Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :……………………………
NIM :……………………………
T.tangan:……………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Teori Bilangan, Kombinatorial
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Judhi Santoso
Senin, 6 November 2017
Waktu: 50 menit

1. Tentukan semua nilai x bilangan bulat yang memenuhi setiap persoalan berikut:
   a) $2x \equiv 1 \bmod 4$ b) $2^x \equiv 1 \bmod 32$ c) $5x \equiv 1 \bmod 61$

Jawaban:

a. Karena 1 tidak habis dibagi dengan $GCD(2,4)$, maka tidak ada solusi x yang memenuhi.

b. Satu-satunya nilai x yang memenuhi adalah 0. Tidak ada x lain yang memenuhi mengingat 1 tidak habis dibagi dengan $GCD(2,32)$.

c. $5x \equiv 1 \; mod \; 61$

$$5^{-1}.5\,.\,x \equiv 5^{-1}.1 \; mod \; 61$$
$$x \equiv 49 \; mod \; 61$$

Sehingga nilai x yang memenuhi adalah $49 + 61k$ untuk setiap k bilangan bulat.

2. Tentukan semua nilai x yang memenuhi sistem kongruensi: $x \equiv -7 \pmod{25}$; $x \equiv 3 \pmod{4}$

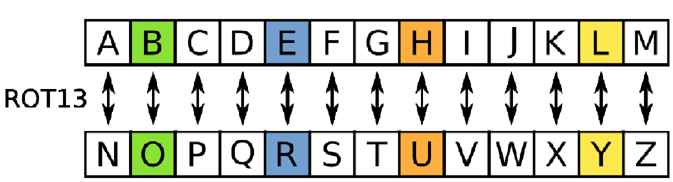
Jawaban: $x \equiv -7 \pmod{25} \rightarrow x = -7 + 25k_1$
$x \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow -7 + 25k_1 = 3 \pmod{4}$
$25k_1 \equiv 10 \pmod{4} \rightarrow k_1 \equiv 2 \pmod{4} \rightarrow k_1 = 2 + 4k_2$
$x = -7 + 25k_1 = -7 + 25(2 + 4k_2) = -7 + 50 + 100k_2 = 43 + 100k_2 \rightarrow x \equiv 43 \pmod{100}$
Jadi, $x \equiv 43 \pmod{100}$. Semua nilai x yang kongruen dengan 43 modulo 100 adalah solusinya.

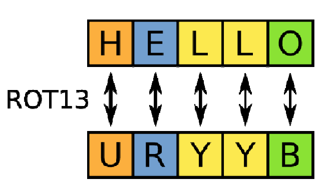
3. Hitunglah nilai dari 5^{2017} **mod** 7 dan 5^{2017} **mod** 11 dengan menggunakan Teorema Fermat

Jawaban:
Dari Fermat's Little Theorem didapat $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$,
Sehingga $5^{2017} \pmod{7} \equiv 5^{6*336+1} \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7}$
Dari Fermat's Little Theorem didapat $5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$,
Sehingga $5^{2017} \pmod{11} \equiv 5^{11*183+4} \pmod{11} \equiv 5^4 \pmod{11} \equiv 625 \pmod{11} \equiv 9 \pmod{11}$

4. Dekripsi ciphertext berikut menjadi sebuah plainteks! (kunci Caesar cipher = 13): WBUNA FRAGBFN TNAGRAT

Jawaban:





WBUNA FRAGBFN TNAGRAT → JOHAN SENTOSA GANTENG

5. Berapa banyak solusi bilangan bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ dengan syarat $0 \le x_1 \le 6$, $0 \le x_2 \le 7$, $0 \le x_3 \le 8$?

Jawaban:

Misalkan $a_1 = 6 - x_1$. Karena rentang dari x_1 adalah $0 \le x_1 \le 6$, maka rentang dari a_1 adalah $0 \le a_1 \le 6$.

Misalkan $a_2 = 7 - x_2$. Karena rentang dari x_2 adalah $0 \le x_2 \le 7$, maka rentang dari a_2 adalah $0 \le a_2 \le 7$.

Misalkan $a_3 = 8 - x_3$. Karena rentang dari x_3 adalah $0 \le x_3 \le 8$, maka rentang dari a_3 adalah $0 \le a_3 \le 8$.

Sehingga persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ dapat diubah menjadi $(6 - a_1) + (7 - a_2) + (8 - a_3) = 18$, atau jika disederhanakan menjadi $a_1 + a_2 + a_3 = 3$. Karena ruas kanan persamaan $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ (yaitu 3) lebih kecil daripada batas atas rentang a_1, a_2, a_3 > ruas kanan. Maka sama saja kita disuruh untuk mencari banyak solusi $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ dengan syarat $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $a_3 \ge 0$ yang berjumlah $C(3+3-1, 3) = C(5, 3) = 10$.

6. Berapa banyak kata baru yang dapat dibentuk dari kata **MISSISSIPPI** jika
   a) semua huruf dipakai? b) tidak ada 2 huruf **P** yang berurutan? c) ada setidaknya 2 huruf **S** yang berurutan?

Jawaban:

a. Terdapat $\frac{11!}{2!4!4!} = 34650$ kemungkinan kata yang dapat dibentuk.

b. Terdapat beberapa alternatif menyelesaikan soal ini:

   i. Pertama, hitung jumlah kemungkinan dengan semua P dibuang, sehingga kata awal menjadi **MISSISSII.** Terdapat $\frac{9!}{4!4!} = 630$ kemungkinan kata yang dapat dibentuk.

   Kedua huruf P yang dibuang dapat diletakkan di antara huruf apapun.

   _M_I_S_S_I_S_S_I_I_

   Terdapat 10 tempat yang mungkin untuk meletakkan kedua huruf P, sehingga terdapat $C(10,2) = 45$ kemungkinan untuk meletakkannya. Dengan demikian, terdapat $\frac{9!}{4!4!} \times C(10,2) = 630 \times 45 = 28350$ kemungkinan kata yang dapat dibentuk.

   ii. Karena hanya terdapat 2 huruf P, kedua huruf P dapat dianggap sebagai satu kesatuan. Jika demikian, jumlah kata baru yang terbentuk dengan huruf P selalu berurutan adalah $\frac{10!}{4!4!} = 6300$ kata. Dengan demikian, jumlah kata baru yang terbentuk tanpa 2 huruf P yang berurutan adalah $\frac{11!}{2!4!4!} - \frac{10!}{4!4!} = 28350$ kata.

c. Pertama, perlu dicari jumlah kemungkinan kata dengan semua S dibuang, sehingga kata awal menjadi **MIIIPPI**. Terdapat $\frac{7!}{4!2!} = 105$ kemungkinan kata yang dapat dibentuk.

Huruf S yang dibuang dapat diletakkan di antara huruf apapun.

Terdapat 8 tempat yang mungkin untuk meletakkan keempat huruf S, sehingga terdapat $C(8,4) = 70$ kemungkinan untuk meletakkannya. Dengan demikian, terdapat $\frac{7!}{4!2!} \times C(8,4) = 105 \times 70 = 7350$ kemungkinan kata yang dibentuk jika semua S dibuang.

Untuk mendapatkan jumlah kata dengan setidaknya 2 S berurutan, hasil dari poin (a) tinggal dikurang dengan hasil yang didapat tadi, sehingga jumlah kemungkinan kata menjadi $\frac{11!}{2!4!4!} - \frac{7!}{4!2!} \times C(8,4) = 34650 - 7350 = \mathbf{27300}$ kemungkinan.

Perlu diperhatikan bahwa huruf S tidak dapat dianggap sebagai satu kesatuan. Jika satu pasang huruf S dianggap sebagai satu huruf **SS**, sedangkan sisa dua huruf S lainnya dibiarkan, maka kata yang mengandung **SS** S dan S **SS** akan dianggap kata yang berbeda. Jika keempat huruf S dianggap sebagai dua huruf **SS**, maka kombinasi **SSS** menjadi tidak mungkin. Pada soal dispesifikasi bahwa kata **setidaknya** mengandung 2 S yang berurutan, sehingga tidak harus semua S berpasangan dan diperbolehkan terdapat 1 S yang terpisah sendiri asalkan 3 S lainnya berurutan.

7. Terdapat sebuah *password* yang terdiri dari 6 buah karakter-karakter angka (0,1,2,..,9). Terdapat pula sebuah mesin penebak *password* yang bekerja dengan cara mencoba semua kemungkinan password. Mesin tersebut dapat bekerja dengan kecepatan 20 *password* per detik. Tentukan waktu maksimal yang diperlukan mesin untuk memecahkan *password* tersebut jika dketahui kalau tiga karakter pertama dari *password* tersebut adalah bilangan prima!

Jawaban:

Dari 0 hingga 9, yang merupakan bilangan prima adalah 2,3,5, dan 7. Maka jumlah kemungkinan password adalah 4 x 4 x 4 x 10 x 10 x 10 = 64000 kemungkinan.
Maka waktu maksimal yang dibutuhkan untuk memecahkan password adalah 64000/20 = 3200 detik.