

Aplikasi Graf Pada Pewarnaan Peta dengan Menggunakan Teori Pewarnaan Graf

Azka Nabilah Mumtaz / 13516013
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
azkanabilah@gmail.com

Abstract—Pada peta dapat dilihat bahwa terdapat banyak warna – warna yang berbeda dari setiap wilayah yang ada di peta tersebut. Umumnya warna – warna tersebut disesuaikan dengan masing – masing wilayah. Makalah ini akan menjelaskan tentang bagaimana warna – warna dari wilayah tersebut bisa didapatkan dari teori graf dengan menggunakan teori pewarnaan graf dan bilangan kromatik. Bahkan ada teorema pewarnaan graf yang menyatakan bahwa sebenarnya peta hanya membutuhkan maksimal 4 warna dalam pewarnaannya. Untuk mewarnai peta bisa juga digunakan algoritma Welch-Powell.

Keywords—Bilangan kromatik, Euler, Graf, Peta, Welch-Powell

I. PENDAHULUAN

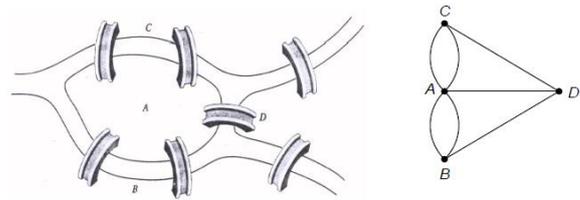
Jika kalian melihat peta, kalian akan melihat banyak sekali warna - warna yang terdapat pada setiap wilayah di peta. Biasanya warna – warna pada peta tersebut disesuaikan dengan ketinggian wilayah dan juga berdasarkan provinsi, kota, atau bahkan negara. Kali ini, yang akan dibahas adalah bagaimana untuk memberikan warna pada peta dengan teori graf dan teori pewarnaan graf yang sudah dipelajari pada semester 3 ini.

Teorema Pewarnaan Graf menyatakan bahwa jumlah maksimal yang dapat digunakan untuk memberikan warna pada graf planar adalah 6, sehingga dapat ditulis bilangan kromatik ≤ 6 yang artinya jumlah warnanya kurang dari 6. Namun seiring berjalannya waktu, teorema tersebut berubah-ubah sehingga teorema yang paling terakhir adalah jumlah maksimal yang dapat digunakan untuk memberikan warna pada graf planar adalah 4 atau disebut juga bilangan kromatiknya ≤ 4 .

Teorema Pewarnaan Graf tersebut itulah yang akhirnya dijadikan sebagai landasan untuk menentukan jumlah warna yang akan dipakai dalam sebuah peta.

Awal mula dibentuknya sebuah teori graf adalah pada sekitar abad 18. Saat itu di kota Königsberg terdapat banyak sungai – sungai dan ada 7 jembatan yang menghubungkan sungai – sungai tersebut. Waktu itu terbentuklah suatu tantangan untuk membuat rute perjalanan mengelilingi jembatan tersebut, namun satu jembatan harus dilewati maksimal satu kali saja.

Akhirnya seorang ilmuwan bernama Leonhard Euler merasa tertantang dan ingin membuat solusi dari tantangan tersebut. Dan inilah yang merupakan akar dari ilmu teori graf.



Gambar 1 : Jembatan Königsberg

II. TEORI DASAR

A. Teori Graf

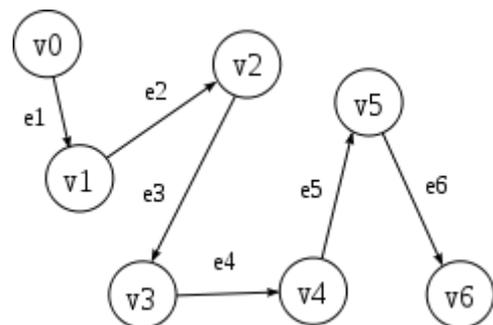
Graf adalah sesuatu yang berfungsi untuk menggambarkan hubungan antara suatu objek – objek terutama objek diskrit. Contohnya adalah rute pesawat, rute perjalanan, atau bahkan yang seperti kita bahas sekarang, peta, juga termasuk ke dalam graf. Graf terdiri atas dua bagian penting, yaitu **simpul** atau disebut juga dengan *vertex*, dan **sisi** atau disebut juga dengan *edge*. Sisi adalah sesuatu yang menjadi penghubung antara objek – objek diskrit, sedangkan simpul adalah objek diskrit itu sendiri, sehingga pada dasarnya sisi adalah sesuatu yang dapat menghubungkan simpul – simpul.

Graf dapat disimbolkan sebagai berikut :

$$G = (V, E)$$

Dengan V adalah himpunan dari simpul – simpulnya dan E adalah himpunan dari sisi – sisinya.

Contoh graf :



Gambar 2 : Simpul dan sisi pada graf

Graf di atas dapat dituliskan $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dimana $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ berperan sebagai simpul dan $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ berperan

sebagai sisi.

Berdasarkan sisinya, graf dibagi menjadi dua jenis, yaitu :

a. Graf sederhana

Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki sisi ganda atau loop (sisi gelang).

b. Graf tidak sederhana

Graf tidak sederhana berbanding terbalik dengan graf sederhana, graf tidak sederhana adalah graf yang justru memiliki sisi ganda atau loop.

Dan berdasarkan arahnya, graf juga dibagi menjadi dua jenis, yaitu :

a. Graf berarah

Graf berarah adalah graf yang memiliki arah, umumnya pada sisinya terdapat tanda panah untuk menunjukkan arah dari hubungan objek – objek diskrit yang dihubungkan tersebut.

b. Graf tidak berarah

Graf tidak berarah adalah graf yang tidak memiliki arah, sehingga pada sisinya tidak terdapat tanda panah apapun karena tidak ada arah yang ditunjukkan.

Empat simbol penting di dalam graf :

- a. n = jumlah simpul
- b. e = jumlah sisi
- c. r = jumlah derajat
- d. f = jumlah ruang

Derajat adalah banyaknya sisi yang terhubung di dalam satu simpul. Sisi gelang, derajatnya dihitung sebagai 2. Rumus untuk menghitung jumlah derajat adalah sebagai berikut :

$$\sum \text{derajat} = 2 \times \text{jumlah sisi}$$

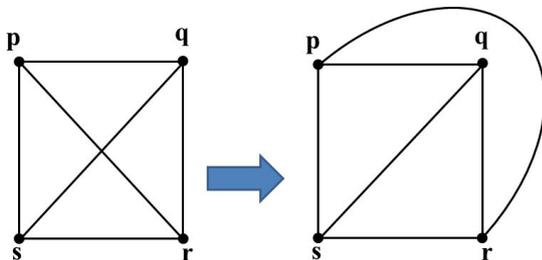
Ruang adalah area kosong di antara simpul – simpul dan sisi – sisi.

B. Graf Planar dan Tidak Planar

Graf planar adalah graf yang jika digambarkan kembali pada bidang datar tidak akan menghasilkan graf dengan sisi yang berpotongan atau bersilangan.

Contoh graf planar :

Contoh
Graf K_4 adalah Graf Planar

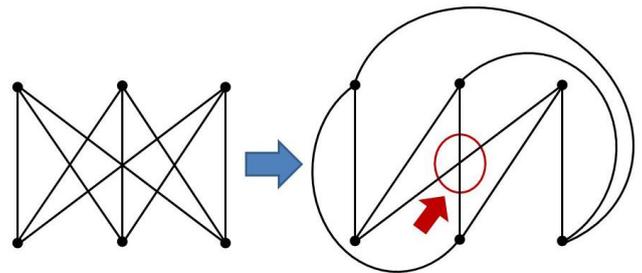


Gambar 3 : Graf Planar

Sedangkan graf tidak planar adalah kebalikan dari graf planar, yaitu graf yang jika digambarkan kembali akan selalu menghasilkan graf dengan sisi yang berpotongan atau bersilangan.

Contoh graf tidak planar :

Contoh
Graf $K_{3,3}$ bukan Graf Planar

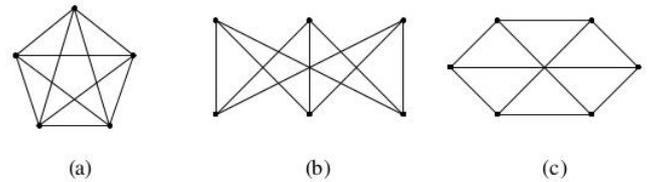


Gambar 4 : Graf tidak Planar

Graf planar yang digambarkan dengan sisi – sisi yang tidak saling berpotongan disebut juga dengan graf **bidang**

C. Teorema Kuratowski

Teorema Kuratowski menjelaskan bahwa graf tidak planar adalah graf yang mengandung graf kuratowski sebagai berikut :



Gambar 5 : Graf Kuratowski

- (a) Graf K_5
- (b) Graf $K_{3,3}$
- (c) Graf yang isomorfik dengan $K_{3,3}$

Sifat – sifat graf Kuratowski :

- a. Graf Kuratowski adalah graf teratur (graf teratur adalah graf yang semua simpulnya memiliki derajat yang sama)
- b. Graf Kuratowski adalah graf yang tidak planar
- c. Penghapusan sisi atau simpul pada graf Kuratowski akan menyebabkan graf Kuratowski tersebut menjadi planar
- d. Graf Kuratowski pertama dan kedua sama – sama tidak planar, namun yang pertama memiliki jumlah simpul minimum dan yang kedua memiliki jumlah sisi minimum

Teorema Kuratowski : “Graf G bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik dengan salah satu dari keduanya.”

Pada hakikatnya, teorema kuratowski dapat menentukan apakah sebuah graf adalah graf planar atau tidak.

D. Teorema dan Rumus Euler

Leonhard Euler membuat sebuah teorema di mana teorema tersebut mengatakan bahwa hubungan antara jumlah simpul n , jumlah sisi e , dan jumlah ruang f pada graf planar adalah sebagai berikut :

$$n - e + f = 2$$

Untuk menentukan sebuah graf planar atau tidak, bisa juga menggunakan pertidaksamaan Euler. Graf yang planar akan memenuhi pertidaksamaan berikut :

$$e \leq 3n - 6$$

Dengan e adalah jumlah sisinya dan n adalah jumlah simpulnya. Namun beberapa graf anomali seperti graf $K_{3,3}$ tidak berlaku pertidaksamaan tersebut karena graf tersebut memiliki simpul lebih dari 3 dan graf tersebut tidak memiliki sirkuit dengan 3 sisi. Untuk graf – graf tersebut berlaku pertidaksamaan berikut :

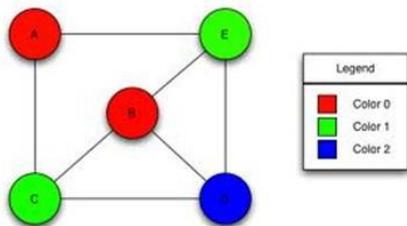
$$e \leq 2n - 4$$

E. Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik adalah jumlah minimal warna yang dibutuhkan untuk memberikan warna pada sebuah graf planar atau peta. Bilangan kromatik dari sebuah graf G ini biasanya disimbolkan dengan $K(G)$.

Contoh :

Graf di bawah ini memiliki bilangan kromatis $K(G) = 3$



Gambar 6 : Menentukan bilangan kromatik pada sebuah graf

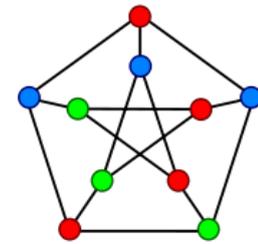
Beberapa bilangan kromatik yang sudah diketahui secara pasti jumlahnya :

- 1) Graf kosong G memiliki bilangan kromatik $K(G) = 1$, karena semua simpulnya tidak ada yang terhubung sehingga semua warna pada simpul tidak perlu sama. Akhirnya hanya dibutuhkan satu warna saja untuk diberikan pada graf kosong.
- 2) Graf lengkap G memiliki $K(G) = n$ karena semua simpul terhubung satu sama lain sehingga warna antar simpul masing – masing harus berbeda, sehingga. Akhirnya dibutuhkan n buah warna.
- 3) Graf bipartisi $K_{m,n}$ memiliki bilangan kromatik $K(G)$ sebanyak 2, karena hanya dibutuhkan warna untuk himpunan pertama dan warna untuk himpunan kedua
- 4) Graf lingkaran G yang memiliki n ganjil pasti memiliki bilangan kromatik $K(G) = 3$, sedangkan yang n nya berjumlah genap pasti memiliki bilangan kromatik $K(G)$ sebanyak 2.
- 5) Sembarang pohon T pasti memiliki bilangan kromatik $K(T)$ sebanyak 2.
- 6) Untuk graf lain selain yang disebutkan di atas tidak dapat disebutkan secara pasti jumlah bilangan kromatiknya.

F. Pewarnaan pada Graf

Pewarnaan graf adalah suatu cara untuk memberikan label kepada suatu objek di dalam graf. Berdasarkan objeknya, pewarnaan graf dibagi menjadi tiga macam :

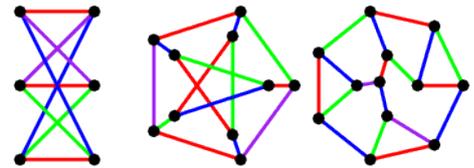
- a. Pewarnaan simpul



Gambar 7 : Pewarnaan simpul

Pewarnaan simpul atau yang disebut juga dengan *vertex coloring* adalah bagaimana cara memberikan warna pada simpul – simpul sehingga simpul – simpul yang berdekatan atau bersebelahan atau bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

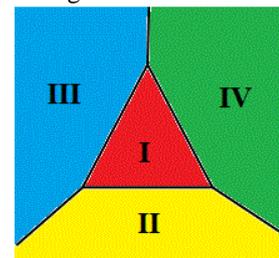
- b. Pewarnaan sisi



Gambar 8 : Pewarnaan sisi

Pewarnaan sisi atau yang disebut juga dengan *edge coloring* adalah bagaimana cara memberikan warna sisi – sisi pada graf sehingga sisi – sisi yang berdekatan atau bersebelahan atau bertetangga tidak memiliki warna yang sama, sehingga tidak ada dua sisi berdekatan yang memiliki warna yang sama.

- c. Pewarnaan ruang



Gambar 9 : Pewarnaan ruang

Sama halnya dengan pewarnaan simpul dan sisi, pewarnaan ruang atau disebut juga dengan pewarnaan bidang adalah bagaimana cara memberikan warna pada bidang – bidang sehingga tidak ada ruang yang berdekatan atau bertetangga yang memiliki warna yang sama.

Dalam mewarnai objek – objek graf harus digunakan warna sejumlah banyak warna minimal. Jumlah warna minimal yang harus digunakan itulah yang dinamakan dengan bilangan kromatik atau dilambangkan dengan K

G. Teorema Pewarnaan Graf

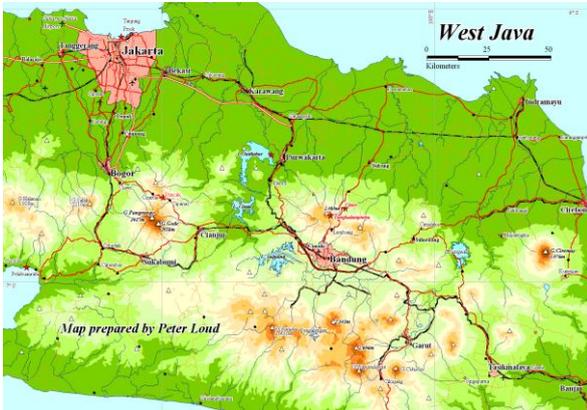
Seiring berjalannya waktu, teorema tentang pewarnaan graf terus menerus berkembang, setelah ditemukan para ilmuwan. Perkembangan teorema warna pada graf adalah sebagai berikut :

1. Teorema 1

- (i) G memiliki 2 warna atau G berwarna 2

- (ii) G adalah graf bipartisi
 - (iii) Setiap sirkuit dalam G mempunyai panjang genap
Sehingga, graf lengkap dengan n simpul membutuhkan n warna dalam setiap pewarnaan, dikarenakan oleh masing – masing simpul pasti berdampingan dengan simpul yang lain
2. Teorema 2
Suatu graf planar G memiliki 5 warna atau graf planar G adalah berwarna 5 atau bisa disimbolkan dengan :
- $$K(G) \leq 5$$
3. Teorema empat warna
Menurut teorema empat warna, sebuah peta atau graf planar hanya membutuhkan empat warna sehingga tidak ada wilayah atau ruang bertetangga yang memiliki warna yang sama. Bisa juga disimbolkan dengan :
- $$K(G) \leq 4$$

H. Pewarnaan Peta



Gambar 10 : Warna peta yang biasa digunakan

Pada umumnya, peta menggunakan delapan warna, dimana delapan warna tersebut masing – masing memiliki arti tersendiri. Berikut arti dari delapan warna tersebut :

- a. Warna merah
Warna merah biasanya digunakan untuk memberi warna pada objek buatan manusia yang terdapat di dalam peta. Hal itu meliputi jalan, jembatan, rel kereta api, dan lain sebagainya. Warna merah juga bisa digunakan untuk memberikan tanda pada gunung berapi apakah gunung berapi tersebut masih aktif atau tidak. Bila gunung pada peta berwarna merah, tandanya gunung berapi tersebut masih aktif.
- b. Warna hitam
Sama halnya seperti warna merah, warna hitam juga digunakan untuk memberikan warna pada objek buatan manusia yang terdapat di dalam peta, seperti yang disebutkan sebelumnya. Warna hitam juga bisa digunakan untuk memberikan tanda bahwa gunung berapi tersebut masih aktif atau tidak. Jika warnanya

- hitam, berarti gunung tersebut sudah tidak aktif.
- c. Warna Hijau
Warna hijau merupakan warna yang seringkali digunakan di dalam peta. Warna hijau pasti menandakan daratan atau suatu tempat yang bisa ditanami pohon atau tanaman lainnya. Warna hijau pada peta sendiri bermacam – macam, ada warna hijau muda, hijau agak tua, sampai hijau tua. Hijau muda menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian di antara 0 -100 m di atas permukaan laut. Sedangkan warna hijau tua menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian di antara 100 – 500 m di atas permukaan laut.
- d. Warna Kuning
Sama seperti halnya warna hijau, warna kuning juga menandakan daratan yang ada di permukaan bumi. Namun perbedaannya adalah terdapat pada ketinggiannya. Warna kuning juga bermacam – macam rupanya, ada yang berwarna kuning muda, kuning biasa, dan ada juga yang warna kuning tua. Warna kuning muda menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian di antara 500 – 1000 m di atas permukaan air laut. Sedangkan warna kuning biasa menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian di antara 1000 – 1500 m di atas permukaan air laut. Dan terakhir, warna kuning tua menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian di antara 1500 – 2000 m di atas permukaan air laut.
- e. Warna oranye
Seperti warna kuning dan warna hijau, warna oranye juga menandakan daratan pada peta. Perbedaannya adalah pada ketinggian daratan yang diberi warna oleh warna oranye ini. Warna oranye ini juga ada dua macam, yaitu warna oranye muda dan warna oranye tua. Warna oranye muda menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian antara 2000 – 2500 di atas permukaan laut. Sedangkan warna oranye tua menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian antara 2500 – 3000 m di atas permukaan air laut.
- f. Warna coklat
Warna coklat juga memberikan warna pada daratan yang berbeda tingginya dari warna hijau, kuning, dan oranye. Seperti warna – warna tersebut, warna coklat juga dibagi menjadi dua dalam penggunaannya pada peta, yaitu warna coklat muda dan warna coklat tua. Warna coklat muda menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian berkisar antara 3000 – 3500 m di atas permukaan air laut, sedangkan warna coklat tua menandakan bahwa daratan tersebut memiliki ketinggian berkisar antara 3500 – 4000 m di atas permukaan air laut.

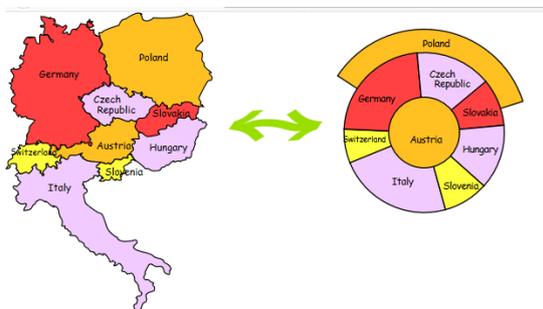
- g. Warna Biru
Warna biru menggambarkan wilayah perairan yang ada di permukaan bumi, seperti laut, danau, sungai, dan lain sebagainya. Warna biru pun memiliki warna yang bermacam – macam seperti warna yang lain, ada warna biru muda dan ada juga warna biru tua, warnanya pun seperti penggradasian. Dan dapat diketahui bahwa semakin gelap warnanya, semakin dalam pula kedalaman lautnya.
- h. Warna putih
Warna putih melambangkan permukaan bumi yang ditutupi oleh es seperti gletser, kutub, dan lain sebagainya. Warna putih juga dapat digunakan untuk melambangkan daratan yang memiliki ketinggian lebih dari 4000 m di atas permukaan laut.

I. Algoritma Welch-Powell

Algoritma Welch – Powell adalah algoritma yang digunakan untuk mewarnai sebuah graf agar langkahnya lebih efisien. Berikut adalah langkah memberi warna pada graf dengan algoritma Welch – Powell :

- 1) Mengurutkan simpul – simpul yang berada pada graf G berdasarkan jumlah derajat masing – masing simpul, dari jumlah derajat yang terbesar hingga terkecil (menurun).
- 2) Menggunakan satu buah warna untuk memberi warna pada simpul pertama yang memiliki derajat paling tinggi dan simpul lain yang tidak bertetangga dengan simpul pertama.
- 3) Ulangi langkah di atas dengan simpul berderajat tinggi setelahnya (yang belum berwarna) dengan menggunakan warna kedua.
- 4) Ulangi langkah di atas terus menerus hingga semua simpul telah diberi warna.

III. HASIL DAN ANALISIS



Gambar 11 : Gambar peta yang menggunakan teorema pewarnaan graf (empat warna)

Karena pada umumnya peta memiliki delapan warna tersebut menandakan bahwa di realitanya, pada ilmu kartografi, teorema pewarnaan graf planar tersebut tidak digunakan. Selain itu, pembuatan peta juga akan menjadi bingung jika terlalu menggunakan sedikit warna pada peta. Seperti halnya jika pada peta kita melihat wilayah yang tidak bersinggungan,

namun memiliki warna yang sama, kita pasti akan berpikir bahwa mereka masih dalam daerah yang sama, padahal tidak. Maka sebab itu diperlukan lebih dari empat warna agar pembaca peta dapat membedakan wilayah mana yang masih satu daerah dan wilayah mana yang sudah berbeda daerahnya. Hal tersebut dikarenakan seorang kartografer lebih memperhatikan detail peta dibandingkan dengan teorema empat warna tersebut. Seorang kartografer ingin membuat peta yang lebih jelas detailnya, sehingga lebih mudah untuk dilihat.

IV. KESIMPULAN

Dari makalah ini dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu sebagai berikut :

- 1) Graf planar adalah graf yang memiliki sisi yang tidak saling bersilangan.
- 2) Untuk memberi warna pada graf planar bisa digunakan teorema – teorema pewarnaan graf yang ada seperti teorema 1, teorema 2, dan teorema empat warna seperti yang sudah disebutkan pada makalah ini.
- 3) Peta yang sederhana dan tidak terlalu memperhatikan detail juga dapat diberi warna sesuai dengan teorema pewarnaan graf.
- 4) Namun untuk peta yang sangat memperhatikan detail seperti warna objek buatan manusia, warna gunung, atau warna daratan yang dibedakan berdasarkan ketinggian, kartografer tidak menggunakan teorema pewarnaan graf tersebut.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama – pertama, penulis panjatkan puji syukur kepada Tuhan yang Maha Esa karena berkat rahmat dan karunia-Nya penulis dapat mengerjakan dan menyelesaikan makalah ini dengan cukup baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada orang tua dan keluarga penulis yang sudah mendukung penulis dan mendoakan penulis sampai di penghujung semester 3 ini. Selain itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada sumber – sumber referensi yang sudah membantu penulis karena materi dari sumber – sumber tersebut, penulis dengan lebih mudah dapat membuat makalah ini. Tidak lupa, penulis mengucapkan terima kasih juga kepada Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T. , dosen mata kuliah Matematika Diskrit di K-01 dan juga Ibu Dra. Harlili S., M.Sc. , dosen Matematika Diskrit di K-02, karena tanpa ilmu yang telah mereka berikan, penulis tidak akan bisa menulis makalah ini. Dan terakhir, penulis ingin mengucapkan terima kasih juga kepada teman – teman seperjuangan penulis, Mahasiswa Teknik Informatika 2016, yang sudah terus mendukung penulis dan memberi semangat kepada penulis hingga sejauh ini. Tanpa semangat dari mereka semua penulis tidak akan bisa menyelesaikan makalah ini dengan cukup baik. Penulis berharap agar materi yang telah didapatkan dalam kelas mata kuliah Matematika Diskrit ini dapat bermanfaat kedepannya dan dapat direalisasikan di masa depan.

REFERENSI

A. Materi

- [1] Website Rinaldi Munir
- [2] <http://dhukhasyamsy.blogspot.co.id/2013/05/pewarnaan-graf-graph-coloring.html?m=1>
- [3] <https://paradoks77.blogspot.co.id/2011/08/pembuktian-teorema-empat-warna.html?m=1>
- [4] <https://scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu-kali-jalan-tujuh-jembatan-konigsberg/>
- [5] https://courses.engr.illinois.edu/cs173/fa2009/lectures/lect_40.pdf
- [6] <https://www.slideshare.net/CliquerzJavaneze/bab-4-graf2>
- [7] <http://www.grafis-media.website/2017/10/8-arti-warna-pada-peta.html>
- [8] <http://slideplayer.info/slide/4900654/>

B. Gambar

- [9] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bd/Cesta_%28graf%29.svg/239px-Cesta_%28graf%29.svg.png
- [10] <http://slideplayer.info/slide/4012623/12/images/18/Contoh+Graf+K3,3+bukan+Graf+Planar.jpg>
- [11] <http://slideplayer.info/slide/3132131/11/images/16/Contoh+Graf+K4+adalah+Graf+Planar+p+r+s+q+p+r+s+q.jpg>
- [12] http://images.slideplayer.info/11/3141091/slides/slide_68.jpg
- [13] <http://peterloud.co.uk/indonesia/jab2.gif>
- [14] <https://www.mathsisfun.com/activity/images/coloring-europe-reshape.svg>

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017

Ttd (scan atau foto ttd)



Azka Nabilah Mumtaz / 13516013