

# Aplikasi Kombinatorial dan Himpunan pada Permainan Bulls and Cows

Mohammad Husein Amrullah, 13516046

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13516046@std.stei.itb.ac.id, mhuseinamr@gmail.com

**Abstrak**—*Bulls and Cows* adalah sebuah permainan memecahkan kode yang dimainkan oleh dua orang. Salah satu pemain membuat sebuah kode berupa bilangan 4 digit tanpa angka ada angka berulang, sedangkan pemain yang lain berusaha menebak angka tersebut. Untuk setiap tebakan yang diberikan, pemain akan mendapatkan tanggapan berupa jumlah *bull* (angka yang benar pada posisi yang sesuai) dan *cow* (angka yang benar namun pada posisi yang salah). Pada makalah ini, akan dibahas mengenai aplikasi dari kombinatorial dalam pembuatan kode *Bulls and Cows*, dan aplikasi himpunan dalam pemecahan kode tersebut.

**Kata kunci**—himpunan, kombinatorial, permainan

## I. PENDAHULUAN

*Bulls and Cows* adalah sebuah permainan memecahkan kode yang dapat dimainkan menggunakan pena dan kertas. Permainan ini biasanya dimainkan oleh dua orang. Namun, telah terdapat banyak situs *online* yang menyediakan program *Bulls and Cow*, sehingga permainan ini juga dapat dimainkan oleh satu orang (melawan komputer).

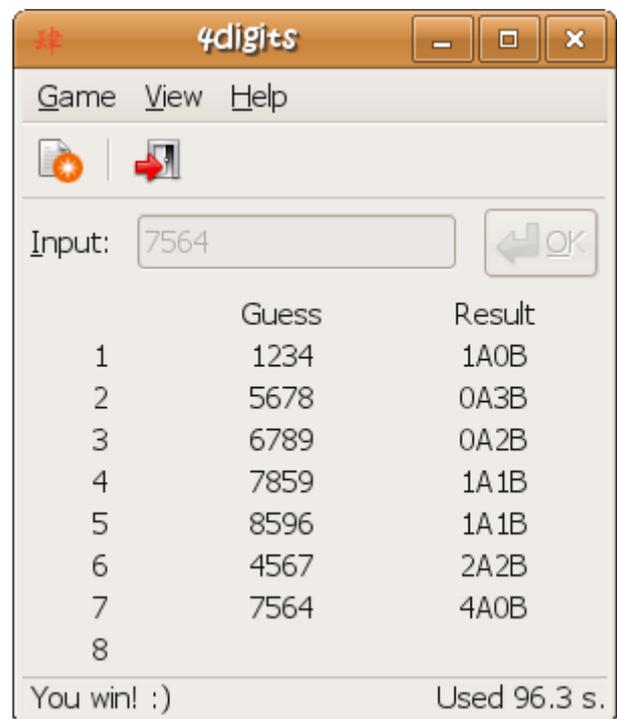
Tidak diketahui pasti kapan permainan ini pertama kali diciptakan atau siapa yang menciptakannya. Pada sekitar tahun 1960, permainan ini mulai mendapat perhatian ketika J. M. Grochow dari MIT mengimplementasikan permainan ini pada komputer dengan menggunakan bahasa PL/I pada sistem operasi Multics [1].

Permainan ini memiliki aturan yang sederhana, bahkan dapat dimainkan oleh anak-anak yang telah memiliki pemahaman yang cukup mengenai angka. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, dibutuhkan dua pemain. Salah satu pemain menjadi pembuat kode, sedangkan pemain yang lain menjadi penebak kode. Kode pada permainan *Bulls and Cows* merupakan bilangan 4 digit tanpa angka berulang (variasi dari game ini membolehkan pengulangan angka dan dapat menggunakan 3, 5, 6 atau jumlah digit yang lain).

Pertama-tama, salah satu pemain membuat sebuah kode. Kode ini tidak diketahui oleh pemain kedua. Kemudian, pemain kedua memberikan tebakan terhadap kode yang dibuat pemain pertama. Selanjutnya, pemain pertama akan memberikan tanggapan berupa jumlah *bulls* dan jumlah *cows* yang diperoleh oleh pemain kedua. Sebuah *bull* adalah satu angka tebakan yang terdapat pada kode dengan posisi yang benar, sedangkan sebuah *cow* adalah satu angka tebakan yang terdapat pada kode namun

dengan posisi yang salah. Proses menebak dan menanggapi ini akan terus berlangsung hingga pemain kedua berhasil menebak kode dengan benar [2].

Untuk memperjelas konsep *bull* dan *cow*, diberikan contoh sebagai berikut. Misal pemain pertama membuat kode 9431. Kemudian, pemain kedua membuat tebakan 1234. Maka, pemain pertama akan memberikan tanggapan berupa 1 *bull* dan 2 *cow*. Satu *bull* yaitu angka 3, sedangkan dua *cow* yaitu angka 1 dan 4.



Gambar 1: 4digits, salah satu implementasi program *open source* untuk permainan *Bulls and Cows* (Sumber: <http://fourdigits.sourceforge.net/>)

Pada pengembangannya, muncul berbagai variasi dari permainan ini. Salah satunya adalah permainan *Mastermind*. Permainan *Mastermind* merupakan salah satu permainan yang cukup populer di Amerika Serikat pada sekitar tahun 1970. Permainan ini memiliki aturan yang sangat mirip dengan *Bulls and Cows*, tetapi menggunakan sebuah papan khusus, dan penggunaan angka digantikan dengan bola-bola yang

mempunyai 6 warna. Pada *Mastermind* juga diperbolehkan untuk membuat kode menggunakan satu warna untuk beberapa bola sekaligus. Dibandingkan dengan *Bulls and Cows*, permainan *Mastermind* sedikit lebih mudah karena hanya terdapat 6 warna yang berbeda (bandingkan dengan 10 angka pada *Bulls and Cows*).

Salah satu variasi permainan *Bulls and Cows* yang lain adalah *WORD*, yang pada dasarnya adalah permainan *Bulls and Cows* tetapi dengan menggunakan huruf sebagai pengganti angka. Aturan lain yang ditambahkan pada permainan *WORD* yaitu bahwa kode yang dibuat pada permainan tersebut haruslah merupakan kata yang valid (dalam bahasa Inggris). Permainan *WORD* ini tersedia dalam platform Android dan dapat dimainkan secara *online* [3].

## II. LANDASAN TEORI KOMBINATORIAL

Kombinatorial (*combinatoric*) adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang ingin kita peroleh dengan kombinatorial ini adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunannya [4]. Berikut adalah beberapa contoh masalah-masalah dalam kombinatorial:

1. Misalkan nomor plat mobil di negara X terdiri atas 5 angka diikuti dengan 2 huruf, dengan angka pertama tidak boleh 0. Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?
2. Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?
3. Dari 20 anggota fraksi X di DPR, akan dibentuk sebuah komisi yang beranggotakan 6 orang. Berapa banyak cara memilih anggota komisi bila seorang anggota bernama A harus termasuk di dalam komisi tersebut?

Cara paling sederhana untuk menyelesaikan persoalan di atas adalah dengan mengenumerasi semua kemungkinan jawabannya. Untuk masalah dengan jumlah objek yang sedikit, pengenumerasian masih dapat dilakukan. Namun, untuk masalah dengan jumlah objek yang sangat banyak, cara enumerasi jelas tidak sangkil. Oleh karena itu, digunakanlah kombinatorial untuk menyelesaikan masalah-masalah semacam ini tanpa perlu mengenumerasi semua kemungkinan.

### A. Percobaan

Kombinatorial didasarkan pada hasil yang diperoleh dari suatu percobaan (*experiment*). Percobaan adalah proses fisik yang hasilnya dapat diamati. Contoh-contoh percobaan dan hasilnya antara lain:

1. Melempar dadu. Enam hasil percobaan yang mungkin untuk pelemparan dadu adalah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
2. Memilih lima orang wakil dari 100 orang mahasiswa. Hasil yang diperoleh adalah perwakilan yang beranggotakan lima orang mahasiswa kemungkinan perwakilan yang dapat dibentuk banyak sekali.
3. Menyusun jumlah kata yang panjangnya 5 huruf yang

dapat dibentuk dari huruf-huruf  $a, b, c, d, e$ , tidak boleh ada huruf yang berulang di dalam kata. Hasil yang diperoleh adalah string yang disusun oleh huruf-huruf tersebut, misalnya  $abcde, abcd, \text{ dan seterusnya}$ .

### B. Kaidah Dasar Menghitung

Di dalam kombinatorial, terdapat dua kaidah dasar yang digunakan untuk menghitung, yaitu kaidah perkalian (*rule of product*) dan kaidah penjumlahan (*rule of sum*).

1. Kaidah perkalian (*rule of product*). Bila percobaan 1 mempunyai  $p$  hasil percobaan yang mungkin terjadi, percobaan 2 mempunyai  $q$  hasil percobaan yang mungkin terjadi, maka bila percobaan 1 dan 2 dilakukan, terdapat  $p \times q$  kemungkinan hasil percobaan.
2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*). Bila percobaan 1 mempunyai  $p$  hasil percobaan yang mungkin terjadi, percobaan 2 mempunyai  $q$  hasil percobaan yang mungkin terjadi, maka bila hanya satu percobaan saja yang dilakukan (percobaan 1 atau percobaan 2), terdapat  $p + q$  kemungkinan hasil percobaan.

### C. Permutasi

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian. Permutasi  $r$  dari  $n$  objek adalah jumlah kemungkinan urutan  $r$  buah objek yang dipilih dari  $n$  buah objek, dengan  $r \leq n$ , yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada objek yang sama. Jumlah susunan berbeda dari pemilihan  $r$  objek yang diambil dari  $n$  objek disebut *permutasi- $r$* , dilambangkan dengan  $P(n, r)$ , yaitu

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-(r-1)) = n! / (n-r)!$$

### D. Kombinasi

Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan. Kombinasi  $r$  elemen dari  $n$  elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut  $r$  elemen yang diambil dari  $n$  buah elemen. Nilai kombinasi  $C(n, r)$  adalah

$$C(n, r) = n! / r!(n-r)!$$

### E. Prinsip Sarang Merpati

Prinsip sarang merpati menyatakan bahwa jika  $n + 1$  atau lebih objek ditempatkan dalam  $n$  buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek. Misalkan tidak ada kotak yang berisi lebih dari dua objek, maka total jumlah objek paling banyak adalah  $n$ . Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa ada paling sedikit  $n + 1$  objek.

Prinsip sarang merpati, jika diterapkan dengan baik, akan memberikan hanya objek-objek yang ada, dan bukan memberitahukan bagaimana mencari objek tersebut dan berapa banyak. Pada masalah sarang burung merpati, prinsip ini tidak memberitahukan di sarang merpati mana yang berisi lebih dari dua ekor merpati.

### III. LANDASAN TEORI HIMPUNAN

Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*. Objek yang terdapat di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Kita katakan bahwa himpunan mengandung elemen-elemennya.

Jika diketahui sebuah himpunan terbatas dan tidak terlalu besar, kita bisa menyajikan himpunan dengan cara mengenumerasi, artinya menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya suatu himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya. Contohnya himpunan  $A$  yang berisi empat anggota 1, 2, 3, dan 4 dapat ditulis sebagai  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Himpunan yang tidak memiliki satupun elemen disebut dengan himpunan kosong dan dilambangkan dengan notasi  $\emptyset$  atau  $\{ \}$ .

Sebuah himpunan dapat merupakan bagian dari himpunan lain. Himpunan  $A$  dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan  $B$  jika dan hanya jika setiap elemen  $A$  merupakan elemen dari  $B$ . Dalam hal ini,  $B$  dikatakan *superset* dari  $A$ . Notasi dari himpunan bagian adalah  $A \subseteq B$ .

Untuk sembarang himpunan  $A$  berlaku hal-hal sebagai berikut

1.  $A$  adalah himpunan bagian dari  $A$  itu sendiri (yaitu,  $A \subseteq A$ ).
2. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari  $A$  ( $\emptyset \subseteq A$ ).
3. Jika  $A \subseteq B$  dan  $B \subseteq C$ , maka  $A \subseteq C$ .

### IV. APLIKASI KOMBINATORIAL PADA BULLS AND COWS

#### A. Jumlah Kemungkinan Kode yang dapat Dibuat

Pada *Bulls and Cows* dengan aturan standar, jumlah kemungkinan kode yang dibuat adalah permutasi 4 angka diambil dari 10 angka, yaitu

$$P(10, 4) = 10! / (10 - 4)! = 5040$$

Secara umum, untuk permainan *Bulls and Cows* dengan  $k$  digit, jumlah semua kemungkinan kode yang dapat dibuat adalah permutasi  $k$  dari 10 angka, yaitu

$$P(10, k); \text{ dengan } k \leq 10$$

Sedangkan jika pada kode diperbolehkan adanya digit berulang, maka setiap digit dapat ditempati oleh satu dari 10 angka, sehingga jumlah kemungkinan semua kode dengan  $k$  digit yang dapat dibuat adalah

$$10 \times 10 \times \dots \times 10 \text{ (sebanyak } k \text{ kali)} = 10^k$$

Jumlah Digit	Tanpa angka berulang	Dengan angka berulang
2	90	100
3	720	1000
4	5040	10000
5	30240	100000

6	151200	1000000
7	604800	10000000
8	1814400	100000000
9	3628800	1000000000
10	3628800	10000000000

Tabel I: Jumlah kemungkinan kode *Bulls and Cows* untuk  $k$  hingga 10 digit

#### B. Jumlah Kemungkinan Tanggapan terhadap Tebakan

Tanggapan yang diberikan terhadap tebakan berupa jumlah *bull* dan jumlah *cow* yang didapatkan berdasarkan tebakan tersebut. Jumlah maksimum kemungkinan tanggapan terhadap suatu tebakan ditentukan oleh rumus berikut

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2} - 1$$

Nilai tersebut perlu dikurangi 1 karena kasus dengan jumlah *bull* sebanyak  $(k - 1)$  dan jumlah *cow* sebanyak 1 tidak mungkin terjadi. Jika semua angka pada tebakan sesuai dengan angka yang ada pada kode, dan sebanyak  $(k - 1)$  di antaranya berada pada posisi yang benar, maka berdasarkan prinsip sarang merpati (*pigeonhole principle*), angka terakhir haruslah terletak pada satu posisi yang tersisa, sehingga angka tersebut pasti juga berada pada posisi yang benar [5].

Untuk nilai  $k = 4$ , maka jumlah maksimum tanggapan adalah

$$\frac{(4 + 1)(4 + 2)}{2} - 1 = 14$$

14 kemungkinan tanggapan tersebut adalah sebagai berikut:

No.	Bulls	Cows
1	0	0
2	0	1
3	0	2
4	0	3
5	0	4
6	1	0
7	1	1
8	1	2
9	1	3
10	2	0
11	2	1
12	2	2
13	3	0
14	4	0

Tabel II: Kemungkinan tanggapan untuk  $k = 4$

### V. APLIKASI HIMPUNAN PADA BULLS AND COWS

Pada permainan *Bulls and Cows*, konsep himpunan dapat digunakan untuk membantu pemain dalam memecahkan kode. Konsep ini diterapkan dengan cara memasukkan semua kemungkinan kode pada sebuah himpunan, kemudian melakukan pemangkasan (*set pruning*) secara bertahap terhadap

himpunan tersebut sampai diperoleh satu anggota himpunan yang sesuai dengan kode [6].

Pada awal permainan, himpunan berisi semua kemungkinan kode pada *Bulls and Cows* (yaitu sebanyak 5040 untuk aturan standar). Setelah penebak memuat sebuah tebakan, maka pembuat kode akan memberikan tanggapan berupa jumlah *bull* dan *cow*. Dari informasi mengenai jumlah *bull* dan *cow* ini, maka penebak dapat “memangkas” beberapa kemungkinan kode pada himpunan.

Proses ini dilakukan secara berulang-ulang, sehingga ukuran himpunan semakin lama akan semakin kecil. Untuk ukuran himpunan yang cukup kecil, penebak dapat memilih salah satu kemungkinan kode pada himpunan secara acak untuk dijadikan tebakan, dan tebakan tersebut akan mempunyai peluang yang cukup besar untuk memenangkan permainan.

Untuk memilih tebakan yang dapat memangkas himpunan dengan mangkus dan sangkil, terdapat beberapa algoritma yang dapat digunakan. Salah satu algoritma yang paling sederhana adalah dengan mengurutkan angka berdasarkan frekuensi kemunculannya pada himpunan. Selanjutnya, dipilih angka-angka yang memiliki frekuensi paling kecil, untuk kemudian dijadikan tebakan.

Sebagai ilustrasi, misalkan kode yang ingin dipecahkan adalah 8420. Penebak telah berhasil memangkas himpunan sampai hanya tersisa tujuh kemungkinan:

$$\{1420, 3420, 5420, 6420, 7420, 8420, 9420\}$$

Jika pemain mengambil salah satu anggota dari himpunan tersebut, maka terdapat  $1/7$  atau 16,7% peluang untuk menebak dengan benar. Namun, jika pemain menerapkan algoritma di atas, misalnya dengan memberikan tebakan 1356, maka akan diperoleh tanggapan berupa 0 *bull* dan 0 *cow*. Dari informasi ini, maka angka 1, 3, 5, dan 6 tidak terdapat pada kode dan dapat dipangkas dari himpunan sehingga tersisa hanya tiga kemungkinan:

$$\{7420, 8420, 9420\}$$

Dari sini, pemain dapat memilih salah satu kemungkinan secara acak dengan peluang  $1/3$  atau 33% untuk menebak dengan benar.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh N. Goel (2015), algoritma di atas dapat menghasilkan tebakan yang benar dengan rata-rata 6,07 kali percobaan.

Terdapat banyak algoritma lain yang dapat memberikan tebakan benar dengan jumlah percobaan yang lebih sedikit (mendekati 5,00), namun algoritma-algoritma tersebut memerlukan komputasi yang sangat banyak (sekitar 30 milyar komputasi) sehingga kurang praktis untuk digunakan.

## VI. KESIMPULAN

*Bulls and Cows* adalah sebuah permainan yang bisa dibilang cukup tua dan sangat sederhana. Meskipun begitu, kita masih bisa menemukan keindahan dari permainan ini dengan cara melakukan analisis terhadapnya menggunakan teori-teori matematika seperti kombinatorial dan himpunan. Bahkan, dari

pembahasan sebelumnya, ternyata dibutuhkan tenaga komputasi yang cukup besar untuk menemukan solusi optimal dari permainan sederhana ini. Penulis berharap, dengan dibuatnya makalah ini, akan muncul kembali ketertarikan terhadap permainan-permainan sederhana semacam ini.

## VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama, penulis mengucapkan syukur dan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat-Nya sehingga makalah ini dapat terselesaikan dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir sebagai dosen pengajar mata kuliah Matematika Diskrit atas ilmu dan bimbingannya. Selanjutnya penulis juga mengucapkan terima kasih kepada orang tua yang selalu memberikan dukungan baik secara moral, material, maupun doa. Tak lupa juga penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan Teknik Informatika atas dukungan dan bantuannya dalam mengerjakan makalah ini.

## REFERENSI

- [1] E. W. Weisstein. “Mastermind.” Dari *MathWorld*. <http://mathworld.wolfram.com/Mastermind.html>. Diakses pada 3 Desember 2017.
- [2] Pencil and Paper Games. *Number Bulls & Cows*. <http://www.papg.com/show?1>. Diakses pada 3 Desember 2017.
- [3] Google Play Store. Word – Multiplayer Lingo. <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.efficientsciences.cowsandbulls.wordwars>. Diakses pada 3 Desember 2017.
- [4] R. Munir. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung, 2016.
- [5] J. Francis. *Strategies for playing MOO, or “Bulls and Cows”*. <https://pdfs.semanticscholar.org/d839/f794cccd174790b0cde695d3626f00caf7e1.pdf>. Diakses pada 3 Desember 2017.
- [6] N. Goel, A. Garg. *A Mathematical Approach to the Simple Bulls and Cows Code Breaking Game*. Munich: GRIN Verlag, 2015.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017



Mohammad Husein Amrullah, 13516046