Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Induksi Matematika
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili, Judhi Santoso
Senin, 11 September 2017
Waktu: 50 menit

1. Jika Andi berolahraga maka ia tidak berkebun. Andi tidak berolahraga jika dan hanya jika hari sedang hujan. Tapi, hari ini sedang hujan dan Andi tidak berkebun. Buktikan dengan tabel kebenaran kalau Andi tidak berolahraga!

Jawaban:

p : Andi berolahraga
q : Andi berkebun
r : Hari sedang hujan
Premis: $p \rightarrow \sim q$, $\sim p \leftrightarrow r$, $r \wedge \sim q$
Kesumpulan: $\sim p$
Tabel:

p	q	r	~p	~q	~r	p → ~q	~p ↔ r	r ∧ q
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0

Suatu kesimpulan dikatakan sahih bila saat semua premis benar, kesimpulan juga benar. Dapat dilihat di baris ke 7 saat semua premis benar, kesimpulan Andi tidak berolahraga juga benar.

2. Tyrion, Olenna, dan Littlefinger sedang diinterogasi dengan *polygraph* mengenai pembunuhan Joffrey. Mereka bertiga dicurigai dan memberikan argumen sebagai berikut.
   - Tyrion: “Jika Olenna tidak ikut membunuh Joffrey, tetapi Littlefinger ikut, maka saya tidak ambil peran.”
   - Olenna: “Jika Tyrion tidak membunuh Joffrey, maka saya pun tidak.”
   - Littlefinger: “Jika Olenna membunuh Joffrey, maka saya dan Tyrion tidak ambil peran.”

   Ternyata hasil *polygraph* menunjukkan hanya Tyrion yang berkata jujur. Jadi, siapakah yang membunuh Joffrey?
   (Petunjuk: Misalkan: p: Tyrion tidak membunuh Joffrey, q: Olenna tidak membunuh Joffrey, r: Littlefinger tidak membunuh Joffrey)

Jawaban: Misalkan.

p: Tyrion tidak membunuh Joffrey.
q: Olenna tidak membunuh Joffrey.
r: Littlefinger tidak membunuh Joffrey.

Pernyataan masing-masing orang dapat direpresentasikan menjadi

Tyrion: $(q \wedge \sim r) \rightarrow p$

Olenna: $p \rightarrow q$

Littlefinger: $\sim q \rightarrow (p \wedge r)$

Jika dibuat tabel kebenarannya, didapat

p	q	r	$(q \wedge \sim r) \rightarrow p$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F

Kondisi hanya Tyrion yang jujur terjadi saat *q* dan *r* salah, sedangkan *p* benar. Jadi, Joffrey dibunuh oleh Olenna dan Littlefinger.

3. Misalkan *A* dan *B* adalah sebuah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan bahwa $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} = B$, sebutkan hukum himpunan yang digunakan pada setiap langkah pengerjaan.

Jawaban:

$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{(\bar{B})})$ (Hukum De Morgan)

$= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ (Hukum Involusi)

$= (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ (Hukum Komutatif x2)

$= B \cap (A \cup \bar{A})$ (Hukum Distributif)

$= B \cap U$ (Hukum Komplemen)

$= B$ (Hukum Identitas)

4. Diantara bilangan 1 - 500, tentukan banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 tetapi tidak bisa dibagi 3 dan 5!

Jawaban:

Himpunan bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 :

$$|A| = \lfloor\frac{500}{2}\rfloor = 250$$

$$|B| = \lfloor\frac{500}{7}\rfloor = 71$$

KPK dari 2 dan 7 adalah 14, maka

$$|A \cap B| = \lfloor\frac{500}{14}\rfloor = 35$$

Untuk selanjutnya, himpunan $|A \cap B|$ akan disebut himpunan $|E|$, sehingga $|E| = 35$

Himpunan bilangan yang habis dibagi 3 dan 5 :

$$|C| = \lfloor\frac{500}{2}\rfloor = 166$$

$$|D| = \lfloor\frac{500}{7}\rfloor = 100$$

KPK dari 2 dan 7 adalah 15, maka

$$|C \cap D| = \lfloor\frac{500}{15}\rfloor = 33$$

Untuk selanjutnya, himpunan $|C \cap D|$ akan disebut himpunan $|F|$, sehingga $|E| = 35$

Anggota himpunan bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 tetapi tidak habis dibagi 3 dan 5 adalah anggota himpunan bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 dikurangi anggota himpunan bilangan yang habis dibagi 2, 3, 5, dan 7. Dalam persamaan, bilangan itu sama dengan $|E \cap F|$.

Himpunan bilangan yang habis dibagi 2, 3, 5, dan 7

$$|E \cap F| = \lfloor \frac{500}{210} \rfloor = 2$$

Sehingga jumlah anggota himpunan bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 tetapi tidak habis dibagi 3 dan 5 adalah

$$|E| - |E \cap F| = 35 - 2 = 33$$

5. Buktikan dengan induksi matematika bahwa, jika A_1, A_2, ..., A_n adalah himpunan, maka

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

Jawaban:

Basis induksi: $n = 1$

$A_1 \cap B = A_1 \cap B$, sehingga pernyataan berlaku untuk basis.

Langkah induksi: $n = k$

Jika pernyataan diasumsikan benar untuk $n = k$, maka pernyataan untuk $n = k + 1$, yaitu

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) \cup B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B)$$

perlu dibuktikan benar. Menggunakan hukum asosiatif dan distributif himpunan, dari sebelah kiri persamaan,

$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) \cup B = ((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}) \cup B$ (Hukum Asosiatif)

$= ((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cup B) \cap (A_{k+1} \cap B)$ (Hukum Distributif)

$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B)$ (Substitusi)

Karena sebelah kanan persamaan dapat diturunkan dari sebelah kiri persamaan, kedua sisi persamaan ekivalen dan pernyataan berlaku untuk $n = k + 1$.

Dengan demikian, pernyataan

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

berlaku.

Catatan: soal di atas mengandung kesalahan, seharusnya: $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B)$