Menentukan Jumlah Penjaga Minimal yang Mungkin untuk Menjaga Museum dengan Art Gallery Theorem

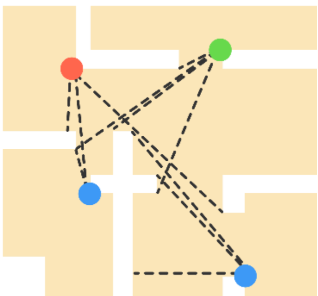
Elvina 13517079[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*elvina19@itb.ac.id*

***Abstract*—Di dalam sebuah museum, terdapat banyak barang yang harus dijaga agar tidak terjadi hal-hal yang tidak diinginkan. Untuk mengatasinya, diperlukan penjaga yang dapat terus mengawasi suatu daerah tertentu. Art Gallery Theorem merupakan salah satu perkembangan dari Graph Coloring yang biasa digunakan untuk menghitung jumlah penjaga minimum untuk ditempatkan di dalam sebuah museum. Dengan memanfaatkan teorema ini, bagaimanapun bentuk ruangan dan berapapun banyak barang yang ada di suatu museum, jumlah penjaga minimum dapat dihitung.**

***Keywords*—graf, Art Gallery Theorem, museum, pewarnaan graf**

I. PENDAHULUAN

Teori graf sudah ada sejak dulu, dan telah dikembangkan oleh banyak ahli menjadi suatu teori baru yang dapat diaplikasikan langsung ke dalam suatu permasalahan dalma kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh dari perkembangan teori graf adalah Art Gallery Theorem, yang awalnya dinyatakan oleh Victor Klee, dan dilanjutkan oleh Vaclav Chvatal. Masalah mengenai Art Gallery ini digambarkan seperti gambar di bawah ini.



Gambar 1. Art Gallery Problem
(Sumber : https://brilliant.org/wiki/guarding-a-museum/, diakses pada 9 Desember 2018 pukul 5.37)

Umumnya, jika hendak memasang kamera pengawas (CCTV) di sebuah ruangan, kamera-kamera tersebut akan diletakan disudut-sudut ruangan. Demikian juga penjaga museum, setiap penjaga ditempatkan pada sudut ruangan. Namun, jika setiap sudut ruangan terdapat satu penjaga, maka aka nada terlalu banyak penjaga hanya untuk mengawasi satu bagian museum. Karena itulah digunakan Art Gallery Theorem.

Dasar dari Art Gallery Theorem sebenarnya adalah teori pewarnaan graf. Tujuan dari diciptakannya Art Gallery Theorem adalah untuk menentukan banyaknya jumlah penjaga minimum di dalam sebuah museum, sehingga dapat menghemat tenaga dan biaya. Aplikasi dari teorema ini juga dapat digunakan dalam pembuatan game, untuk menentukan jumlah ‘musuh’ minimum sehingga seluruh area pada *map* di dalam game dapat dilihat oleh ‘musuh’.

II. DASAR TEORI

A. Graf

Graf adalah salah satu cara untuk merepresentasikan objek-objek diskrit, terutama hubungan antara objek-objek tersebut. Graf biasanya ditampilkan dengan menggambarkan suatu bulatan atau titik sebagai objek, dan garis yang menghubungkan antara titik-titik objek sebagai hubungan antar objek. Graf biasanya dinotasikan sebagai G = (V, E) di mana G adalah graf, V adalah *vertices* (simpul atau titik), dan E adalah *edges* (sisi atau garis).

Graf ada berbagai jenis, yaitu :

1. Graf sederhana
   Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.
2. Graf tak-sederhana
   Graf tak-sederhana adalah graf yang memiliki gelang atau sisi ganda. Apabila graf memiliki gelang, maka graf tersebut disebut graf semu (*pseudograph*). Apabila graf tersebut memiliki sisi ganda, maka graf tersebut disebut graf ganda (*multigraph*).
3. Graf tak-berarah
   Graf tak-berarah adalah graf yang semua sisinya tidak memiliki orientasi arah. Biasanya, sisi dari graf ini digambarkan sebagai garis biasa tanpa diberi panah.
4. Graf berarah
   Graf berarah adalah graf ang setiap sisinya memiliki orientasi arah. Biasanya, sisi dari graf ini digambarkan dengan garis yang diberi tanda panah untuk menunjukkan orientasi arah dari sisi tersebut.

Dalam makalah ini, graf yang akan digunakan adalah graf sederhana dan graf tak-berarah.

Graf sederhana sendiri memiliki beberapa tipe khusus yang sering diaplikasikan ke dalam berbagai masalah di kehidupan. Berikut beberapa contoh dari graf sederhana khusus :

1. Graf Lengkap

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul yang lain, biasa dinotasikan sebagai K_n dengan n = jumlah simpul.

2. Graf Lingkaran

   Graf lingkaran adalah graf sederhala yang setaip simpulnya berderajat 2, biasa dilambangkan sebagai C_n.
3. Graf Teratur

   Graf teratur adalah graf yang semua simpulnya memiliki derajat yang sama.
4. Graf Bipartit

   Graf bipartit adalah graf yang simpul-simpulnya dapat dikelompokan ke dalam dua kelompok himpunan (misal V_1 dan V_2), sehingga setiap sisi yang ada pada graf tersebut terhubung dari V_1 ke V_2 (bentuknya mirip dengan fungsi).

Selain itu, terdapat beberapa terminology (istilah) dasar yang terdapat pada teori graf :

1. Bertetangga

   Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika keduanya dihubungkan dengan satu sisi yang sama.
2. Bersisian

   Menunjukan relasi antara suatu sisi dan simpul yang saling terhubung.
3. Simpul Terpencil

   Simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya, dan tidak bertetangga dengan simpul manapun.
4. Graf Kosong

   Graf yang tidak memiliki sisi (himpunan sisinya merupakan himpunan kosong).
5. Derajat

   Menunjukan jumlah sisi yang bersisian pada suatu simpul.
6. Lintasan

   Barisan selang-seling simpul dan sisi yang membentuk suatu himpunan yang berawal dari simpul asal (v_0) ke simpul akhir (v_n)
7. Siklus atau Sirkuit

   Lintasan ang berawal dan berakhir di simpul yang sama.
8. Terhubung

   Dua simpul pada suatu graf dikatakan terhubung apabila terdapat lintasan yang menghubungkan dua simpul tersebut. Graf yang setiap simpulnya terhubung disebut graf terhubung. Untuk membahas masalah pada makalah ini, digunakan graf terhubung.
9. Upagraf dan Komplemen Upagraf

   Apabila terdapat dua graf G dan G1 dengan G = (V, E) dan $G_1 = (V_1, E_1)$, jika V_1 merupakan bagian dari V dan E_1 merupakan bagian dari E, maka G_1 merupakan upagraf dari G.
10. Upagraf Merentang

    Jika G_1 merupakan upagraf dari G, dan $V_1 = V$ (G_1 mengandung semua simpul dari G), maka G_1 merupakan upagraf merentang.
11. Cut-Set

    Cut set adalah himpunan sisi yang dapat membuat graf menjadi tidak terhubung.
12. Graf Berbobot

    Graf yang setiap sisinya memiliki bobot atau nilai.

B. Pewarnaan Graf

Ada tiga tipe pewarnaan graf, yaitu pewarnaan sisi, pewarnaan simpul, dan pewarnaan wilayah. Namun, inti dari pewarnaan graf semuanya sama, yaitu mewarnai setiap simpul/sisi/wilayah sehingga dua simpul/sisi/wilayah yang berdekatan (menempel) memiliki warna yang berbeda. Pada makalah ini, tipe pewarnaan yang akan digunakan adalah pewarnaan simpul.

Terdapat istilah dalam pewarnaan graf, salah satunya adalah bilangan kromatik. Bilangan kromatik adalah jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk pewarnaan. Pada mulanya, bilangan kromatik graf planar telah diketahui sebesar 6. Kemudian, diperbaiki dikembangkan menjadi 5, dan kembali dikembangkan menjadi 4. Sekarang, telah diketahui bahwa bilangan kromatik graf planar sebesar 3.

Untuk melakukan pewarnaan graf, dapat digunakan Algoritma Welch-Powell :

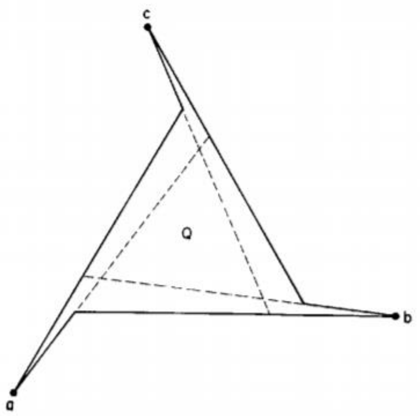
1. Urutkan simpul dari derajat yang paling besar ke derajat paling kecil.
2. Beri simpul yang memiliki derajat tertinggi sebuah warna, lalu warnai simpul-simpul lain yang tidak bertetangga dengan simpul ini dengan warna yang sama.
3. Ulangi langkah ke-2 kepada simpu yang memiliki derajat tertinggi setelah simpul pertama.

Pewarnaan graf biasanya diaplikasikan pada pewarnaan peta dalam mewarnain setiap wilayah pada peta dengan warna yang berbeda-beda.

C. Asal Mula Art Gallery Theorem

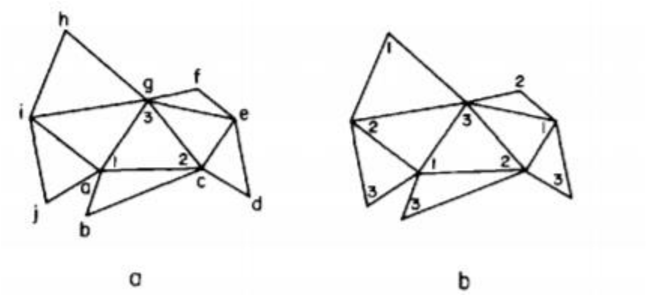
Teorema : Jumlah penjaga minimal yang diperlukan untuk menjaga museum tidak lebih dari n/3 jumlah sudut di museum.

Pada awalnya, teorema ini dibuktikan oleh Fisk, kemudian dikembangkan dan disempurnakan oleh Chvatal. Inti dari pembuktian dari Fisk adalah membuat segitiga-segitiga dari bangun polygon yang merepresentasikan struktur museum.



Gambar 2. Penjaga a, b, dan c dapat melihat areanya
(Sumber : O'Rouke, Joseph., *Art Gallery Theorems and Algorithms*)

Berikutnya, setiap sudut dari hasil dibuatnya segitiga dari bangun polygon itu dapat dilihat sebagai simpul graf, dan garis-garisnya sebagai sisi graf. Dilakukan pewarnaan simpul graf dengan 3 warna (telah diketahui sebelumnya bahwa bilangan kromatik pewarnaan graf adalah 3).



Gambar 3. Pewarnaan graf dengan 3 warna berbeda
(Sumber : O'Rouke, Joseph., *Art Gallery Theorems and Algorithms*)

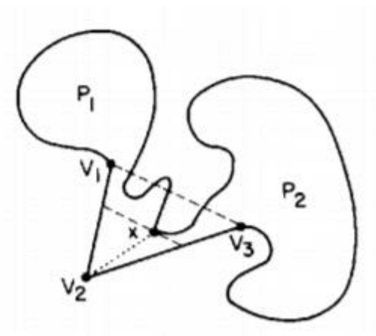
Jumlah warna 1 ada 3, warna 2 ada 3, dan warna 3 ada 4. Diketahui bahwa jumlah total dari simpul adalah 10. Misalkan jumlah simpul adalah n, warna 1 adalah a, warna 2 adalah b, dan warna 3 adalah c, maka a+b+c=n. Jika x adalah jumlah minimal dari a, b, dan c, dan x > n/3, maka jumlah total dari a + b + c > n, sehingga pasti x ≤ [n/3] dengan x harus integer. Karena warna paling sedikit adalah a dan b, misalkan diletakan penjaga pada setiap titik a, maka terdapat 3 orang penjaga museum. Telah diketahui bahwa n (jumlah simpul) = 10, dan n/3 = 3.33, sehingga teorema bahwa jumlah penjaga minimal yang diperlukan tidak lebih dari n/3 adalah benar.

Dalam pembuktian dari Chvatal, Chvatal tidak menggunakan pewarnaan graf, melainkan melakukan pembuktian dengan induksi. Hipotesis awalnya adalah : setiap polygon berderajat n dapat dipartisi menjadi segitiga-segitiga dengan g ≤ [n/3] di mana g adalah jumlah 'kipas'. Inti dari pembuktian ini sama seperti Fisk. Namun, karena tidak menggunakan teori pewarnaan graf, pembuktian dari Chvatal tidak akan dibahas pada makalah ini.

Dari tadi, telah disebut berkali-kali mengenai membagi polygon menjadi banyak segitiga. Proses tersebut adalah *triangulation*. Teorema *Triangulation* adalah : sebuah poligon dengan n simpul dapat dibagi menjadi n-2 segitiga ditambah n-3 diagonal dalam.

Hal ini dibuktikan dengan induksi matematika, dengan basis n = 3. Jika n = 3, maka benar bahwa poligon dengan 3 simpul merupakan 1 segitiga, dengan jumlah segitiga adalah n-2 jumlah simpul, dan memiliki 0 diagonal dalam.

Jika n > 3, dengan n bilangan bulat, pasti minimal terdapat 3 simpul, misalkan v_1, v_2, dan v_3. Jika v_2 adalah simpul yang 'cembung' (lihat Gambar 3), maka dapat ditarik garis dari v_1 ke v_3 sehingga terbentuk segitiga $v_1v_2v_3$. Bilangan bulat terkecil yang memenuhi n > 3 adalah 4, sehingga untuk n = 4 dapat dicari bahwa benar dapat dibagi menjadi 2 segitiga (n-2 segitiga) dan 1 diagonal dalam (n-3 diagonal). Karena terbukti untuk n (n = 3) dan n+1 (n = 4), maka teorema *triangulation* terbukti benar, dan semua poligon pasti dapat diproses dengan *triangulation*.



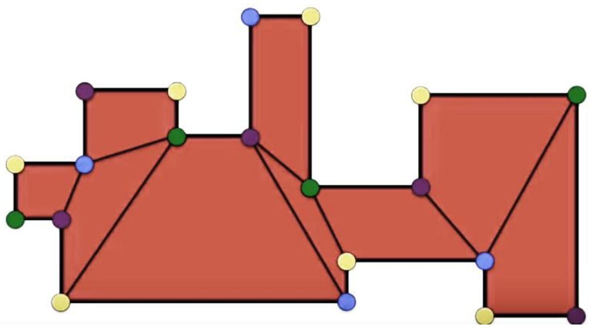
Gambar 4. v_1, v_2, dan v_3
(Sumber : O'Rouke, Joseph., *Art Gallery Theorems and Algorithms*)

Jika n > 3, dengan n bilangan bulat, pasti minimal terdapat 3 simpul, misalkan v_1, v_2, dan v_3. Jika v_2 adalah simpul yang 'cembung' (lihat Gambar 3), maka dapat ditarik garis dari v_1 ke v_3 sehingga terbentuk segitiga $v_1v_2v_3$. Bilangan bulat terkecil yang memenuhi n > 3 adalah 4, sehingga untuk n = 4 dapat dicari bahwa benar dapat dibagi menjadi 2 segitiga (n-2 segitiga) dan 1 diagonal dalam (n-3 diagonal). Karena terbukti untuk n (n = 3) dan n+1 (n = 4), maka teorema *triangulation* terbukti benar.

D. Orthogonal Art Gallery Theorem

Teorema : Jika suatu poligon (museum) hanya memiliki sudut sebesar 90^o atao 270^o, maka jumlah penjaga minimum yang diperlukan untuk menjaganya tidak lebih dari n/4, dengan n adalah jumlah simpul atau titik sudut.

Jika pada teorema Art Gallery bagian C suatu poligon dibagi menjadi beberapa segitiga, pada *Orthogonal Art Gallery Theorem* suatu poligon dibagi menjadi beberapa segiempat. Caranya sama seperti sebelumnya (pada bagian C). Setelah dibagi menjadi beberapa segiempat, dilakukan pewarnaan simpul pada graf yang terbentuk setelah dilakukan penarikan garis dengan menggunakan 4 warna. Setelah itu, akan terlihat bahwa memang benar bahwa cukup menggunakan n/4 penjaga untuk kasus museum yang terdiri dari sudut-sudut 90^o dan 270^o.

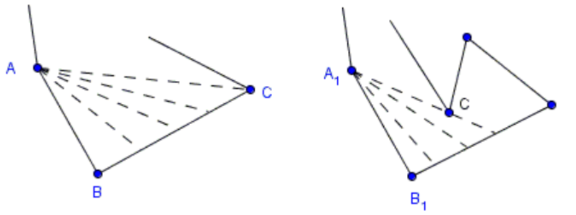


Gambar 5. Contoh penerapan Orthogonal Art Gallery Theorem
(Sumber : https://www.youtube.com/watch?v=OERYaFGBPbM, diakses pada 8 Desember 2018 pukul 13.40)

Jika pada teorema Art Gallery bagian C suatu poligon dibagi menjadi beberapa segitiga, pada *Orthogonal Art Gallery Theorem* suatu poligon dibagi menjadi beberapa segiempat. Caranya sama seperti sebelumnya (pada bagian C). Setelah dibagi menjadi beberapa segiempat, dilakukan pewarnaan simpul pada graf yang terbentuk setelah dilakukan penarikan garis dengan menggunakan 4 warna. Setelah itu, akan terlihat bahwa memang benar bahwa cukup menggunakan n/4 penjaga untuk kasus museum yang terdiri dari sudut-sudut 90^o dan 270^o

D. Gambaran Umum Penerapan Teori

Untuk membantu memberikan bayangan cara kerja dari penerapan teorema Art Gallery, diberikan gambar seperti berikut.



Gambar 6. Gambaran pandangan penjaga A
(Sumber : http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/Chvatal.shtml, diakses pada 8 Desember 2018 pukul 13.23)

Jika bentuk struktur museum seperti gambar di sebelah kiri, maka jarak pandangan dari titik A akan lebih luas karena tidak terhalang oleh apapun. Namun, jika bentuk struktur bangunan museum seperti gambar di sebelah kanan, maka jarak pandang dari titik A akan lebih sempit karena terhalang oleh sisi poligon.

Di sinilah Art Gallery Theorem bekerja. Seiring dengan bertambahnya sudut pada suatu poligon, semakin bertambah juga jumlah minimal penjaga yang diperlukan untuk mengawasi seluruh wilayah poligon.

III. EKSPERIMEN

A. Asumsi yang Digunakan

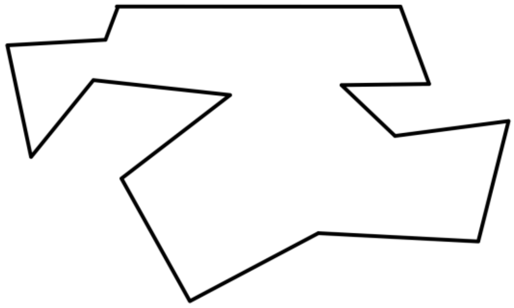
Ada beberapa asumsi yang harus dilakukan agar Art Gallery Theorem dapat bekerja dengan baik.

Pertama, dilakukan asumsi untuk bentuk dari museum itu sendiri. Bentuk museum harus lurus, tidak ada tembok yang melengkung. Museum juga diasumsikan tidak memiliki pintu, sehingga setiap ruangan atau bagian dari museum dapat dicapai tanpa terhalang oleh apapun. Kemudian, setiap sisi (tembok) dari museum terhubung oleh simpul membentuk graf lingkaran.

Kedua, dilakukan asumsi terhadap kamera atau penjaga. Diasumsikan penjaga dapat melihat ke segala arah (360^o). Selain itu, diasumsikan juga penjaga pasti berdiri di pojok museum (pada simpul), tidak ada penjaga yang berdiri di tengah-tengah ruangan.

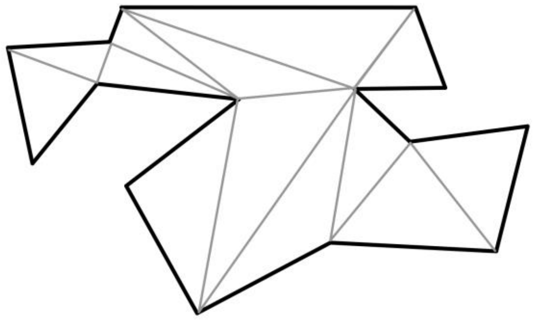
B. Chvatal's Art Gallery Theorem

Misalkan ada contoh bangun museum seperti ini.



Gambar 7. Contoh bentuk bangun museum yang direpresentasikan sebagai Graf Lingkaran

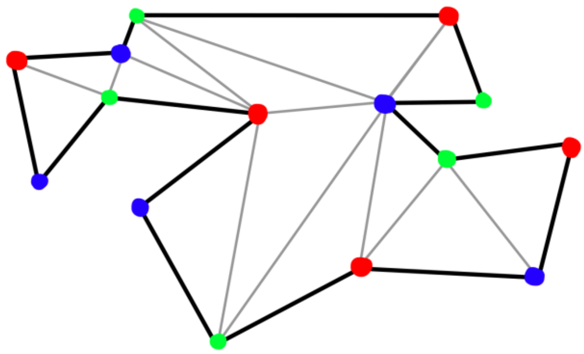
Seperti yang telah dijelaskan pada Bab 2 bagian C, dilakukan pembagian terhadap poligon yang melambangkan bangun museum ini menjadi beberapa segitiga dengan melakukan *triangulation*. Karena telah terbukti bahwa semua poligon pasti dapat diberlakukan *triangulation*, maka museum ini pun dapat dibagi menjadi beberapa segitiga.



Gambar 8. Dilakukan *triangulation* terhadap poligon yang menggambarkan bangun museum

Sekarang, kita dapat melihat gambar di atas sebagai sebuah graf, dengan setiap titik sudutnya merupakan simpul dari graf, dan setiap garis sebagai sisi dari graf.

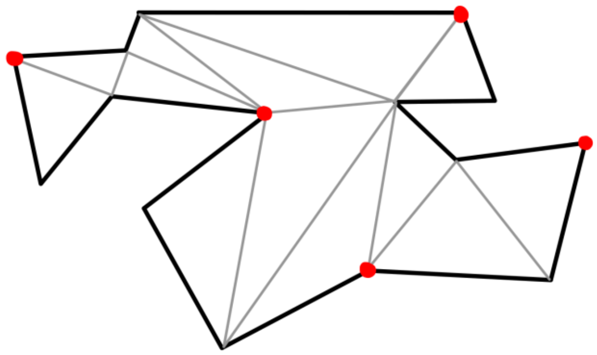
Berikutnya, dilakukan pewarnaan graf pada setiap simpul dari graf dengan menggunakan 3 warna yang berbeda. Langkah-langkah dan cara pewarnaan graf telah dijelaskan pada Bab 2 bagian B.



Gambar 9. Dilakukan pewarnaan graf dengan algoritma Welch-Powell

Didapat pada graf dengan jumlah simpul n = 15, simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi 3 warna. Warna merah berjumlah 5, warna biru berjumlah 5, dan warna hijau berjumlah 5. Karena jumlah simpul yang paling sedikit $x \leq n/3$, di mana x = 5 dan n = 15, maka teorema Art Gallery dapat berlaku.

Kemudian, letakan penjaga pada setiap titik di salah satu warna yang memiliki jumlah paling sedikit.



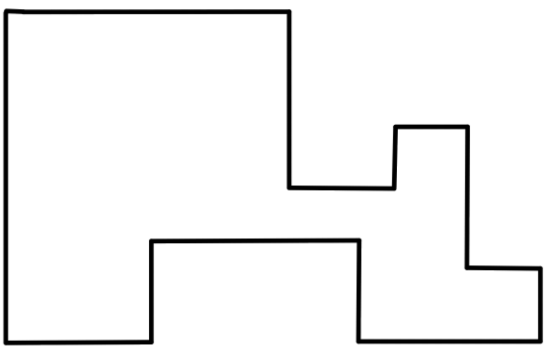
Gambar 10. Diambil titik berwarna merah sebagai representasi dari letak penjaga museum

Sehingga letak penjaga minimal untuk menjaga museum seperti contoh adalah 5, dengan salah satu solusi peletakan penjaga-penjaganya seperti gambar di atas.

C. Orthogonal Art Gallery Theorem

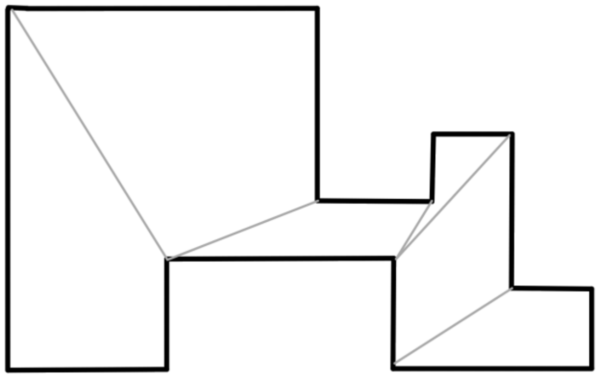
Cara melakukan penerapan Orthogonal Art Galler Theorem sama seperti Chvatal's Art Gallery Theorem. Namun, poligon dibagi menjadi beberapa segiempat dan menggunakan 4 warna sebagai penanda tiap penjaga.

Misalkan ada sebuah museum seperti berikut.



Gambar 11. Contoh bentuk bangun museum yang direpresentasikan sebagai Graf Lingkaran

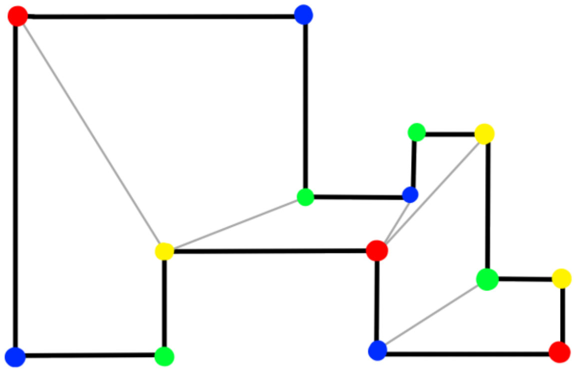
Lalu, dilakukan pembagian terhadap poligon yang merepresentasikan bangun museum di atas menjadi beberapa segiempat.



Gambar 12. Poligon dibagi ke dalam beberapa bangun segiempat

Sekarang, bangun poligon di atas dapat dilihat sebagai sebuah graf dengan setiap titik sudutnya merupakan simpul dari graf, dan setiap garis sebagai sisi dari graf.

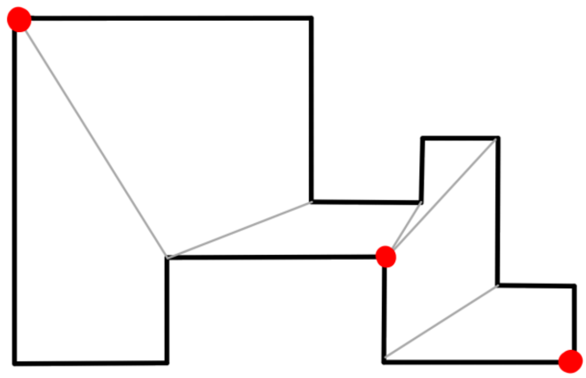
Kemudian, dilakukan pewarnaan graf pada setiap simpul dari graf dengan menggunakan 4 warna yang berbeda. Langkah-langkah dan cara pewarnaan graf telah dijelaskan pada Bab 2 bagian B.



Gambar 13. Dilakukan pewarnaan graf dengan algoritma Welch-Powell

Pada graf dengan jumlah simpul n = 14, simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi 4 warna. Warna merah berjumlah 3, kuning berjumlah 3, hijau berjumlah 4, dan biru berjumlah 4. Jumlah warna yang paling sedikit adalah 3. Jika jumlah warna yang paling sedikit adalah x, karena $3 \leq 14/4$, maka teorema Orthogonal Art Gallery dapat berlaku.

Kemudian, letakan penjaga pada setiap titik di salah satu warna yang memiliki jumlah paling sedikit.



Gambar 14. Diambil titik berwarna merah sebagai representasi dari letak penjaga museum

Sehingga letak penjaga minimal untuk menjaga museum seperti contoh adalah 3, dengan salah satu solusi peletakan penjaga-penjaganya seperti gambar di atas.

IV. KESIMPULAN

Jumlah penjaga minimal yang diperlukan untuk menjaga sebuah museum yang setiap sudut ruangannya sebesar 90^{o} atau 270^{o} tidak lebih dari n/4 dengan n merupakan jumlah total seluruh simpul (sudut ruangan).

Untuk bentuk museum yang sudut-sudutnya tidak hanya sebesar 90^{o} atau 270^{o}, jumlah penjaga minimalnya tidak akan lebih dari n/3 dengan n merupakan jumlah total seluruh simpul (sudut ruangan).

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak-pihak yang telah mendukung penulis sehingga makalah ini dapat selesai dengan baik.

Terima kasih kepada Tuhan YME yang telah memberkati penulis sehingga dapat menyelesaikan makalah ini. Terima kasih kepada kedua orang tua penulis atas segala dukungan baik lahir maupun batin. Terima kasih kepada Pak Rinaldi selaku dosen Matematika Diskrit yang mengajar di kelas penulis sehingga penulis dapat memahami materi-materi yang diberikan dan dapat menulis makalah ini. Terima kasih kepada teman-teman penulis yang telah mendukung penulis sehingga dapat terus mengerjakan makalah ini dengan penuh semangat hingga selesai. Terima kasih juga kepada para penulis dan pencipta dari semua referensi yang digunakan oleh penulis sebagai sumber data dari makalah ini.

REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi., *Matematika Diskrit*, revisi keenam, Bandung, 2016
[2] Urrutia, Jorge., *Sixth proof of the Orthogonal Art Gallery Theorem.*, 1997
[3] O'Rouke, Joseph., *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Department of Computer Science Johns Hopkins University, New York, Oxford, 1987
[4] https://www.youtube.com/watch?v=OERYaFGBPbM
Waktu Akses : 8 Desember 2018 pukul 13.40 WIB
[5] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/Chvatal.shtml
Waktu Akses : 8 Desember 2018 pukul 12.23 WIB
[6] https://www.youtube.com/watch?v=HbDmmWERMME
Waktu Akses : 8 Desember 2018 pukul 13.34 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017

Elvina 13517079