul Terpencil
Simpul terpencil merupakan simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya.

f. Graf Kosong
Graf Kosong merupakan graf yang himpunan sisinya kosong atau dengan kata lain graf yang tidak mempunyai sisi.

g. Lintasan (*Path*)
Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan $v_n$di dalam graf G adalah barisan selang-seling antara simpul-simpul dengan sisi-sisi yang berbentuk v_0,e_1, v_1,e_2,…,v_{n-1}, e_n v_n sehingga $e_1 = (v_0,v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$,…, $e_n = (v_n, e_{n-1})$ adalah sisi-sisi dari graf G. [1]

h. Sirkuit
Sirkui merupakan lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

i. Terhubung
Sebuah graf dikatakan terhubung jika semua lintasannya dapat dilewati.

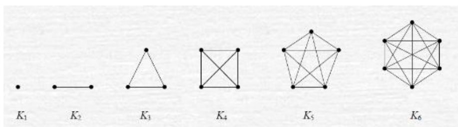
j. Upagraf Merentang
Sebuah graf dikatakan sebagai upagraf merentang jika upagraf ini mengandung semua simpul dari graf induk.

k. *Cut Set*
Cut Set adalah himpunan sisi yang jika dibuang dapat menyebabkan graf tersebut tidak terhubung.

l. Graf Berbobot
Graf yang setiap sisinya diberi sebuah nilai disebut graf berbobot.

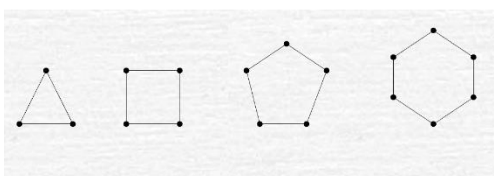
4. Beberapa Graf Khusus

a. Graf Lengkap
Graf lengkap merupakan graf sederhana yang memiliki sisi ke semua simpulnya. Artinya setiap simpulnya bertetanggan ke semua simpul lainnya kecuali dirinya sendiri.



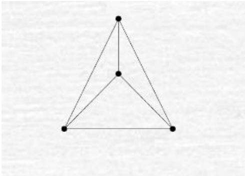
Gambar 3. Contoh Graf Lengkap. Sumber: (Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*)

b. Graf Lingkaran
Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang masing-masing simpulnya berderajat 2.



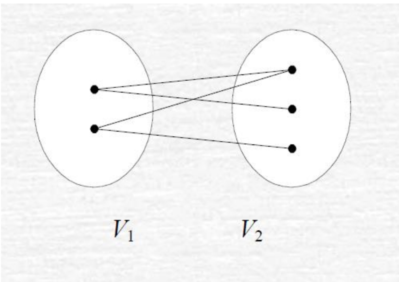
Gambar 4. Contoh Graf Lingkaran Sumber: (Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*)

c. Graf Teratur
Graf yang setiap simpulnya memiliki derajat simpulnya sama.



Gambar 5. Contoh Graf Teratur. Sumber: (Rinaldi Munir, Matematika Diskrit)

d. Graf Bipartite
Graf Bipartite merupakan sebuah graf yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga masing-masing sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 ke sebuah simpul pada V_2. Dinotasikan sebagai $G(V_1, V_2)$. Contohnya dapat dilihat pada di gambar di bawah ini.

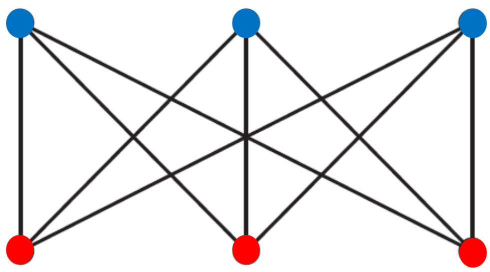


Gambar 6. Graf Bipartite. Sumber: (Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*)

Untuk dapat menentukan apakah sebuah graf itu bipartite dapat kita gunakan teorema berikut.

Sebuah graf sederhana merupakan bipartite jika dan hanya jika dimungkinkan untuk memasang satu dari dua warna yang berbeda pada tiap simpul graf sehingga tidak ada dua simpul yang bertetanggaan memiliki dua warna yang sama.[2]

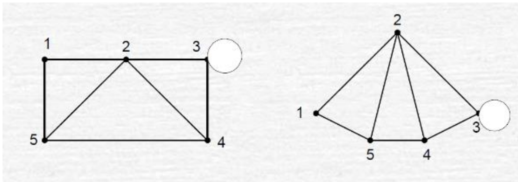
Contohnya adalah sebagai berikut.



Gambar 7. Graf Bipartite Lengkap. Sumber: (Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Application 7th Edition)

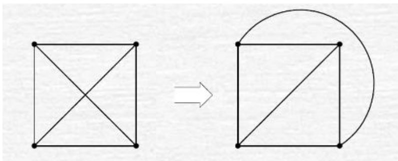
Pada gambar ini jelas bahwa kedua simpul yang saling bertetanggaan tidak akan memiliki warna yang sama.

5. Graf Isomorfik
Suatu graf dikatakan isomorfik jika terdapat dua graf yang sama tetapi cara penggambaran geometrinya berbeda. Kemudian syarat agar kedua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik adalah terdapat korespondensi satu-satu antara kedua simpul dan kedua sisinya sehingga hubungans kebersisiannya selalu terjaga. Misalnya sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden pada G_2 harus bersisian dengan simpul u' dan v' yang ada pada G_2.



Gambar 8. Graf Isomorfik. Sumber: (Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*)

6. Graf Planar
Graf planar merupakan graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisinya yang tidak saling memotong.



Gambar 9. Graf Planar. Sumber: (Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*)

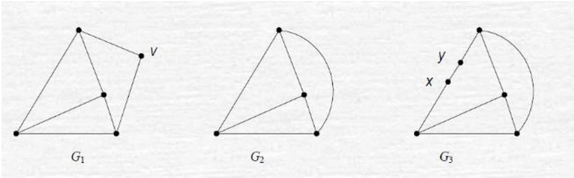
B. Teorema Graf Planar
Untuk menentukan keplanaran suatu graf, digunakan teorema yang bernama teorema Kuratowski.

Teorema Kuratowski merupakan teorema yang dapat menentukan keplanaran suatu graf. Menurut teorema ini, terdapat suatu aturan bagaimana suatu graf dikatakan planar. Namun, sebelum ke aturan tersebut, akan dijelaskan terlebih dahulu ciri-ciri graf Kuratowski.

Sifat graf Kuratowski adalah sebagai berikut:
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur
2. Kedua graf kuratowski adalah tidak planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski ini menyebabkan graf tersebut menjadi planar

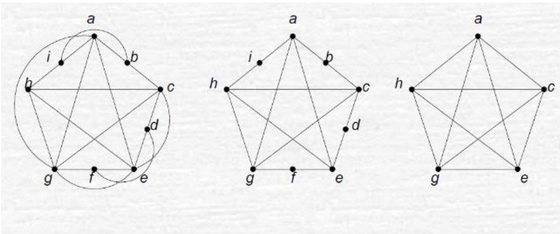
Salah satu contoh graf Kuratowski di sini adalah graf lengkap dan graf bipartite seperti pada gambar 7.

Menurut teorema Kuratowski, suatu graf, katakan graf G, bersifat planar jika dan hanya jika graf ini tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik dengan salah satu dari keduanya. Maksud dari graf isomorfik tersebut dapat diperhatikan pada gambar di bawah.



Gambar 10. Graf yang Homeomorfik. Sumber: (Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*)

Untuk lebih jelasnya seperti apa graf yang berisomorfik dengan graf Kuratowski, dapat diperhatikan contoh di bawah ini.

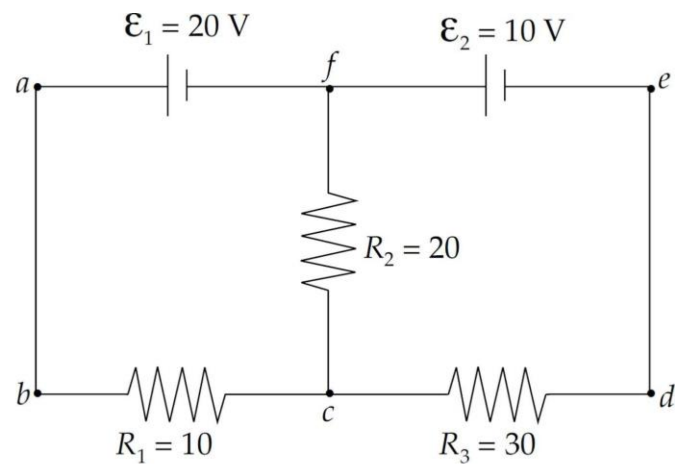


Gambar 11. Graf Non-Planar. Sumber: (Rinaldi Munir, Matematika Diskrit)

Graf yang berada di sebelah kiri merupakan graf non planar karena dari graf ini dapat diperoleh upagraf seperti pada gambar yang ditengah yang homemorfik dengan graf Kuratowski (gambar di sebelah kanan).

III. APLIKASI TEOREMA KURATOWSKI DALAM PERANCANGAN RANGKAIAN LISTRIK

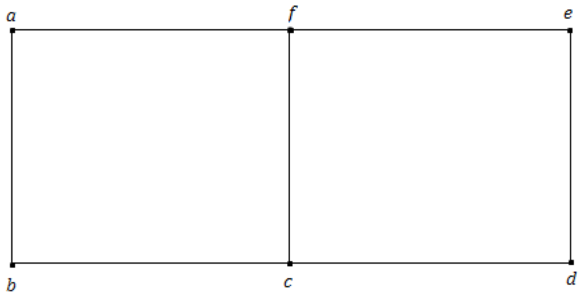
Sebuah skematik rangkaian listrik dapat dianggap sebagai graf karena skematik ini terdiri atas simpul dan sisi. Untuk lebih jelasnya, contohnya adalah sebagai berikut.



Gambar 12. Rangkaian Listrik Sederhana. Sumber: (https://www.quora.com/What-is-difference-between-a-node-and-junction-in-electrical-circuits)

Terlihat pada gambar di atas bahwa rangkaian ini memiliki 6 buah simpul, yaitu a, b, c, d, e, f serta masing-masing simpul ini disambungkan oleh sebuah sisi, yaitu sisi (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, c), serta (a, f). Oleh karena itu, suatu skematik rangkaian listrik dapat dimodelkan dengan graf. Dengan model graf ini, kita dapat memastikan apakah rangkaian ini bersilangan atau tidak. Untuk memeriksa apakah rangkaian ini bersilangan atau tidak, kita akan gunakan teorema Kuratowski tersebut.

Pertama kita ubah dulu rangkaian skematik yang tersedia menjadi model graf seperti di bawah ini.

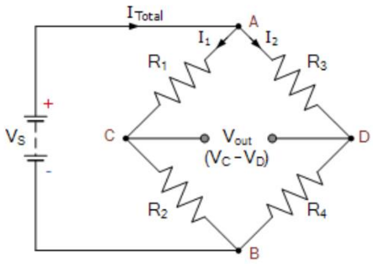


Gambar 13. Model Graf Rangkaian Listrik pada Gambar 9

Kemudian kita periksa upagraf dari model graf ini. Jika graf ini memiliki upagraf yang isomorfik maupun homeomorfik dengan graf Kuratowski maka graf ini bukanlah graf planar. Jika bukan graf planar maka dapat kita simpulkan rangkaian ini masih menyebabkan *short*. Tetapi jika graf ini tidak memiliki upagraf yang isomorfik maupun homeomorfik dengan graf Kuratowski maka graf ini adalah graf planar sehingga dapat kita simpulkan rangkaian listrik ini tidak akan mengakibatkan *short*.

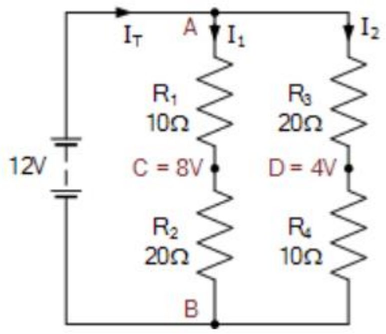
Pada graf yang terdapat pada gambar 10. Kita dapat lihat bahwa graf ini tidak memiliki upagraf Kuratowski. Jadi dapat disimpulkan desain rangkaian ini sudah benar.

Hal yang serupa dapat digunakan untuk memeriksa rangkaian jembatan *wheatstone* sebagai berikut.



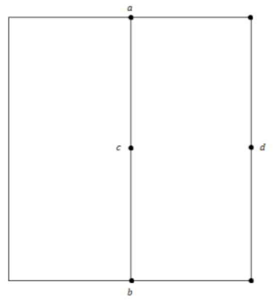
Gambar 14. Rangkaian Jembatan Wheatstone. Sumber: (https://www.electronics-tutorials.ws/)

Rangkaian di atas memiliki bentuk yang ekivalen dengan rangkaian berikut.



Gambar 15. Rangkaian yang Ekuivalen dengan Rangkaian Jembatan Wheatstone. Sumber: (https://www.electronics-tutorials.ws/)

Kemudian dari rangkaian ini ingin kita periksa kesambungannya dengan mengubahnya terlebih dahulu ke model graf.

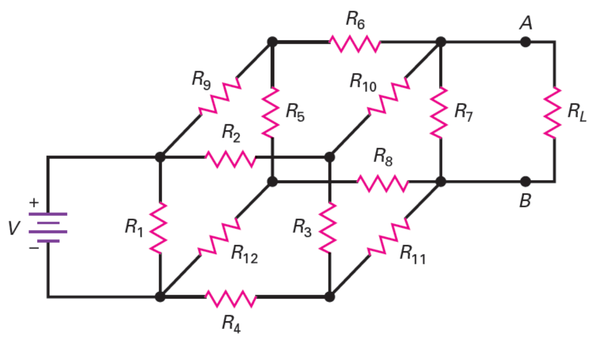


Gambar 16. Model Graf dari Rangkaian pada gambar 12

Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa terdapat 6 simpul dan sisi-sisi lainnya sehingga model rangkaian ini dapat digunakan sebagai model graf.

Dengan menggunakan teorema Kuratowski, kita dapat melihat bahwa model graf ini tidak memiliki upagraf Kuratowski. Sehingga dapat kita simpulkan bahwa graf ini planar. Oleh karena itu dapat kita simpulkan bahwa rangkaian ini tidak akan menyebabkan *short.*

Kemudian model ini dapat digunakan juga untuk menentukan kebersilangan suatu rangkaian yang jauh lebih kompleks. Contohnya adalah pada gambar di bawah ini.



Gambar 17. Rangkaian Listrik Kompleks. Sumber: (Albert Malvino, David Bates. *Electronic Principles* 7th edition)

Prinsip dasarnya sama seperti semula, pertama kita ubah terlebih dahulu model rangkaian elektronika ini ke dalam model graf. Lalu kita identifikasi upagraf tersebut, apakah terdapat upagraf Kuratowski atau tidak. Berdasarkan gambar, rangkaian ini tidak mengandung upagraf Kuratowski karena tidak ada upagraf yang berbentuk graf lengkap maupun graf bipartite.

IV. Kegunaan dari Menentukan Keplanaran Suatu Model Graf Rangkaian Listrik

Dengan mengetahui keplanaran suatu model graf dari rangkaian listrik yang akan dirancang, maka tenaga ahli maupun orang-orang yang menekuni bidang ini dapat mengantisipasi kerugian yang akan terjadi karena kerusakan komponen saat perancangan. Selain itu juga, dengan adanya teorema ini kita dapat menghemat waktu dalam perancangan sehingga kita tidak perlu khawatir akan kerusakan yang akan terjadi karena dengan teorema Kuratowski ini kita telah memeriksa kelayakan suatu rangkaian yang akan disolder. Teorema Kuratowski ini, dapat digunakan pula pada rangkaian yang rumit. Seperti IC (*Integrated Circuit*), rangkaian MOSFET, rangkaian digital, dan masih banyak lagi. Oleh karena itu, teorema Kuratowski ini sangat membantu dalam perancangan rangkaian listrik.

Konsep keplanaran graf ini pun banyak digunakan untuk membuat *software* simulasi perancangan rangkaian listrik. Contohnya pada *software* Eagle dalam perancangan PCB (*Printed Circuit Board*). *Software* ini memiliki fitur untuk membuat rangkaian PCB yang kita inginkan secara otomatis sehingga hal ini mempermudah banyak pengguna dalam merancang komponen elektronika.

V. Kesimpulan

Teori graf, khususnya teorema Kuratowski ini dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang terjadi di kehidupan nyata. Salah satu contoh permasalahannya adalah dalam perangkaian peralatan elektronika. Dengan memisalkan suatu rangkaian sebagai model graf yang terdiri atas simpul dan sisi, maka dengan teorema Kuratowski, kita dapat menyimpulkan bahwa rangkaian tersebut akan menyebabkan *short* atau tidak. Sehingga konsep ini dapat membantu banyak orang-orang yang bekerja pada bidang ini. Selain itu, konsep ini banyak sekali digunakan pada *software* perancangan rangkaian listrik untuk memudahkan pekerjaan.

VI. Ucapan Terima Kasih

Pertama-tama penulis ingin mengucapkan terima kasih sebanyak-banyaknya kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat dan kasih karunia-Nya lah penulis dapat menyelesaikan makalah ini. Kemudian, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih sebanyak-banyaknya kepada orang tua penulis yang telah memberikan dukungan berupa doa, moral, maupun materi. Penulis juga ingin berterima kasih kepada dosen-dosen yang telah memberikan ilmunya dalam mata kuliah matematika diskrit ini yaitu Bapak Rinaldi Munir, Bapak Judhi, serta Ibu Harlili. Sekian dan terima kasih banyak.

References

[1] Munir, Rinaldi. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika Bandung, 2012.

[2] Rosen, Kenneth.H, *Discrete Mathematics and Its Application 7thed.* New York: Mc.Graw Hill 2012, pp. 655–657.
[3] Malvino, Albert, *Electronic Principles 8th ed*. New York: New York: Mc.Graw Hill 2016, ch.1.
[4] https://www.electronics-tutorials.ws/ Diakses pada tanggal 9 Desember 2018.
[5] https://www.quora.com/ Diakses pada tanggal 9 Desemeber 2018.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2018

Hoshea/10216058