Penerapan Teori Graf dalam Permainan Hex

Vinsen Marselino Andreas / 13517054
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13517054@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Setiap manusia memerlukan hiburan untuk dapat bertahan hidup. Cara setiap orang memenuhi kebutuhan rekreasinya ada bermacam-macam. Ada yang pergi menikmati pemandangan, ada juga yang bermain *game*. Namun, jenis permainan pun beragam, dari yang perlu berpikir keras, ada yang hanya beripikir secara ringan. Salah satu permainan yang menuntut strategi dan pikiran adalah hex. Hex adalah salah satu jenis permainan papan yang cukup digemari pada masanya.**

***Kata kunci*—Graf, hex, permainan papan, strategi.**

I. PENDAHULUAN

Kebutuhan manusia akan hiburan memang sangatlah krusial. Sudah sangat banyak orang yang kehilangan akal sehat hanya karena kurangnya hiburan. Salah satu jenis hiburan yang sudah ada sejak zaman dahulu kala adalah *board game*.

*Board game(*permainan papan) adalah suatu jenis permainan yang biasanya memanfaatkan suatu papan sebagai media utama saat bermain. Salah satu *board game* yang sangat terkenal adalah *monopoly*. Selain monopoly, ada sangat banyak jenis dari permainan papan. Mulai dari yang dimainkan oleh dua orang sampai yang dimainkan oleh banyak orang.

Permainan papan ternyata sudah ada sejak beribu tahun lalu. Diduga, permainan papan yang paling tua adalah dadu. Bentuk dadu pun bermacam-macam. Permainan papan terus berkembang dan mulai menyerupai permainan catur yang kita kenal sekarang.

Sekarang, jenis dari permainan papan sangatlah banyak. Mulai dari yang retro seperti monopoly, permainan kartu, catur, dan permainan lainnya yang tidak kalah menarik. Setiap permainan tersebut memiliki nilai tersendiri. Ada yang mengajarkan untuk menyusun strategi, ada juga yang hanya sekedar untuk hiburan semata. Namun, permainan papan jenis apapun itu, permainan papan merupakan permainan yang digemari oleh semua kalangan. Dari yang muda sampai yang tua, semua orang pasti pernah bermain permainan papan.

Salah satu board game yang dapat dimainkan oleh dua orang dan mengasah kemampuan berpikir adalah hex. Dalam permainan hex, setiap pemain bermain secara bergiliran meletakkan sebuah warna pada papan dan haruslah membuat suatu jalur dari satu sisi permainan ke sisi yang lain.

Hex diciptakan oleh Piet Hein pada tahun 1942 di *Niels Bohr Institute*. Papan yang digunakan dalam permainan hex ini berbentuk bujur sangkar dengan n x n buah heksagonal di dalamnya.

Namun begitu, apakah dalam bermain hex, ada keadaan dimana kedua pemain bisa berakhir seri? Apakah ada strategi yang efektif untuk dapat memastikan kemenagan dalam bermain hex? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita akan menggunakan pendekatan menggunakan graf.

II. TEORI DASAR GRAF

Graf adalah sebuah struktur yang menjelaskan objek diskrit dan hubungan antar objek-objek diskrit tersebut. Hubungan ini dapat berupa apa saja, seperti memiliki jalan, berada di pihak yang sama, dan lain-lain. Objek yang dihubungkan pada graf biasanya disebut dengan simpul, sedangkan hubunganya disebut dengan sisi.

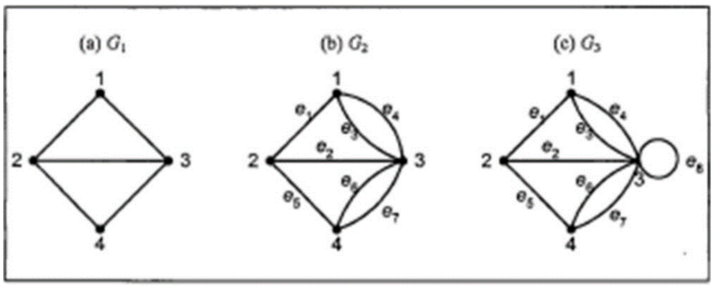
Untuk sebuah graf G, himpunan simpul tak kosong V, dan himpunan sisi E, akan ditulis menjadi

$$G = (V, E)$$

Perhatikan bahwa himpunan sisi E bolehlah kosong. Ini akan mengakibatkan graf menjadi graf kosong(*Null graph*).

Graf dibagi menjadi beberapa jenis, bergantung pada bagaimana ia diklasifikasikan. Menurut ada tidaknya sisi ganda ataupun gelang pada graf, graf dapat dibedakan menjadi :

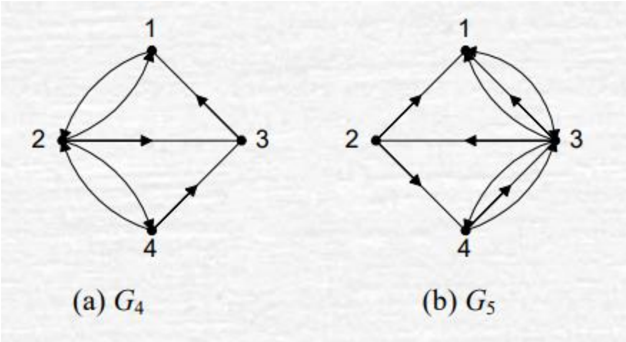
1. Graf sederhana, merupakan graf yang tidak mengandung sisi ganda ataupun gelang sama sekali.
2. Graf tidak sederhana, yaitu graf yang memiliki gelang, sisi ganda, ataupun keduanya sekaligus. Graf ganda adalah jenis graf yang memiliki sisi ganda saja. Sedangkan graf yang memiliki gelang ataupun gelang dan sisi ganda dinamakan graf semu.



Gambar 1. Contoh (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu.
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

Selain dari ada tidaknya sisi ganda dan gelang, graf juga dapat dibedakan dari ada tidaknya arah pada sisi. Jenis graf dengan pembeda ini dapat dibedakan menjadi:

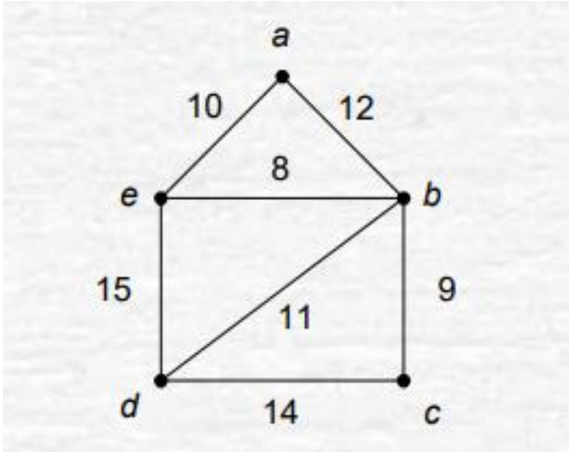
1. Graf tak-berarah, yaitu graf yang sisinya tidak memiliki arah. Ini berarti hubungan antara satu simpul dan simpul tetangganya berlaku kebalikan ((a,b) = (b,a)).
2. Graf berarah, merupakan graf yang sisinya memiliki arah. Arah disini umumnya menandakan proses. Sisi yang memiliki arah biasa disebut dengan istilah busur. Pada contoh di gambar 2(a), busur (3,1) menandakan bahwa hubungan simpul tiga dan simpul satu berasal dari simpul tiga dan mengarah ke simpul satu.



Gambar 2. Contoh (a) graf berarah, (b) graf ganda berarah.
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

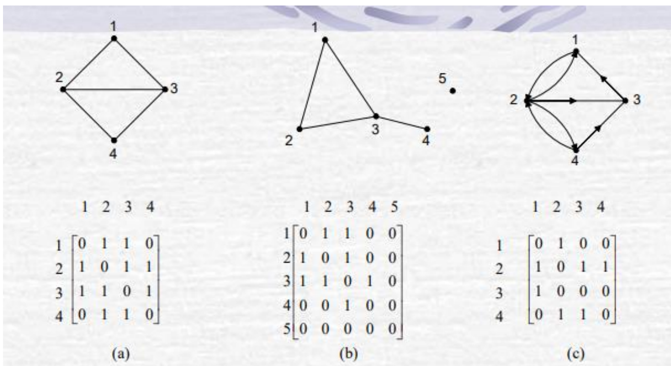
Dalam graf, terdapat beberapa istilah(terminologi) yang lazim digunakan, yaitu:

1. Ketetanggaan (*Adjacent)*
   Istilah yang digunakan saat dua buah simpul dihubungkan oleh suatu sisi.
2. Bersisian (*Incidency)*
   Sebuah sisi dikatakan bersisian dengan kedua simpul yang dihubungkanya.
3. Simpul terpencil (Isolated Vertex)
   Simpul terpencil adalah sebutan untuk simpul tidak mempunyai sisi yang bersisian denganya.
4. Graf kosong (*Empty graph)*
   Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.
5. Derajat (*Degree)*
   Derajat suatu simpul adalah jumlah dari sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Pada graf berarah, derajat dibedakan menjadi dua, yaitu derajat masuk(busur yang mengarah ke simpul) dan derajat keluar(busur yang keluar dari simpul).
6. Lintasan (*Path)*
   Lintasan adalah barisan berseling dari simpul dan sisi. Barisan ini dimulai dengan simpul, dan akan berakhir pada simpul pula.
7. Sirkuit (*Circuit)*
   Sirkuit adalah lintasan yang kembali ke simpul awal. Sebagai contoh, sirkuit akan melewati v1, e1, v2, e2, ... , v1.
8. Terhubung (*Connected)*
   Dua buah simpul dikatakan terhubung apabila ada sebuah lintasan yang berawal dari simpul pertama dan berakhir di simpul kedua.
9. Upagraf (*Sub-Graph)*
   Upagraf adalah sebuah graf yang merupakan menjadi potongan dari graf aslinya. Suatu graf G1 = (V1,E2) disebut upagraf dari graf G = (V,E) apabila V1 adalah himpunan bagian dari V dan E1 merupakan himpunan bagian dari E.
10. Graf berbobot (*Weighted Graph)*
    Graf berbobot merupakan graf yang setiap sisinya memiliki nilai tertentu. Misalnya, graf dapat digunakan untuk merepresentasikan sebuah peta. Maka nilai pada sisi yang masuk akal adalah jarak.



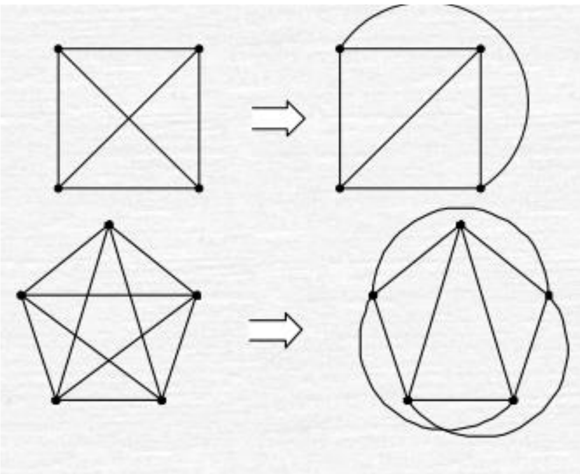
Gambar 3. Contoh graf berbobot.
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

Untuk merepresentasikan graf, cara yang paling umum digunakan adalah representasi matriks ketetanggaan(*adjacency matrix*). Representasi ini menggunakan matriks berukuran n x n, dengan n adalah jumlah simpul pada graf. Apabila simpul i dan simpul j bertetanggaan, maka elemen baris i dan kolom j akan bernilai satu, sedangkan yang lainnya nol. Begitu pula dengan elemen baris j dan kolom i. oleh karena itu, pada graf tak berarah, matriks ketetanggaan yang dihasilkan akan simetris terhadap diagonal utama.



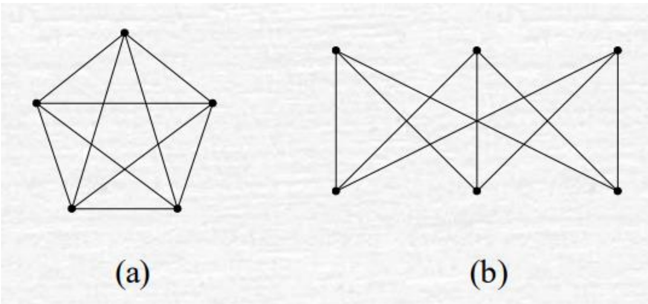
Gambar 4. Representasi graf dengan matriks ketetanggaan.
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

Dalam graf juga dikenal istilah graf planar. Graf planar adalah sebuah graf yang dapat digambar tanpa ada dua sisi atau lebih yang saling tumpang tindih. Selain graf planar, dikenal juga istilah graf bidang. Graf bidang merupkan graf planar yang digambarkan dengan sisi yang tidak berpotongan.



Gambar 5. (atas) graf planar, (bawah) graf tak-planar
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

Salah satu cara mengidentifikasi graf planar maupun graf tak-planar adalah dengan Kuratowski's theorem. Kuratowski's theorem adalah teorema yang menyatakan suatu graf adalah graf planar apabila graf tersebut tidak memiliki subgraf yang isomorf dengan graf $K_{3,3}$ ataupun K_5.



Gambar 6. (a) K_5, (b) $K_{3,3}$
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

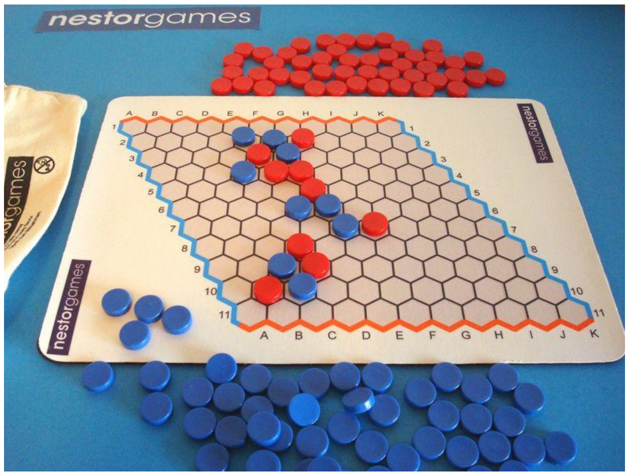
Dalam teori graf juga dikenal dengan teknik pewarnaan graf. Dalam pewarnaan graf, terdapat dua buah metode, yaitu pewarnaan sisi dan juga pewarnaan simpul.

Pewarnaan simpul, berarti mewarnai setiap simpul, sehingga tidak ada simpul yang bertetanggaan memiliki warna yang sama.

III. PENGENALAN PERMAINAN HEX

Hex merupakan sebuah permainan papan yang dimainkan oleh dua orang. Pada awalnya, permainan ini ditemukan oleh Piet Hein pada tahun 1942. Namun, permainan ini kembali dikenalkan oleh John Nash pada tahun 1948. Permainan ini mulai dikomersilkan oleh perusahaan Parker Brothers, Inc. pada tahun 1952 dengan nama "Hex".

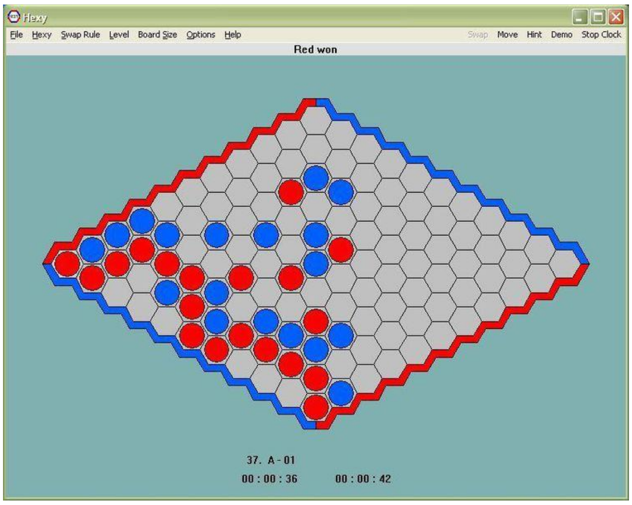
Permainan hex menggunakan papan berbentuk bujursangkar dengan n x n buah heksagon yang tersusun di dalamnya. Di kedua sisi yang bersebrangan terdapat warna yang sama, yang menandakan warna yang harus dibentuk untuk menghubungkan kedua sisi tersebut.



Gambar 7. Papan permainan hex
https://boardgamegeek.com/image/557705/hex

Pada awal permainan, papan permaian kosong, tidak ada keping yang diletakkan di atasnya. Kemudian setiap pemain bergantian memasangkan sebuah keping ke atas papan permainan. Setiap pemain terus bergantian memasangkan keping sampai ada salah satu pemain yang memenangkan permainan, atau papan permainan sudah terisi penuh.

Ukuran dari papan permainan ini bisa berapa saja. Namun ukuran standar dari permainan ini adalah 11 x 11. Tetapi ada juga beberapa versi yang menggunakan ukuran 15 x 15 ataupun 17 x 17. Dalam makalah ini, semua papan permainan yang digunakan berukuran 11 x 11, karena merukapan ukuran standar dari permainan hex.



Gambar 8. Kondisi kemenangan merah. Kepingan merah membentang dari sisi merah pertama ke sisi merah kedua
https://boardgamegeek.com/image/582180/hex

Kondisi kemenangan untuk permainan ini adalaha apabila salah satu pemain dapat membuat sebuah lintasan dari sisi papan yang satu ke sisi papang yang bersebrangan dengan sisi awal. Seperti contoh pada gambar 6, keping merah berhasil menghubungkan sisi merah yang satu dengan sisi merah yang lainnya, sedangkan biru kalah dalam permainan karena tidak berhasil memblokir jalan merah dan tidak membuat lintasan dari sisi biru ke sisi biru di seberangnya.

Dalam makalah ini, akan dibuktikan bahwa dalam permainan hex, tidak akan ada kondisi seri. Yang berarti akan selalu ada pemain yang keluar sebagai pemenang.

IV. PENERAPAN GRAF DALAM HEX

Setelah mengetahui cara bermain dari permainan hex, perlu diketahui strategi supaya kita dapat memenangkan permainan ini. Namun sebelum itu, akan dibuktikan bahwa dalam memainkan permainan hex, tidak akan ada kondisi seri.

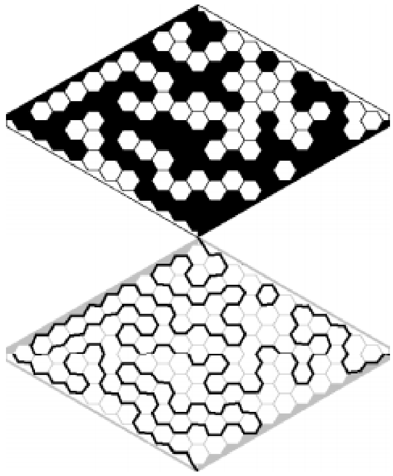
Dalam suatu permainan, keadaan seri adalah keadaan dimana kedua pemain tidak mengalami kemenangan ataupun kekalahan. Untuk membuktikan bahwa permainan hex tidak mungkin seri, akan dibuktikan bahwa:

1. Kedua pemain tidak menang.
2. Kedua pemain tidak kalah.

Untuk membuktikan ini, pertama kita harus membayangkan bahwa papan permainan hex adalah sebuah graf. Asumsikan papan permainan dalam keadaan penuh, yaitu semua ruang terisi dengan kepingan. Simpul pada graf ini adalah seluruh titik ujung dari ruang kepingan. Ini berarti node memiliki derajat 2 (untuk pojok) dan 3(untuk tengah). Ruang kepingan ini akan kita sebut dengan istilah sel. Setiap sel akan dikelilingi oleh enam buah simpul. Sisi pada graf ini adalah garis yang menghubungkan dua buah simpul. Maka dari itu, setiap sel juga akan dikelilingin oleh enam buah sisi.

Pada pembuktian kali ini, kita menggunakan sebuah papan dengan ukuran 11 x 11 heksagon dan menggunakan warna hitam putih. Dapat dilihat pada gambar 11(a) adalah papan yang sudah diisi sepenuhnya oleh kepingan yang dimainkan oleh pemain. Dapat dilihat pula sisi hitam ada di sebelah kiri atas dan kanan bawah, sedangkan sisi putih ada di sebelah kanan atas dan kiri bawah.

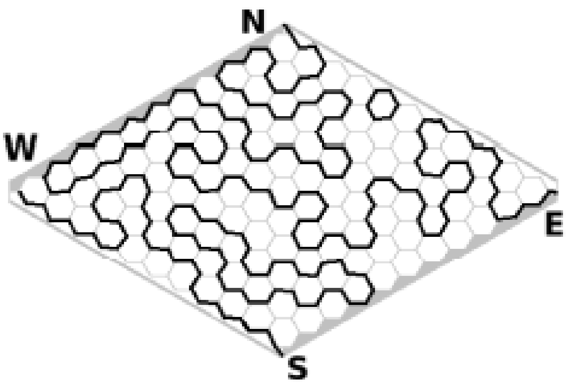
Sekarang, kita akan membuat sebuah graf baru (G') dengan membuat garis di setiap sisi yang membatasi dua buah sel dengan warna yang berbeda. Sebagai contoh, apabila suatu sisi diapit oleh 2 buah sel dengan warna berbeda, maka sisi tersebut akan ditandai oleh garis. Sedangkan apabila suatu sisi diapit oleh dua sel dengan warna yang sama, maka sisi tersebut akan dibiarkan polos. Setelah semua sisi selesai ditandai, maka kepingan yang ada diatas papan akan dicabut seperti baru pertama kali bermain.



Gambar 9. (atas) graf awal, (bawah) graf G'
http://web.mit.edu/course/other/sp.268/OldFiles/www/boardgames.pdf

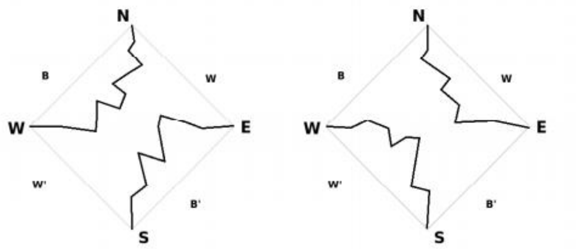
Dari graf G', dapat dilihat bahwa setiap simpul pojok memiliki derajat satu dan sisa simpul memiliki derajat nol atau dua. Simpul memiliki derajat nol pada saat ketiga sel di sekelilingnya memiliki warna yang sama, dan derajat dua saat ada satu sel yang memiliki warna berbeda.

Dapat kita lihat pula graf G' merupakan graf planar. Karena ada masing masing satu simpul berderajat satu di setiap sudut, maka dapat dipastikan bahwa ada dua buah jalan yang menghubungkan satu simpul ujung dengan simpul ujung lainnya. Sekarang kita beri nama setiap ujung dengan N, E, S, dan W.



Gambar 10. Penamaan setiap ujung papan permainan
http://web.mit.edu/course/other/sp.268/OldFiles/www/boardgames.pdf

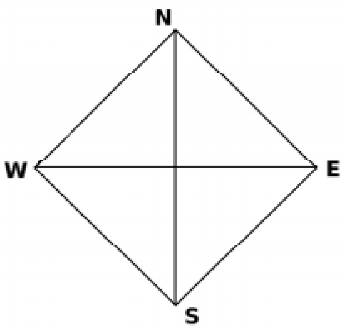
Karena akan ada dua jalur yang menghubungkan titik ujung, maka akan ada beberapa kemungkinan, yaitu N-W dan E-S, N-E dan W-S, serta N-S dan W-E. Gambar dibawah ini menunjukan kedua kemungkinan yang awal, yaitu kemungkinan dari pasangan N-W E-S dan pasangan N-E W-S.



Gambar 11. (kiri) N-W dan E-S, (kanan) N-E dan W-S
http://web.mit.edu/course/other/sp.268/OldFiles/www/boardgames.pdf

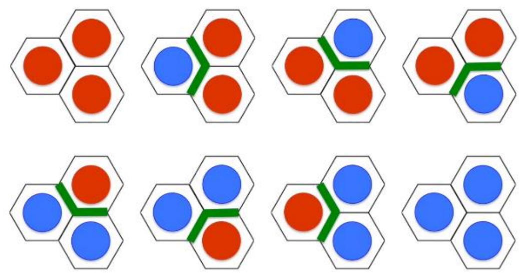
Dari kedua graf pada gambar 11 terlihat bahwa ada sebuah jalur yang merupakan kondisi kemenangan dari salah satu pemain. Dalam kasus N-W E-S, pemain putih memenangkan permainan karena tidak ada pewarnaan sisi yang memutus hubungan antara sisi W yang satu dan sisi W yang lainnya (tidak ada sisi yang ditandai pada bagian tengah menandakan sisi diapit oleh dua sel yang sewarna). Begitu juga sebaliknya dengan kasus N-E dan W-S. pada kasus ini, pemain hitam memenangkan permainan. Dalam kedua kasus ini, dapat dipastikan bahwa ada salah satu pemain yang memenangkan permainan.

Untuk kasus terakhir, yaitu N-S dan W-E, N akan terhubung dengan S, dan W akan terhubung dengan E. karena kedua pojok ini bersebrangan, maka akan terbentuk minimal sebuah persimpangan antara garis N-S dan W-E seperti gambar 10.



Gambar 12. Posisi N-S dan W-E
http://web.mit.edu/course/other/sp.268/OldFiles/www/boardgames.pdf

Kasus ini tidak mungkin bisa tercapai dan terjadi, karena tidak akan ada jalur yang menjadi percabangan. Hal ini dikarenakan untuk susunan apapun, tidak akan ada simpul dengan derajat 3, sedangkan untuk persimpangan seperti gambar 13, memerlukan simpul dengan derajat tiga sebagai persimpanganya.



Gambar 13. Kemungkinan seluruh pewarnaan sisi
https://www.youtube.com/watch?v=2MNalT1g3m8&feature=youtu.be

Oleh karena itu, sudah dibuktikan bahwa dalam permainan hex akan selalu ada pemain yang keluar sebagai pemenang. Hal ini didapat dari fakta bahwa posisi yang terjadi haruslah posisi N-W dan E-S ataupun N-E dan W-S. Kedua posisi tersebut merupakan posisi kemenangan dari salah satu pemain. Karena kita sudah membuktikan bahwa permainan tidak mungkin seri, ada banyak pertanyaan yang muncul. Pemain manakah yang memiliki peluang menang lebih besar? Apakah mungkin untuk menghafal setiap kemungkinan yang ada pada permainan?

V. STRATEGI BERMAIN

Karena dalam permainan hex tidak akan mencapai seri, maka sudah dapat dipastikan bahwa salah satu pemain akan menjadi pemenang dalam permainan tersebut.

Dalam kasus seperti ini, akan dibuktikan bahwa pemain pertama akan selalu menang apabila kedua pemain bermain dengan sempurna. Pembuktian ini akan menggunakan pembuktian dengan kontradiksi. Pertama tama, kita asumsikan bahwa pemain kedua memilik strategi menang dan akan menang. Namun, pemain pertama cukup membuat langkah yang tidak signifikan. Langkah tidak signifikan ini tidak akan merugikan pemain pertama, karena kepingan yang ditaruh pada papan tidak akan merugikan pemain sama sekali. Saat giliran pemain kedua tiba, bagi pemain pertama, dia adalah pemain kedua. Hal ini menunjukkan bahwa sekarang, dialah yang mempunyai strategi untuk menang. Maka sudah dibuktikan bahwa pemain pertama pasti selalu menang apabila kedua pemain bermain dengan sempurna.

Sayangnya, untuk melakukan permainan sempurna tersebut, kita tidak bisa menggunakan teori graf untuk mencari cara bermain yang paling efektif.

Untuk melakukan permainan sempurna, tentu saja diperlukan latihan dan juga pembiasaan. Metode brute force tidak dapat dilakukan, karena apabila kita menganggap bahwa satu formasi peletakan keping adalah satu state maka akan ada $n^2!$ cara penyusunan keping. Namun tentu saja angka ini masihlah sangat kasar dan mengandung sangat banyak repetitif. Selain repetitif, angka ini juga belum memperhitungkan kesimetrisan papan, dan juga permainan yang tidak sampai memenuhi satu papan. Tidak memenuhi satu papan berarti ada pemain yang sudah menang sebelum semua keping tersimpan di papan. Setelah hasil perhitungan, angka yang dihasilkan masihlah sangat besar.

Inilah kenapa metode brute force tidak cocok untuk digunakan dalam strategi ini.

Namun, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, yaitu:

1. Menggagalkan rencana lawan untuk membuat lintasan yang baik.
2. Terus memperluas koneksi.
3. Menyiapkan jebakan dan jalan keluar dari setiap jebakan lawan.

Satu strategi yang umum dilakukan adalah dengan menaruh beberapa keping di tempat tempat yang berbeda, barulah menghubungkan semuanya. Ini lebih efektif daripada memulainya dari tepi.

Namun apabila sudah terbiasa memainkan permainan ini, pola yang sama akan sering terlihat dan dapat memprediksi arah permainan setelahnya.

VI. KESIMPULAN

Dalam permainan hex, tidak akan ada permainan dimana hasil akhirnya adalah seri. Setiap permainan hex akan menghasilkan seorang pemenang. Hal tersebut dapat dibuktikan dengan teori graf. Selain itu, dapat dibuktikan pula bahwa dengan permainan yang sempurna, pemain pertama dapat selalu memenangkan permainan. Namun sayang sekali bahwa strategi permainan hex tidak dapat disusun dengan menggunakan teori graf. Dengan metode kombinatorial pun kemungkinan yang dapat dicapai masih sangat besar. Hal ini mirip dengan permainan catur. Yaitu hampir tidak mungkin menghafalkan seluruh posisi yang ada. Pemain tetap harus beradaptasi pada keadaan yang sedang dilalui.

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama penulis mengucap syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena hanya atas berkat dan rahmat-Nya penulis memiliki kesempatan untuk menulis makalah ini. Selain itu penulis juga ingin berterima kasih kepada Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T.,Dra. Harlili M.Sc, , serta Dr. Judhi Santoso M.Sc selaku dosen pengajar mata kuliah IF 2120 Matematika Diskrit. Penulis juga ingin berterima kasih kepada orang tua yang selalu mendukung penulis.

REFERENCES

[1] Munir. Rinaldi, *Matematika Diskrit,* Ed.6, Bandung: Informatika Bandung, 2016

[2] https://boardgamegeek.com/boardgame/4112/hex , diakses 8 Desember 2018

[3] http://repository.unpas.ac.id/15941/2/bab%202.pdf , diakses 8 Desember 2018

[4] https://www.youtube.com/watch?v=2MNalT1g3m8&feature=youtu.be , diakses 8 Desember 2018

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2018

Vinsen Marselino Andreas
13517054