Penyelesaian Square-Sum Problem Menggunakan Graf

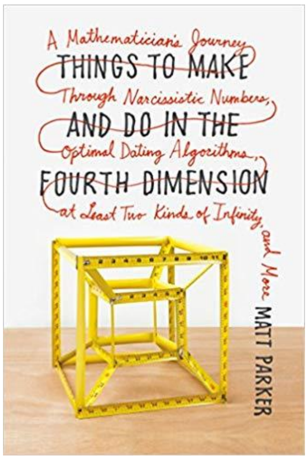
Johanes/ 13517012[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*13517012@std.stei.itb.ac.id*

***Abstrak*—Square-Sum Problem adalah sebuah teka-teki matematika. Isi dari teka-teki tersebut adalah sebagai berikut, diberikan sebuah bilangan dari 1 hingga n yang merupakan bilangan bulat, urutkanlah bilangan tersebut sedemikian rupa sehingga setiap angka yang bersebelahan, jika dijumlahkan merupakan bilangan kuadrat sempurna. Setiap angka hanya boleh ada satu kali dalam barisan tersebut. Dengan menggunakan teori graf dan lintasan Hamilton, dapat ditemukan solusi untuk Square-Sum Problem tersebut. Bentuk paling sederhana yang dikemukakan oleh Matt Parker adalah untuk n = 15. Degan membuat graf dan mencari lintasan Hamiltonnya, didapatkan solusinya adalah 8,1,15,10,6,3,13,12,4,5,11,14,2,7,9 atau sebaliknya**

***Kata Kunci*—Graf, Lintasan Hamilton, Square-Sum Problem.**

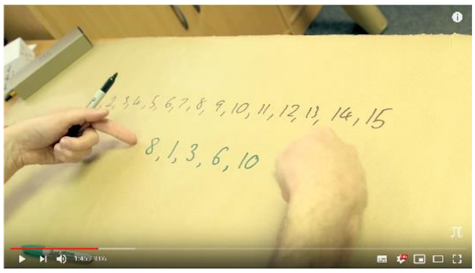
I. PENDAHULUAN

Square-Sum Problem adalah sebuah teka-teki matematika yang dikemukakan oleh seorang matematikawan Australia, Matt Parker, dalam salah satu bukunya yang berjudul Things to Make and Do in the Fourth Dimension: A Mathematician's Journey Through Narcissistic Numbers, Optimal Dating Algorithms, at Least Two Kinds of Infinity, and More.



Gambar 1. *Cover* buku karya Matt Parker
(Sumber: https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/51XuUyhP9uL._SX332_BO1,204,203,200_.jpg, diakses pada 9 Desember 2018, pukul 17.03 GMT+7)

Isi dari teka-tekinya adalah sebagai berikut, diberikan sebuah bilangan dari 1 hingga n yang merupakan bilangan bulat, urutkanlah bilangan tersebut sedemikian rupa sehingga setiap angka yang bersebelahan, jika dijumlahkan merupakan bilangan kuadrat sempurna. Setiap angka hanya boleh ada satu kali dalam barisan tersebut. Misalnya ada sebuah himpunan bilangan {1,3,6,8,10} jika diurutkan berdasarkan aturan sebelumnya maka dapat berupa: 8, 1, 3, 6, 10 yang memiliki jumlah antara dua buah bilangan bersebelahan: 9, 4, 9, 16 yang merupakan bilangan kuadrat sempurna.



Gambar 2. Contoh pengurutan 5 buah bilangan
(Sumber: Video The Square-Sum Problem- Numberphile, https://www.youtube.com/watch?v=G1m7goLCJDY, diakses pada 9 Desember 2018, pukul 17.12 GMT+7)

Matt Parker sendiri telah memberikan solusi dari masalah tersebut dengan menggunakan graf, baik dalam bukunya maupun dalam videonya.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Graf

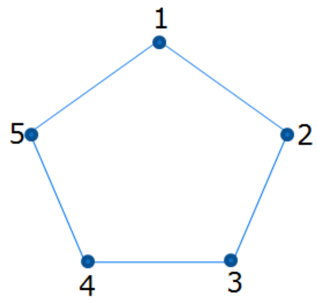
Graf adalah sesuatu yang digunakan sebagai media untuk merepresentasikan objek-objek diskrip dalam suatu lingkup dan hubungan antara objek-objek tersebut. Dalam teori graf, objek-objek tersebut dikenal dengan sebutan *vertices* atau simpul dan hubungan diantaranya disebut *edge* atau sisi.

Secara matematis dapat didefinisikan sebuah graf

$$G = (V, E)$$
$$G = Graf$$
$$V = Vertices$$
$$E = Edge$$

Dengan V adalah himpunan dari simpul-simpul pada graf G dan V tidak boleh kosong. Sedangkan E adalah himpunan dari sisi-sisi yang menghubungkan satu pasang simpul pada graf G, himpunan E dapat kosong.

Contoh sebuah graf dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf
(Sumber: https://bermatematikadotnet.files.wordpress.com/2016/05/graf-pentagon.png, diakses pada 9 Desember 2018 pukul 17.59 GMT +7)

Dapat dilihat pada Gambar 3 terdapat sebuah graf G dengan lima buah simpul dan empat buah sisi sedemikian sehingga,

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$$

2.1.1 Jenis-Jenis Graf

Graf dapat dibagi ke dalam banyak kategori dan jenis berdasarkan faktor pembandingnya. Secara garis besar graf dapat dikelompokkan seperti yang dapat dilihat pada Tabel I.

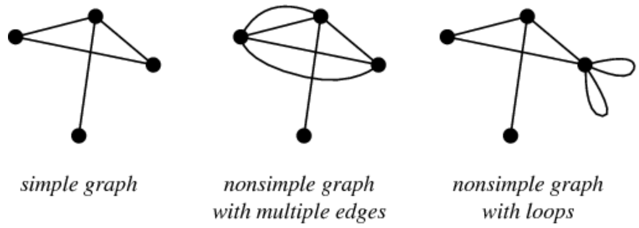
Tabel I Pengelompokan Graf

Jenis	Sisi	Sisi Ganda	Sisi Gelang
Graf Sederhana	Tak-berarah	Tidak boleh	Tidak boleh
Graf Ganda	Tak-berarah	Diperbolehkan	Tidak boleh
Graf Semu	Tak-berarah	Diperbolehkan	Diperbolehkan
Graf Berarah	Berarah	Tidak boleh	Diperbolehkan
Graf-ganda Berarah	Berarah	Diperbolehkan	Diperbolehkan

Berikut ini adalah pembagian dari graf-graf tersebut.

2.1.1.1 Berdasarkan Keberadaan Sisi Ganda

Sisi ganda adalah adanya dua atau lebih buah sisi yang sama persis menghubungkan dua buah simpul dalam suatu himpunan E. Berdasarkan keberadaan sisi ganda, sebuah graf dibagi menjadi dua kelompok yaitu graf sederhana dan graf tak-sederhana. Berikut ini adalah contoh dari pengelompokan graf berdasarkan keberadaan sisi gandanya.



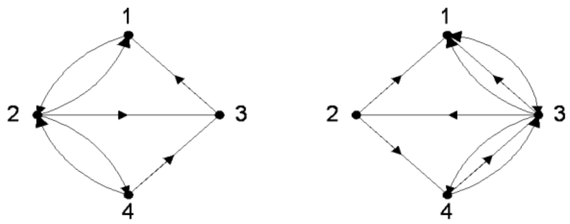
Gambar 4. Contoh pengelompokan graf berdasarkan keberadaan sisi ganda
(Sumber: http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/SimpleGraph_950.gif, diakses pada 9 Desember 2018 pukul 18.54 GMT +7)

Gambar 4 dengan tulisan *simple graph* merupakan graf sederhana tanpa sisi ganda, dengan tulisan *nonsimple graph with multiple edges* adalah graf tak-sederhana dan memiliki sisi ganda biasa juga disebut sebagai graf ganda, sedangkan untuk graf yang ketiga juga merupkan graf tak-sederhana dengan sebuah simpul memiliki sisi gelang atau *loop* yang biasa disebut sebagai graf semu.

2.1.1.2 Berdasarkan Orientasi Arah Pada Sisi

Graf dapat dikelompokkan berdasarkan arah pada sisinya. Ada graf yang sisinya tidak memiliki arah yang disebut graf tak-berarah dan yang memiliki arah disebut graf berarah. Arah pada sisi menunjukkan simpul asal dan simpul tujuan dari suatu sisi.

Gambar 4 merupakan contoh dari graf tak-berarah. Contoh dari graf berarah dapat dilihat pada Gambar 5.



(a) (b)

Gambar 5. Graf Berarah
(Sumber: http://4.bp.blogspot.com/-4pNgp9nCIUA/TvKyaGg4K6I/AAAAAAAAAEA/HEksWv977i8/s1600/Picture2.1.png, diakses pada 9 Desember 2018 pukul 19.14 GMT +7)

Gambar 5(a) merupakan contoh dari graf berarah, sedangkan Gambar 5(b) merupakan contoh dari graf berarah ganda yaitu pada sisi (3,1) yang menghubungkan simpul 3 dan simpul 1, terdapat dua buat sisi berarah yang keluar dari simpul 3 dan masuk ke simpul 1.

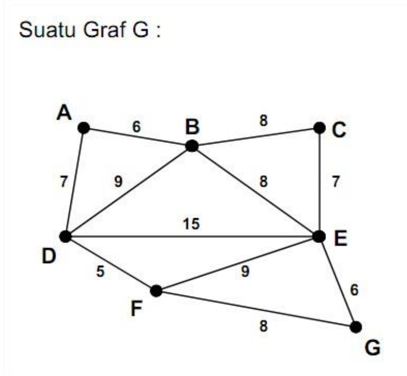
2.1.2 Terminologi pada Graf

Terdapat beberapa terminologi dalam teori graf, yaitu:

1. Ketetanggan (*Adjacent*)
   Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut dihubungkan oleh sebuah sisi. Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa simpul 1 bertetangga dengan simpul 2.
2. Bersisian (*Incidency*)
   Untuk setiap sisi dalam E, misalnya e = (a,b) dapat

dikatakan bahwa e bersisian dengan a dan bersisian dengan b.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)
Sebuah simpul dikatakan sebagai simpul terpencil jika tidak ada sisi dalam E yang bersisian dengan simpul tersebut.
4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)
Sebuah graf G disebut sebagai graf kosong jika himpunan sisinya kosong, atau grah G tidak memiliki sisi sama sekali.
5. Derajat (*Degree*)
Derajat dari sebuah simpul merupakan jumlah dari sisi-sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Misalnya pada Gambar 3, setiap simpulnya memiliki derajat dua. Graf pada Gambar 3 dapat juga disebut sebagai graf lingkaran karena merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya memiliki derajat dua atau graf teratur karena setiap simpulnya memiliki derajat yang sama yaitu dua.
6. Lintasan (*Path*)
Misalkan ada sebuah lintasan yang panjangnya n, dimulai dari simpul v_0 hingga simpul v_n yang merupakan simpul pada graf G maka lintasan tersebut adalah barisan selang-seling antara simpul dan sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2. V_2, …, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, …, $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.
7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)
Sebuah siklus adalah lintasan yang simpul awal dan simpul akhirnya adalah simpul yang sama, misalnya v_0. Pada Gambar 3 dapat dilihat jelas bahwa terdapat sebuah sirkuit yang dimulai dari simpul 1 dan berakhir pada simpul 1 melalui simpul 2, 3, 4, dan 5.
8. Terhubung (*Connected*)
Dua buah simpul dapat dikatakan terhubung jika ada lintasan yang menghubungkan keduanya. Sebuah graf dikatakan graf terhubung jika untuk setiap pasangan simpul pada V minimal terdapat sebuah lintasan yang menghubungkannya. Jika tidak demikian, maka graf tersebut dikatakan graf tak-terhubung
9. Upagraf (*Subgraf*) dan Komplemen Upagraf
Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.
Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.
10. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)
Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari G = (V, E) dikatakan upagraf rentang jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).
11. *Cut-Set*
Cut-Set adalah sebuah himpunan beranggotakan sisi dari suatu graf G yang bilamana sisi dibuang dari graf G akan membuat graf G menjadi tidak terhubung. Jika *Cut-Set* dibuang, maka sebuah graf terhubung G akan selalu terpisah menjadi dua buah komponen. Sebuah himpunan sisi bukan sebuah *Cut-Set* jika himpunan bagiannya ada yang merupakan *Cut-Set*.
12. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)
Sebuah graf G disebut graf berbobot jika setiap sisi pada E memiliki bobot atau nilai. Contoh dari graf berbobot dapat dilihat pada Gambar 6.

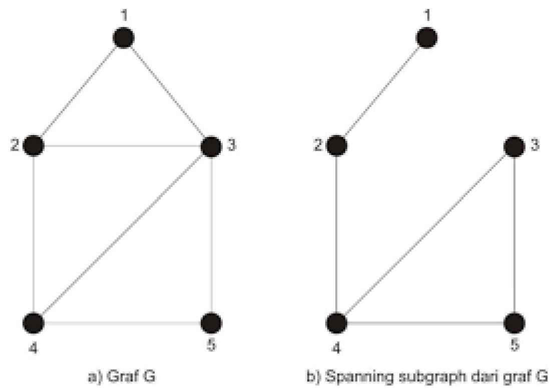


Gambar 6. Graf berbobot
(Sumber: http://2.bp.blogspot.com/-uzXRCFvBsW0/TaG9e36L_yI/AAAAAAAABI4/hzEDB7lrz90/s1600/1.jpg, diakses pada 9 Desember 2018 pada pukul 19.50 GMT +7)

2.2 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Suatu lintasan disebut sebagai lintasan Hamilton jika lintasan tersebut melewati setiap simpul pada V tepat satu kali. Sedangkan sirkuit Hamilton adalah sebuah sirkuit pada suatu graf G yang melewati setiap simpulnya tepat satu kali, kecuali simpul asalnya karena sebuah sirkuit akan mulai dan berakhir pada simpul yang sama.

Jika sebuah graf memiliki lintasan Hamilton di dalamnya, maka graf tersebut merupakan graf semi-Hamilton. Sedangkan, jika terdapat sirkuit Hamilton di dalamnya, maka graf tersebut merupakan graf Hamilton. Contoh dari graf Hamilton dan graf semi-Hamilton dapat dilihat pada Gambar 7.



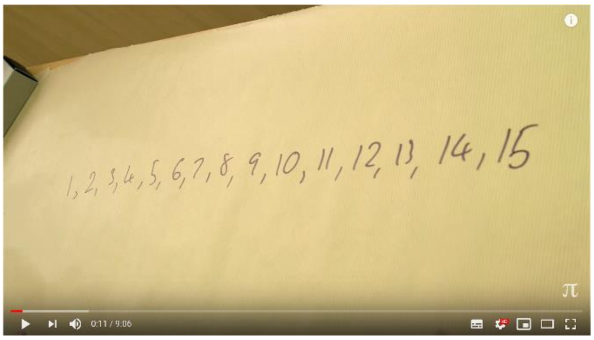
Gambar 7. Graf G dan upagraf merentangnya
(Sumber: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSCBiCRHKKHqIKpWUb-Ce6jkwNkAh3qnd0HQDDOAHJgOtSX1gfy, diakses pada 9 Desember 2018 pukul 19.59 GMT +7)

Pada Gambar 7(a) dapat dilihat bahwa terdapat sebuah sirkuit Hamilton yaitu mulai dasi simpul 1 lalu ke simpul 3, 5, 4, 2, dan akhirnya kembali ke simpul 1 dengan hanya melewati setiap simpul tepat hanya sekali kecuali simpul 1 sebagai simpul awal dan simpul akhir. Sehingga graf pada Gambar 7(a) disebut sebagai graf Hamilton. Sedangkan pada Gambar 7(b), graf tersebut hanya memiliki sebuah lintasan Hamilton dan tidak terdapat sirkuit. Dengan dimulai dari simpul mana pun, graf tersebut tidak mungkin membentuk sirkuit. Namun pada graf tersebut terdapat beberapa lintasan. Salah satu diantaranya adalah lintasan yang dimulai dari simpul 1 lalu ke simpul 2, 4, 5, dan berakhir pada simpul 3. Satu lagi lintasan lainnya adalah dengan membalikkan urutan simpul dari lintasan sebelumnya. Karena pada graf tersebut hanya terdapat lintasan Hamilton, maka graf pada Gambar 7(b) disebut sebagai graf semi-Hamilton.[1]

III. Penyelesaian Square-Sum Problem Menggunakan Graf

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, Square-Sum Problem adalah sebuah teka-teki di matematika. Isi dari teka-teki tersebut adalah sebagai berikut, diberikan sebuah bilangan dari 1 hingga n yang merupakan bilangan bulat, urutkanlah bilangan tersebut sedemikian rupa sehingga setiap angka yang bersebelahan, jika dijumlahkan merupakan bilangan kuadrat sempurna. Setiap angka hanya boleh ada satu kali dalam barisan tersebut.

Square-Sum Problem yang dikemukakan oleh Matt Parker adalah Square-Sum Problem dengan n = 15.



Gambar 8. Square-Sum Problem dengan n = 15
(Sumber: Video The Square-Sum Problem- Numberphile, https://www.youtube.com/watch?v=G1m7goLCJDY, diakses pada 9 Desember 2018, pukul 20.12 GMT+7)

Matt Parker meminta kita untuk mengurutkan bilangan bulat dimulai dari 1 hingga 15 sedemikian rupa sehingga setiap angka yang bersebelahan, jika dijumlahkan merupakan bilangan kuadrat sempurna. Percobaan paling mudah adalah dengan cara coba-coba, misalnya dimulai dari angka 1. Contoh sederhana pengerjaan Square-Sum Problem dapat dilihat pada Tabel II.

Tabel II Percobaan pengerjaan dengan cara coba-coba

No.	Sebelum	Sesudah	Jumlah
1		1	
2	1	1,3	4
3	1,3	1,3,6	4,9
4	1,3,6	1,3,6,10	4,9,16
5	1,3,6,10	8,1,3,6,10	9,4,9,16
6	8,1,3,6,10	8,1,3,6,10,15	9,4,9,16,25

Setelah langkah ke-6, maka tidak ada langkah lagi yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan barisan tersebut, Karena setelah angka 15 tidak ada angka lain yang jika dijumlahkan dapat membentuk kuadrat sempurna selain 1, namun angka 1 telah berada pada barisan sebelumnya. Begitu pula dengan angka 8, tidak ada angka lain selain angka 1 dan 8 itu sendiri yang jika dijumlahkan dengan 8 akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna, namun angka 1 juga telah berada pada barisan sebelumnya.

Walau terlihat sederhana, cara coba-coba sangat tidak efisien untuk menyelesaikan masalah ini, apalagi jika dibandingkan dengan n yang besar. Salah satu solusi yang diberikan oleh Matt Parker adalah dengan menggunakan graf dan mencari barisannya dengan mencari lintasan Hamilton pada graf tersebut.

Misalkan sebuah graf G = (V,E) dengan V merupakan himpunan bilangan dari 1 hingga n, dalam kasus ini n = 15. E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan dua buah simpul, dalam kasus ini setiap simpul adalah bilangan, dengan hubungan yaitu, jika dua buah bilangan dijumlahkan akan menjadi bilangan kuadrat sempurna. Dari graf G tersebut dicari lintasan Hamilton yang melewati semua simpul yang ada. Maka lintasan tersebut menjadi solusi dari Square-Sum Problem ini.

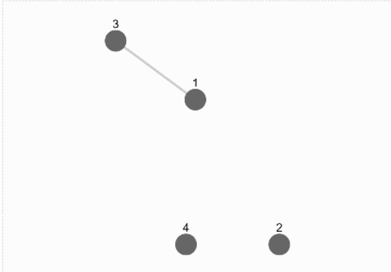
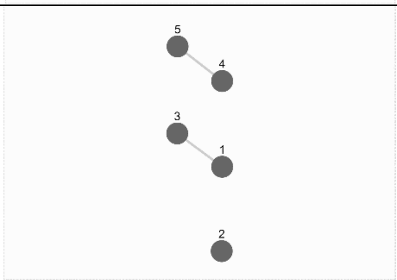
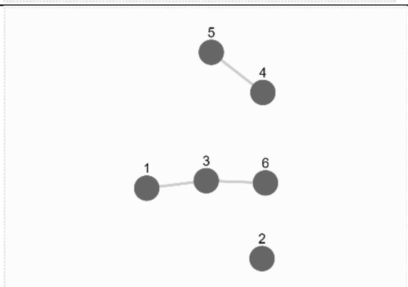
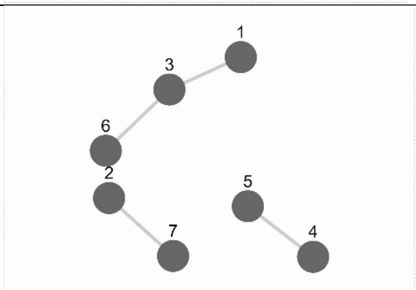
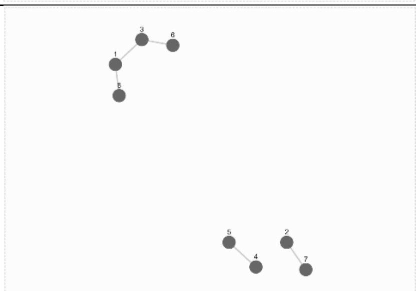
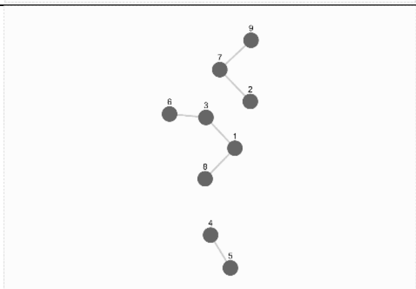
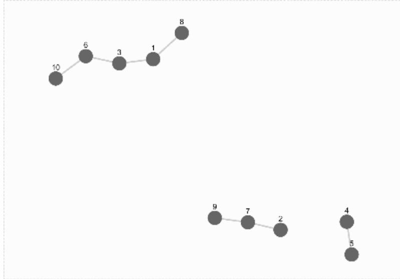
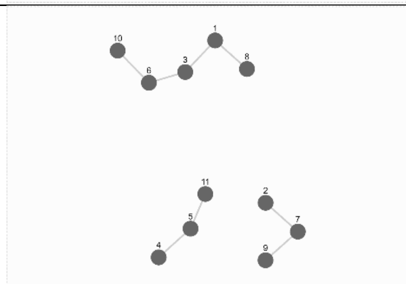
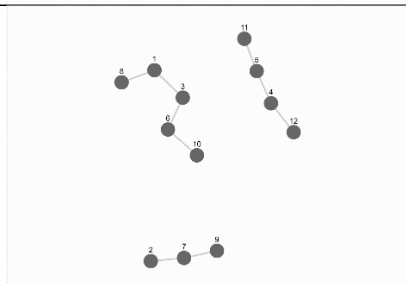
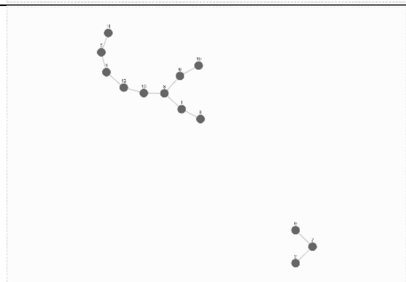
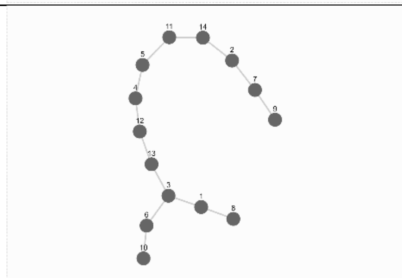
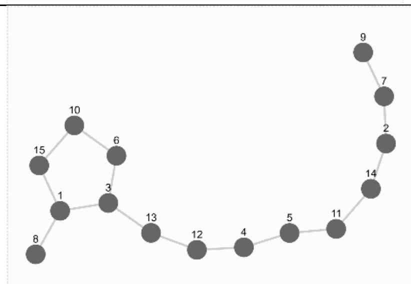
Misalkan kita menyelesaikan Square-Sum Problem dengan n - 15. Maka buatlah graf yang menggambarkan hubungan setiap bilangan dari 1 hingga 15 yang jika dijumlahkan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna. Hubungan setiap bilangan dapat dilihat pada Tabel III berikut ini.

Tabel III Hubungan antar bilangan

Angka 1	Angka 2	Jumlah	Sisi
1	3	4	(1,3)
1	8	9	(1,8)
1	15	16	(1,15)
2	7	9	(2,7)
2	14	16	(2,14)
3	6	9	(3,6)
3	13	16	(3,13)
4	5	9	(4,5)
4	12	16	(4,12)
5	11	16	(5,11)
6	10	16	(6,10)
7	9	16	(7,9)
10	15	25	(10,15)
11	14	25	(11,14)
12	13	25	(12,13)

Dari sisi yang didapat, dengan menggunakan algoritma untuk membentuk graf dari sisi, maka akan terbentuk suatu graf yang menggambarkan hubungan antar setiap bilangan. Berikut ini adalah tabel yang menggambarkan pembentukan graf tersebut dimulai dari n = 4 karena untuk n dari 1 hingga 3, semua simpulnya tidak ada yang terhubung. Graf ini dibuat dengan menambahkan satu demi satu simpul ke dalam graf sebelumnya dan membuat garis sebagai sisi yang menghubungkan dua buah bilangan yang dijumlahkan akan menghasilkan kuadrat sempurna.

Tabel IV Proses pembentukan graf untuk n = 15

Bilangan yang ditambahkan	Graf
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

(Sumber Gambar: http://jackxmorris.com/posts/square-sum, diakses pada 9 Desember 2018 pukul 20.36 GMT +7)

Dapat dilihat pada saat penambahan bilangan 14, graf sudah menjadi graf terhubung, namun tidak terdapat lintasan Hamilton pada graf tersebut, sehingga n minimum agar Square-Sum Problem ini memiliki solusi adalah 15. Untuk n = 16 dan 17 graf yang dihasilkan tetap memiliki lintasan Hamilton. Namun, seperti yang dikemukakan oleh Matt Parker, untuk n = 18 hingga n = 22, tidak dapat ditemukan solusinya. Untuk n =23 terdapat lintasan Hamilton pada grafnya, sehingga terdapat solusi untuk n = 23, namun tidak untuk n = 24.[2] Menurut Matt Parker, untuk n >= 25, pasti akan terdapat suatu barisan angka yang memenuhi aturan Square-Sum Problem. Sejauh ini, Matt Parker dan rekannya baru mencoba hingga n = 299 dan untuk semua n dengan n >= 25 dan n <= 299 semuanya mempunya solusi terhadap Square-Sum Problem.[3]

Berdasarkan Tabel III pada graf saat penambahan bilangan 15, didapatkan solusi untuk Square-Sum Problem untuk n = 15 adalah 8,1,15,10,6,3,13,12,4,5,11,14,2,7,9 dan berlaku untuk urutan sebaliknya. Setiap dua buah bilangan yang bersebelahan pada barisan di atas, jika dijumlahkan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna.

Berdasarkan link http://jackxmorris.com/posts/square-sum, terdapat kode untuk menghasilkan graf untuk solusi dari Square-Sum Problem pada link https://github.com/jxmorris12/square-sum-graphs. Kode tersebutlah yang menghasilkan gambar seperti pada Tabel III di atas.

IV. Kesimpulan

Square-Sum Problem merupakan salah satu teka-teki yang menyenangkan untuk diselesaikan. Terutama untuk n yang sangat besar akan sangat sulit untuk menemukan lintasan Hamiltonnya, sehingga dibutuhkan simulasi komputer untuk mempermudah permasalahan. Hal lain yang masih dapat dibahas mengenai Square-Sum Problem ini adalah, mengapa selalu terdapat solusi untuk n>=25? Meskipun Matt Parker dan rekannya baru mencoba hingga n = 299 namun mereka yakin bahwa untuk n> 299 pasti akan selalu ada solusinya.

V. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkatnya makalah ini dapat diselesaikan pada waktu yang tepat. Terima kasih juga kepada para dosen pembimbing mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit yang telah membimbing dan mengajarkan mengenai materi-materi graf. Semoga makalah ini dapat membantu pembaca untuk lebih memahami mengenai teori graf dan juga mengenai lintasan maupun sirkuit Hamilton.

References

[1] Rinaldi Munir, *Graf,* http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf, diakses pada 9 Desember 2018, pukul 17.54 GMT +7

[2] Numberphile, *The Square-Sum Problem – Numberphile*, https://www.youtube.com/watch?v=G1m7goLCJDY, diakses pada 9 Desember 2018, pukul 15.26

[3] Numberphile2, *The Square-Sum Problem (extra footage) – Numberphile*, https://www.youtube.com/watch?v=7_ph5djCCnM, diakses pada 9 Desember 2018, pukul 15.36

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2018

Johanes
13517012