Penerapan Teori Graf dalam Instant Insanity

Maha William Chandra 13516040
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
will_straw@ymail.com

Abstract**—*****Instant Insanity* atau dikenal juga dengan nama *Four Cubes Problem* merupakan sebuah permainan *puzzle* yang ditemukan pada tahun 1900 dan kemudian menjadi populer pada tahun 1960. Permainan ini memiliki aturan yang cukup sederhana untuk dapat dimainkan oleh anak-anak yaitu menyusun empat buah kubus dengan susunan warna tertentu menjadi sebuah menara sedemikian rupa sehingga tidak ada warna yang sama pada setiap sisi menara tersebut. Namun, tingkat kesulitan untuk dapat menemukan solusi dari permainan ini cukup tinggi. Pada makalah ini, penulis akan mengkaji penerapan teori graf untuk memudahkan pencarian solusi dari *puzzle Instant Insanity* ini.**

Kata kunci**—graf, *instant insanity*, matematika diskrit, *puzzle*.**

I. PENDAHULUAN

Sebuah teka-teki atau *puzzle* umumnya dikenal sebagai permainan yang digemari oleh baik orang dewasa maupun anak-anak. Permainan ini mengasah kemampuan berpikir dan logika seseorang. Mayoritas dari *puzzle* diciptakan sebagai bentuk hiburan dan solusinya dapat ditemukan menggunakan ilmu matematika dan logika. Salah satu *puzzle* yang dulu terkenal adalah *Instant Insanity* atau dikenal juga dengan nama *Four Cubes Problem.*

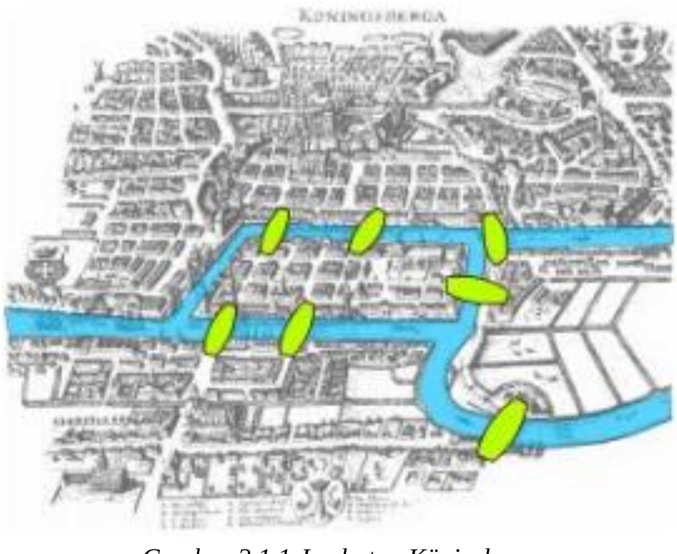
Instant Insanity diciptakan pada tahun sekitar 1900 oleh Franz Owen Armbruster dan dipopulerkan pada tahun 1967 oleh sebuah perusahaan mainan bernama Parker Brothers. *Puzzle* ini terdiri dari empat buah kubus. Setiap kubus diberi empat buah warna yang berbeda (umumnya merah, kuning, biru, dan hijau) pada permukaannya. Semua warna tersebut harus ada minimal pada satu atau lebih permukaan setiap kubus. Tujuan dari permainan ini adalah menumpuk empat kubus tersebut menjadi sebuah menara kubus dengan aturan setiap warna hanya boleh muncul sekali pada setiap sisi dari menara tersebut. Sebuah kubus memiliki enam buah permukaan dan ada empat warna yang tersedia. Oleh karena itu, terdapat banyak variasi susunan warna pada setiap kubus, sehingga setiap susunan memiliki solusi yang berbeda. Namun, untuk setiap kemungkinan susunan warna kubus dipastikan hanya terdapat satu buah solusi yang memenuhi syarat permainan.

Puzzle yang terlihat sederhana ini ternyata sulit sekali dipecahkan dengan cara coba-coba karena hanya ada satu buah solusi dari puluhan ribu kemungkinan yang ada. Solusi dari *Instant Insanity* dapat lebih mudah ditemukan dengan menggunakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit, yaitu konsep teori graf.

II. LANDASAN TEORI

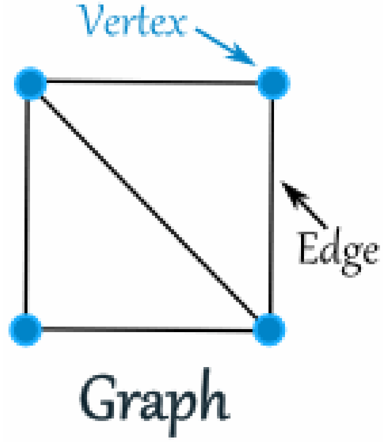
A. Teori Graf

Pada tahun 1736, seorang matematikawan bernama Leonhard Euler memecahkan sebuah permasalahan yang disebut permasalahan Jembatan Königsberg. Permasalahan tersebut menyangkut letak sektor-sektor kota tersebut yang terletak diantara sungai dengan 7 buah jembatan yang menghubungkan sektor-sektor tersebut. Kemudian muncul sebuah pertanyaan apakah seseorang dapat melakukan perjalanan dengan menyebrangi setiap jembatan tepat sekali dan kembali ke tempat semula. Euler membuktikan bahwa perjalanan dengan syarat seperti itu tidak mungkin terjadi. Pembuktian tersebut menyebabkan Euler untuk menemukan sebuah konsep yang sekarang disebut dengan Eulerian Graph. Euler dikenal sebagai Bapak Teori Graf hingga saat ini. Sejak saat itu, teori graf terus dikembangkan dan dipakai untuk menyelesaikan berbagai permasalahan seperti pencarian jarak terdekat, pewarnaan peta, menentukan apakah suatu objek dapat digambarkan secara planar, atau masalah lainnya.



Gambar 2.1.1 Jembatan Königsberg
Sumber: https://ptwiddle.github.io/MAS341-Graph-Theory/lecturenotes/lecturenotes.pdf

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut. Graf terdiri dari sepasang himpunan (V,E) dimana V merupakan himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*) dan E merupakan himpunan sisi (*Edge*) yang menghubungkan sepasang simpul. Graf G dapat ditulis dengan menggunakan notasi G = $\{V,E\}$ untuk $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$.



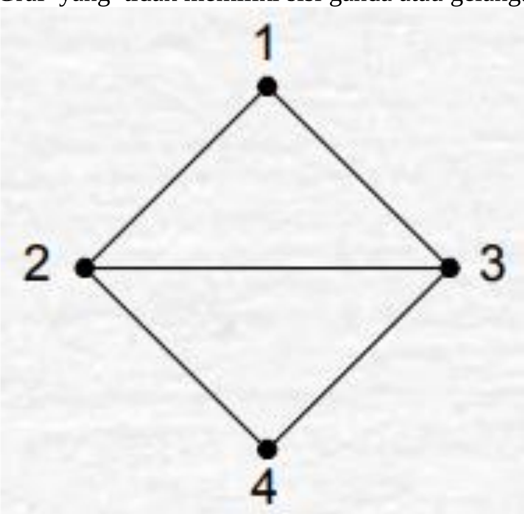
Gambar 2.1.2 Contoh Sederhana *Vertex* dan *Edge* pada Graf
Sumber:
http://www.mathsisfun.com/algebra/images/graph-vertex-edge.gif

B. Jenis-Jenis Graf

Graf dapat digolongkan beberapa hal seperti ada tidaknya sisi ganda atau gelang, jumlah simpul yang ada pada graf, maupun dari segi orientasi arah pada sisi graf.

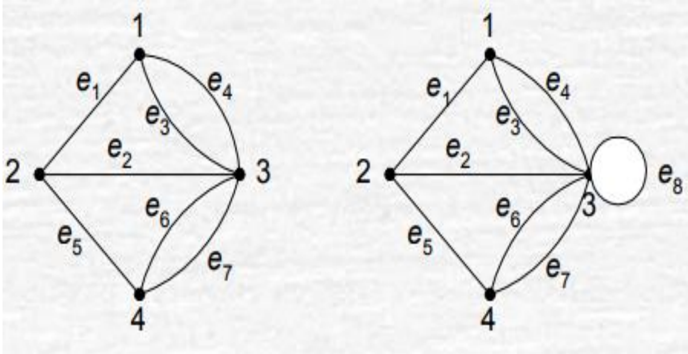
Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau kalang, graf dikelompokkan menjadi:

1. Graf Sederhana
   Graf yang tidak memiliki sisi ganda atau gelang.



Gambar 2.2.1 Graf Sederhana
Sumber:
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

2. Graf Tak Sederhana
   Graf tak sederhana dibagi lagi menjadi dua, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung 2 atau lebih sisi yang menghubungkan dua buah simpul (sisi ganda). Graf semu adalah graf yang mengandung gelang. Apabila terdapat graf yang mengandung sisi ganda dan gelang, graf tersebut digolongkan menjadi graf semu.



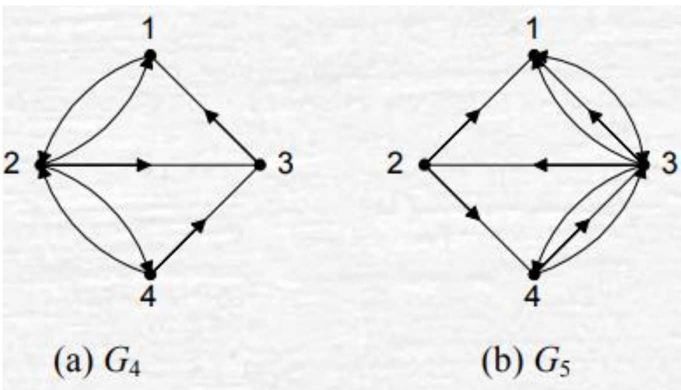
Gambar 2.2.2 Graf Ganda (kiri) dan Graf Semu (Kanan)
Sumber:
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf Berhingga
   Graf yang jumlah simpulnya berhingga (dapat dihitung).
2. Graf Tak Berhingga
   Graf yang jumlah simpulnya tidak berhingga (tidak dapat dihitung).

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dapat digolongkan menjadi dua jenis, yaitu:

1. Graf Tak Berarah
   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf ini, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi sama sekali tidak diperhatikan, sehingga (v_1, v_2) dan (v_2, v_1) adalah sisi yang sama.
2. Graf Berarah
   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah, (v_1, v_2) dan (v_2, v_1) merupakan dua sisi yang berbeda. Graf berarah yang mempunyai sisi ganda atau gelang disebut graf ganda berarah.

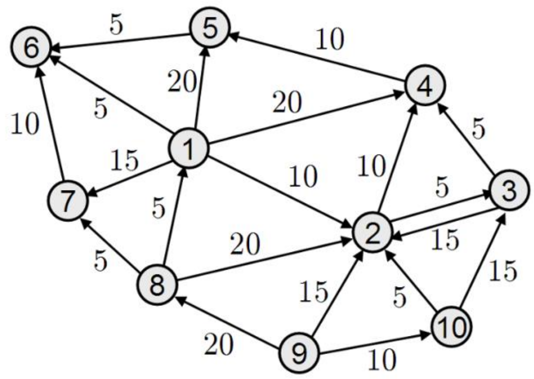


Gambar 2.2.3 Graf Berarah (kiri) dan Graf Ganda Berarah (kanan)
Sumber:
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf

C. Terminologi dalam Teori Graf

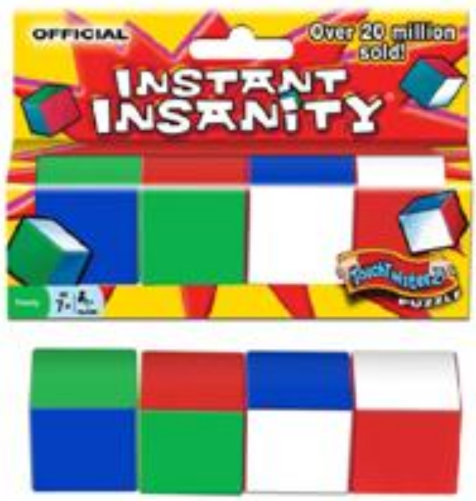
- Ketetanggaan (*Adjacent*)
  Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh satu atau lebih sisi pada graf. Pada gambar 2.2.1, simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3, tapi tidak bertetangga dengan simpul 4.
- Bersisian (*Incidency*)
  Sebuah simpul dan sebuah sisi dikatakan bersisian jika salah satu ujung dari sisi adalah simpul yang dimaksud. Contoh, pada Gambar 2.2.1, sisi (1,2) bersisian dengan simpul 1 dan 2 tapi tidak bersisian dengan simpul 3 dan 4.
- Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)
  Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya sehingga tidak terhubung dengan simpul manapun pada graf.
- Graf Kosong (*Null Graph* atau *Empty Graph*)
  Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (tidak memiliki sisi sama sekali) sehingga setiap simpul tidak terhubung dengan simpul lainnya.
- Derajat (*Degree*)
  Derajat suatu simpul adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Gelang pada suatu simpul menambahkan derajat pada simpul tersebut sebanyak dua . Pada Gambar 2.2.1, derajat dari simpul 2 adalah 3.
- Lintasan (*Path*)
  Lintasan adalah sekumpulan sisi yang menghubungkan simpul dengan simpul yang lain.
- Sirkuit atau Siklus (*Circuit* atau *Cycle*)
  Sebuah lintasan disebut sirkuit apabila berawal dan berakhir pada simpul yang sama.
- Terhubung (*Connected*)
  Dua buah simpul dikatakan terhubung jika ada lintasan yang menghubungkan keduanya. Contoh, pada Gambar 2.2.1, simpul 1 terhubung dengan simpul 4.
- Himpunan Bebas
  Himpunan bebas (independent set) adalah serangkaian simpul pada graf yang dibuat sedemikian rupa sehingga tidak ada dua simpul yang bertetangga. Contoh, pada graf di Gambar 2.2.1, {1,4} adalah himpunan bebas.
- Graf Berbobot
  Graf yang memiliki bobot pada setiap sisinya. Bobot tersebut dapat mewakili jarak, waktu atau variabel lainnya. Graf ini seringkali digunakan dalam pemecahan permasalahan seperti mencari rute terpendek suatu perjalanan. Graf berbobot juga dapat memiliki arah yang disebut sebagai graf berarah berbobot.
- Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf
  Graf G merupakan upagraf dari graf G_1 apabila setiap sisi dan simpul dari G adalah himpunan bagian dari sisi dan simpul G_1. Sebuah graf G_2 = (V_2, E_2) disebut komplemen dari G_1 terhadap G apabila $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang sebagian atau seluruh anggotanya bersisian dengan E_1 dan E_2, sehingga dapat dibentuk graf G dengan menggabungkan graf G_1 dan G_2.

Gambar 2.3.1 Contoh Graf Berbobot



Sumber: https://medium.com/@keithwhor/using-graph-theory-to-build-a-simple-recommendation-engine-in-javascript-ec43394b35a3

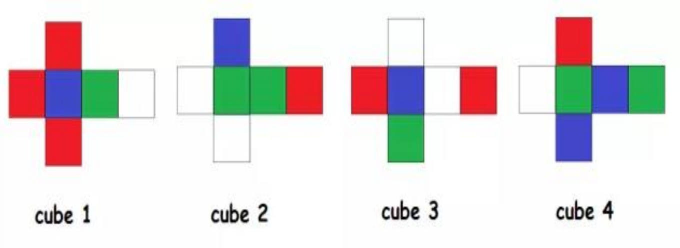
III. INSTANT INSANITY PUZZLE



Gambar 3.1.1. Permainan *Instant Insanity*
Sumber: https://www.fatbraintoys.com/toy_companies/winning_moves/instant_insanity.cfm

1. Definisi Permasalahan

Terdapat empat buah kubus dan empat warna berbeda yang akan digunakan untuk memberi warna pada setiap luas permukaan kubus. Setiap warna harus dipakai paling tidak pada satu sisi permukaan kubus. Setelah setiap warna dipakai tepat satu kali, tidak ada aturan khusus untuk dua sisi kubus lainnya sehingga mungkin saja satu warna yang sama dipakai dua kali atau tiga kali pada kubus yang sama. Ketentuan terakhir adalah distribusi warna pada setiap kubus harus bersifat unik. Tidak boleh ada dua kubus dengan susunan warna yang sama persis karena akan menyebabkan tidak adanya solusi yang memungkinkan.

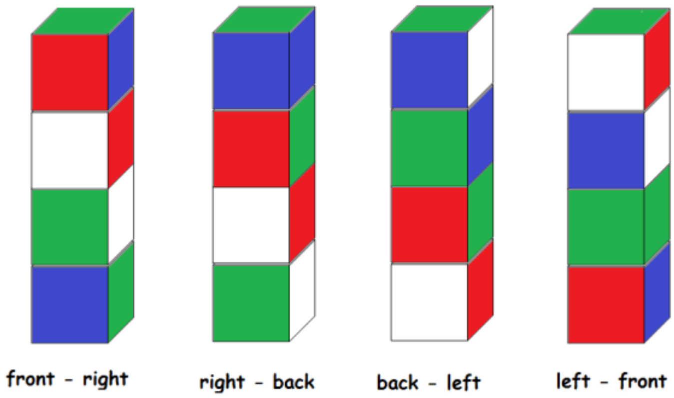


Gambar 3.1.2. Contoh Susunan Warna Setiap Kubus dengan Warna Merah, Biru, Hijau, dan Putih

Sumber: http://techieme.in/graph-theory-applications-the-instant-insanity-puzzle/

Tujuan dari permainan ini adalah menyusun empat kubus tersebut menjadi satu tumpukan sehingga setiap sisi (depan, belakang, kiri, dan kanan) tidak memiliki warna yang sama (setiap sisi menunjukkan empat warna berbeda). Warna pada dasar dan puncak menara tidak perlu diperhatikan.

Pencarian solusi dengan cara coba-coba (*trial and error*) akan sulit sekali dilakukan karena adanya banyak sekali kemungkinan susunan warna menara. Aturan perkalian pada ilmu kombinatorial membuktikan ada sebanyak $24^3 \times 3 = 41472$ susunan kubus yang unik. Teori graf dapat diterapkan dalam pencarian solusi permasalahan ini dengan mengurangi jumlah susunan unik yang harus diperiksa secara signifikan walaupun masih harus dilakukan uji coba menggunakan metode *trial and error*.

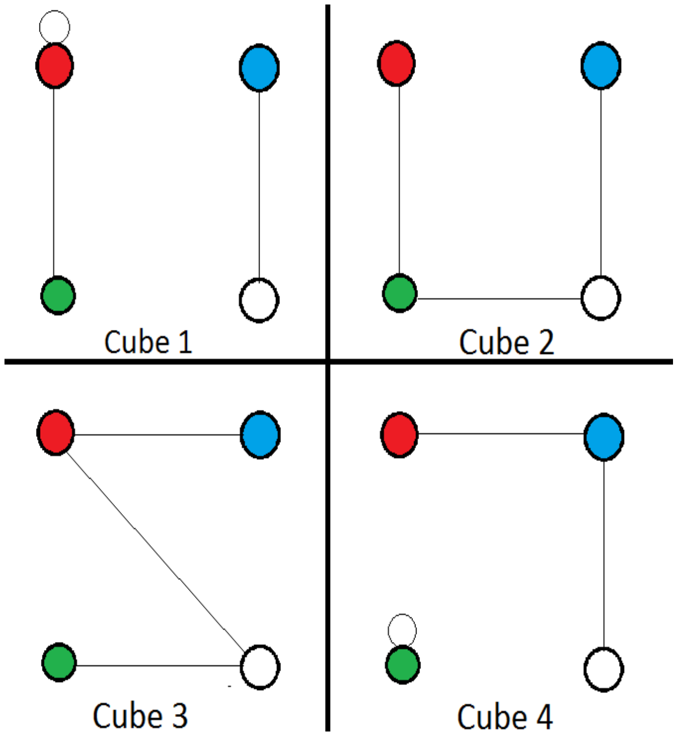


Gambar 3.1.3. Solusi dari Gambar 3.1.2.

Sumber: http://techieme.in/graph-theory-applications-the-instant-insanity-puzzle/

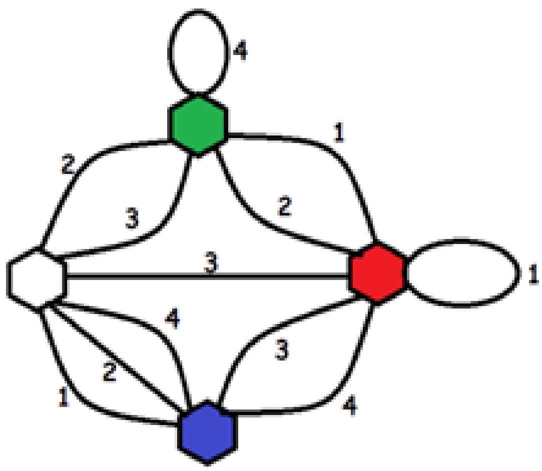
2. Penerapan Teori Graf

Permasalahan ini mempunyai solusi yang dapat dicari dengan bantuan teori graf, yaitu dengan membuat graf yang memiliki empat buah simpul untuk setiap kubus. Masing-masing simpul mewakili satu warna. Ada 24 cara untuk merotasikan sebuah kubus, sehingga ada 24 posisi susunan warna yang memungkinkan untuk setiap kubus. Namun, ada kesamaan mutlak diantara 24 susunan tersebut, yaitu pasangan warna yang berseberangan sisi selalu sama seperti apapun kubus tersebut dirotasi, dibalik, atau diputar. Pasangan warna tersebut kemudian akan direpresentasikan dalam graf untuk membantu menemukan solusi dari permasalahan ini. Apabila sebuah permukaan kubus berseberangan dengan permukaan yang memiliki warna yang sama, maka terbentuk gelang pada simpul warna tersebut. Masing-masing kubus pada gambar 3.1.2. dapat direpresentasikan dengan graf berikut:



Gambar 3.2.1 Representasi Graf dari Gambar 3.1.2.

Perhatikan bahwa semua graf memiliki tepat 3 buah sisi. Ini dikarenakan sebuah kubus pasti tepat memiliki 3 pasang sisi yang berseberangan. Langkah berikutnya adalah menggabungkan empat graf tersebut menjadi satu buah graf seolah-olah empat graf tersebut merupakan upagraf dari graf gabungan yang akan dibuat. Beri tanda nomor asal kubus pada setiap sisi pada graf gabungan tersebut (sisi yang berasal dari graf kubus 1 diberi nomor 1 dan seterusnya). Apabila terdapat dua buah sisi dari dua graf berbeda yang bersisian dengan simpul yang sama, maka anggap kedua sisi tersebut berbeda dan buat sisi ganda dengan menuliskan nomor asal kubusnya. Hasil gabungan graf dapat dilihat pada gambar 3.2.2. Penomoran ini penting untuk ketelitian pada langkah berikutnya.



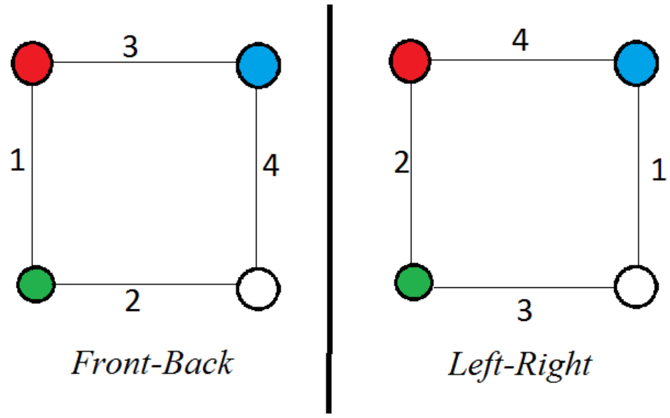
Gambar 3.2.2. Graf Gabungan dari Empat Graf pada Gambar 3.2.1.

Sumber: http://techieme.in/graph-theory-applications-the-instant-insanity-puzzle/

Langkah berikutnya adalah langkah tersulit dari metode ini. Graf gabungan dibentuk oleh graf yang mewakili warna pada sisi kubus yang berseberangan. Oleh karena itu, perlu dibuat 2 buah upagraf yang mewakili sisi berseberangan menara kubus yang ingin disusun. Upagraf pertama mewakili sisi depan dan belakang (*Front-Back)* dan upagraf kedua mewakili sisi kiri dan kanan menara (*Left-Right*). Permainan ini memiliki aturan setiap sisi pada menara yang disusun tidak boleh memiliki sisi kubus berwarna sama. Untuk memenuhi aturan tersebut, upagraf yang dibuat memiliki empat buah syarat:

1. Kedua upagraf tersebut terdiri dari empat buah simpul yang mewakili setiap warna (sama seperti graf sebelumnya)
2. Kedua upagraf tersebut tidak boleh mengambil sisi yang sama. Hal ini dikarenakan setiap sisi mewakili sisi berseberangan pada bagian *Front-Back* dan *Left-Right* sehingga tidak mungkin ada dua pasang sisi berseberangan yang dapat ada dalam waktu bersamaan
3. Setiap upagraf hanya boleh mengambil satu buah sisi dari setiap graf kubus.
4. Setiap simpul memiliki derajat dua. Syarat ini menyebabkan suatu warna muncul tepat dua kali yaitu pada sisi depan dan sisi belakang untuk upagraf *Front-Back* dan sisi kiri dan sisi kanan untuk upagraf *Left-Right.* Derajat lebih dari dua akan menyebabkan munculnya warna yang sama pada satu sisi menara.

Upagraf yang memenuhi syarat diatas dicari dengan cara *trial and error*. Untuk mempermudah pencarian, perlu diketahui bahwa kedua upagraf tidak mungkin memiliki gelang karena gelang tersebut akan memaksa salah satu warna untuk muncul lebih dari dua kali pada sisi yang sama. Ini menyebabkan jumlah kasus yang perlu dicoba dengan *trial and error* lebih sedikit sehingga pencarian upagraf yang tepat dapat dilakukan dengan lebih cepat. Oleh karena itu, mulailah dari upagraf yang memiliki gelang dengan cara mengeliminasi gelang sehingga graf kubus tersebut hanya tersisa dua sisi. Berikan salah satu sisi tersebut ke salah satu upagraf dan berikan sisi yang satu lagi ke upagraf lainnya. Ulangi langkah ini sambil memperhatikan syarat upagraf sampai tidak ada graf kubus yang mengandung gelang lagi. Baru setelah itu mulai mencoba-coba sisi dari graf kubus yang belum diambil sampai ditemukan sepasang upagraf yang memenuhi seluruh syarat. Kesulitan utama dalam melakukan *trial and error* ini adalah menentukan apakah suatu simpul merupakan *front* atau *back* (pada upagraf *Front-Back*) dan apakah suatu simpul merupakan *left* atau *right* (pada upagraf *Left-Right*) karena graf yang digunakan adalah graf tidak berarah sehingga masih diperlukan penalaran untuk menentukan posisi simpul yang tepat dan memenuhi syarat upagraf serta aturan permainan. Contoh upagraf yang memenuhi semua syarat diatas adalah sebagai berikut.



Gambar 3.2.3 Upagraf dari Gambar 3.2.1. yang Memenuhi Syarat

Sisi pada upagraf *Front-Back* dan *Left-Right* mewakili informasi yang sama seperti graf-graf yang dibuat sebelumnya, yaitu sisi kubus yang berseberangan. Oleh karena itu, dapat disusun kubus dengan menggunakan upagraf *Front-Back* dan *Left-Back* yang sudah dibuat dan akan terbentuk menara kubus yang menjadi solusi dari permainan ini seperti pada gambar 3.1.2. Gambar 3.1.2. hanyalah salah satu variasi susunan warna kubus pada *Instant Insanity*. Metode pencarian solusi ini dapat digunakan untuk variasi warna kubus seperti apapun yang mengikuti aturan permainan.

V. KESIMPULAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu yang penerapannya banyak sekali pada kehidupan sehari-hari. Berbagai permasalahan dan persoalan dapat diselesaikan atau paling tidak dapat ditingkatkan efisiensi dari solusi permasalahan tersebut. Salah satu contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan teori graf adalah *Instant Insanity* atau *Four Cubes Problem*. Solusi dicari dengan menerapkan logika pada graf seperti dalam penentuan sisi graf sebagai perwakilan dari sisi kubus yang berseberangan dan penentuan syarat upagraf yang memenuhi aturan permainan.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama penulis mengucap syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena hanya atas berkat dan rahmat-Nya penulis memiliki kesempatan untuk menulis makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T. selaku dosen mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit untuk kelas 01 yang telah mendidik, mengajar, dan membimbing penulis dengan sangat baik dan kompeten selama proses pembelajaran hingga memampukan penulis untuk menulis makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] http://techieme.in/graph-theory-applications-the-instant-insanity-puzzle/ (diakses tanggal 2 Desember 2017, pukul 20.27)

[2]https://ptwiddle.github.io/MAS341-Graph-Theory/lecturenotes/lecturenotes.pdf (diakses tanggal 2 Desember 2017, pukul 20.49)

[3] http://faculty.etsu.edu/beelerr/insanity-supp.pdf (diakses tanggal 2 Desember 2017, pukul 21.24)

[4]http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf (diakses tanggal 3 Desember 2017, pukul 21.22)

[5] http://www.mathsisfun.com/algebra/images/graph-vertex-edge.gif (diakses tanggal 3 Desember 2017, pukul 22.26)

[6] https://medium.com/@keithwhor/using-graph-theory-to-build-a-simple-recommendation-engine-in-javascript-ec43394b35a3 (diakses 2 Desember 23.54)

[7] Rinaldi Munir. 2006. Diktat Kuliah IF2120: Matematika Diskrit. Bandung: Program Studi Teknik Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017

Maha William Chandra
13516040