Menyelesaikan Icosian Game Dengan Bantuan Traveling Salesman Problem dan Sirkuit Hamilton

Ahmad Faishol Huda 13516094[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13516094@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Icosian Game adalah sebuah permainan berbentuk graph yang diciptakan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1857. Permainian ini terinspirasi dari dunia nyata dan di representasikan dalam bentuk graf, dimana seorang pengelana harus bisa melewati 20 kota tanpa melewati sebuah kota lebih dari sekali. Permainan ini cukup sulit untuk diselesaikan bahkam untuk mengetahui apakah sebuah graf tersebut dapat dicari sirkuit hamilton nya juga cukup susah, namun disini kita akan mencoba menyelesaikan permainan ini dengan mengubah graf tersebut ke dalam bentuk TSP dan menyelesaikan nya dengan algoritma yang tersedia.**

***Keywords*—Icosian Game, Traveling Salesman Problem, Graf, Hamilton.**

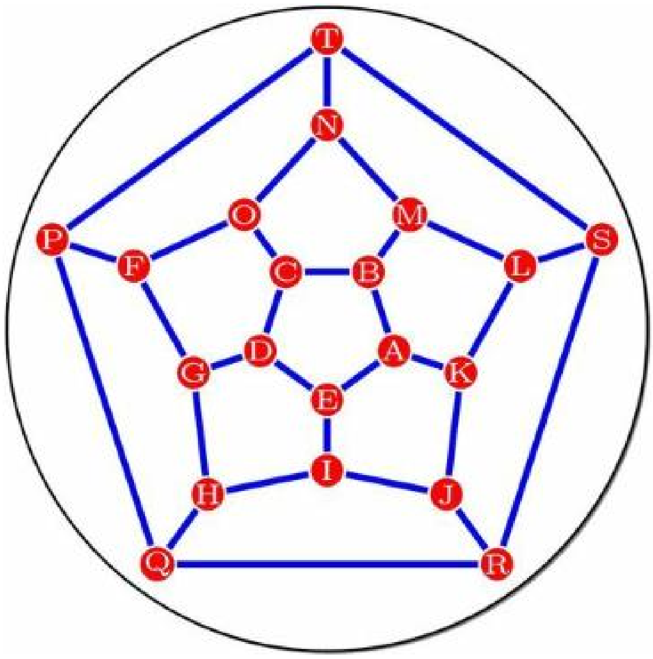
I. PENDAHULUAN

Permainan (games) adalah setiap kontes antara pemain yang berinteraksi satu sama lain dengan mengikuti aturan-aturan tertentu untuk mencapai tujuan tertentu pula (Sadiman, 1993:75). Jadi permainan adalah cara bermain dengan mengikuti aturan-aturan tertentu yang dapat dilakukan secara individu maupun berkelompok guna mencapai tujuan tertentu. Alat permainan adalah semua alat bermain yang dapat digunakan oleh peserta didik untuk memenuhi naluri bermainnya dan memiliki barbagai macam sifat, seperti bongkar pasang, mengelompokkan, memadukan, mencari padanannya, merangkai, membentuk, atau menyusun sesuai dengan bentuk aslinya.

Permainan pada saat ini cenderung bermakna negatif dan dianggap sebagai sesuatu hal yang dapat merusak kehidupan seseorang, padahal nyatanya tidak semua permainan bersifat merusak. Ada beberapa permainan yang dibuat berdasarkan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Matematika , permainan permainan tersebut dibuat oleh orang sebagai sebuah keisengan saat memiliki masalah, bahkan ada beberapa game yang berasal dari ilmuan-ilmuan dan berisi teori matematika yang cukup sulit.

Pada tahun 1857 seorang ilmuan bernama Sir William Rowan Hamilton mulai melakukan penelitian mengenai graf , beliau mengembangkan sebuah teori tentang graf yaitu Teori Lintasan dan Sirkuit Hamilton, berbarengan dengan dibuatnya teori tersebut lahirlah suatu permainan yang dibuat berdasarkan sebuah teori graf tersebut. Permainan yang dibuau ini bernama “Icosian”. Game ini bercerita tentang seorang pengelana yang harus mengunjungin 20 kota tanpa mengunjungin sebuah kota lebih dari dua kali kecuali kota pertama yang sekaligus terakhir (loop). Game ini di representasikan dalam bentuk graf. Si pengelana bisa memilih akan memulai dari kota manapun dan nantinya harus kembali ke kota tersebut tapi dia harus melewati setiap kota tepat sekali.

Contoh persoalan dari The Icosian Game berserta Solusi dari sebuah persolah game Icosian dibawah ini ,
A-B-C-O-F-P-T--N-M-L-S-R-Q-H-G-D-F-I-J-K-A

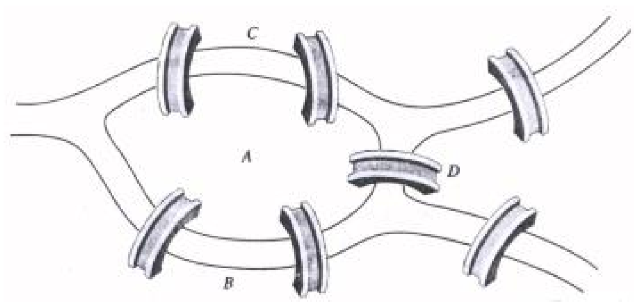


Permasalahan matematika tentang Traveling Salesman Problem dikemukakan pada tahun 1800 oleh smatematikawan Irlandia Sir William Rowan Hamilton dan matematikawan Inggris Thomas Penyngton . Bentuk umum dari TSP pertama dipelajari oleh para matematikawan mulai tahun 1930. Diawali oleh Karl Menger di Vienna dan Harvard. Setelah itu permasalahan TSP dipublikasikan oleh Hassler Whitney dan Merrill Flood di Princeton. Penelitian secara detail dari hubungan antara Menger dan Whitney, dan perkembangan TSP sebagai sebuah topik studi dapat ditemukan di makalah Alexander Schrijver’s “On the history of combinatorial optimization (till 1960)”

II. LANDASAN TEORI

2.1 Graf

Teori graf pertama kali ditulis pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss bernama Leonard Euler . Teori ini pertama kali dibuat untuk menyelesaikan masalah jembatan Konisberg(Kaliningrad). Berikut Ilustrasi dari masalah tersebut :



- Graf yang merepresentasikan jembatan Konisberg :
  - Simpul (vertex) menyatakan daratan (A,B,C,D)
  - Sisi (Edge menyatakan jembatan
- Bisakah kita melalui jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tampat semula ?

2.1 1Definisi Graf

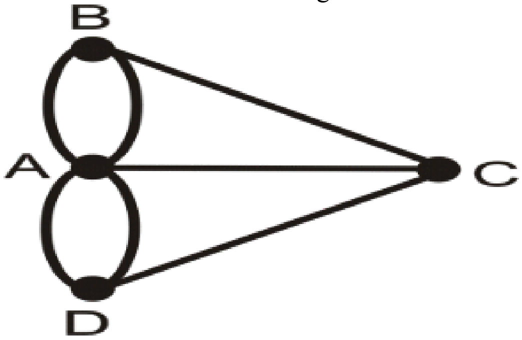
Graf merupakan struktur disrik yang terdiri dari

- Simpul (vertex)
- sisi (edges)

Notasi sebuah graf G adalah G= (V, E) , dimana

- V merupakan himpunan dari simpul simpul (vertices) , misalkan V = {v1,v2, ...,vn} , V bukan himpunan kosong.
- E merukapan himpunan sisi-sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul , Misal E = {e1,e2, ... ,en}, E boleh himpunan kosong , dan jika E adalah himpunan kosong makan graf dinamakan empty graph atau null graph.

Dibawah ini adalah contoh masalah jembatan Konisberg setelah diubah dalam bentuk graf.



Misal graf tersebut adalah graf G, maka G= (V,E) dimana
V = {A,B,C,D}
E = {(A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (C, D), (D, A) }

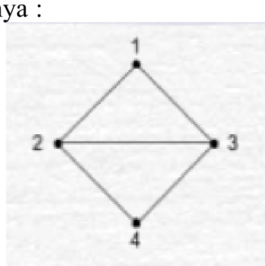
2.1.2 Pembagian Graf berdasarkan adanya sisi ganda

Pembagian Graf berdasarkan adanya sisi ganda pada graf dibagi menjadi 2 macam yaitu

A. Graf Sederhana (Simple graph)

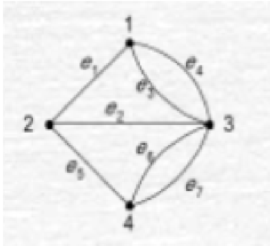
Graf yang tidak mengandung sisi ganda

Contohnya :



B. Graf tak-sederhana (Unsimple graph)

Graf yang mengandung sisi ganda.



2.1.3 Pembagian graf berdasarkan arah pada sisi graf :

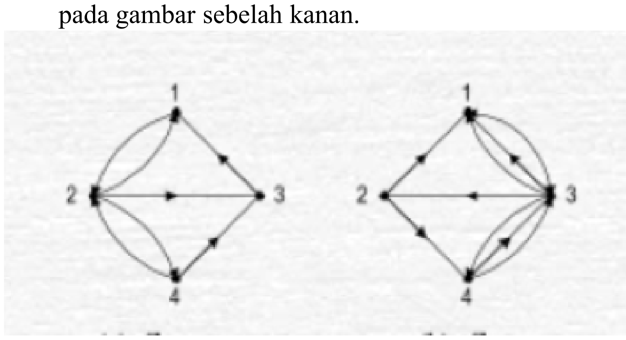
Pembagian Graf berdasarkan arah pada sisi graf dibagi menjadi 2 macam yaitu

A. Graf tak berarah

Graf yang sisinya tidak mempunyai arah. Contoh pada gambar sebelah kiri

B. Graf berarah

Graf yang sisinya mempunyai arah. Contoh pada gambar sebelah kanan.



2.1.4 Terminologi graf

Beberapa terminolago graf :

1. Ketetanggaan (Adjacent)

   Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung.

2. Bersisian (Incidency)

   Untuk sembarang sisi e = (vj, vk) dikatakan e bersisian dengan simpul vj , atau e bersisian dengan simpul vk.

3. Simpul Terpencil (Isolated Vertex)

Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

4. Graf Kosong (null graph atau empty graph)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (Nn).

5. Derajat (Degree)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

6. Lintasan(Path)

Barisan yang dimulai dari sebuah simpul dan berakhir pada sebuah simpul dan berselang seling antara simpul dan sisi

7. Siklus(cycle) atau sirkuit(circuit)

Lintasan yang dimulai dan berakhir pada simpul yang sama.

8. Terhubung(connected)

Dua buah simpul dikatakan terhubung jika ada lintasan antara dua simpul tersebut

2.1.5 Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan Euler dalam suatu graf merupakan lintasan yang melalui masing-masing sisi didalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Euler. Dengan demikian, sirkuit Euler merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Euler dinamakan graf Euler (Eulerian graph), sedangkan graf yang memuat lintasan Euler dinamakan graf semi Euler (semi-Eulerian graph).

2.1.5.1 Sifat Lintasan dan Sirkuit Euler:

Beberapa sifat/theorema pada Lintasan dan Sirkuit Euler :

A. Suatu graf G merupakan graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut berderajat genap.

B. Graf terhubung G merupakan graf semi Euler (memiliki lintasan Euler) jika dan hanya jika di dalam graf tersebut terdapat tepat dua simpul berderajat ganjil.

C. Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama.

D. Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf semi Euler (memiliki lintasan Euler) jika dan hanya jika G terhubung setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama, kecuali dua simpul yaitu simpul petama (simpul awal lintasan) memiliki derajat keluar satu lebih besar dari pada derajat masuk dan simpul yang kedua (simpul akhir lintasan) memiliki derajat masuk satu lebih besar dari pada derajat keluar

.

2.1.6 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui tiap simpul dalam suatu graf tepat satu kali, sedangkan Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui setiap simpul graf tepat sekali kecuali simpul awal yang juga merupakan simpul akhir (dilewati dua kali). Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut graf semi-Hamilton.

2.1.6.1 Sfat Lintasan dan Sirkuit Hamilton :

Beberapa sifat/theorema pada Lintasan dan Sirkuit Hamilton:

A. Syarat cukup supaya graf sederhana G dengan n(>=3) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit n/2.

B. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

C. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul (n>=3) terdapat (n-1)!/2 buah sirkuit Hamilton.

D. Didalam graf lengkap G dengan n buah simpul (n>=3) terdapat (n-1)!/2 buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada yang bersisian). Jika n genap dan n>=4 maka ada (n-2)!/2 buah sirkuit hamilton yang saling lepas.

2.2 Traveling Salesman Problem

Travelling Salesman Problem (TSP) merupakan salah satu permasalahan optimasi kombinatorial yang biasa terjadi. Permasalahan TSP mengenai seseorang yang harus mengunjungi semua kota tepat satu kali dan kembali ke kota asal. Penyelesaian terbaik adalah dengan jarak tependek. Kemungkinan penyelsaian TSP sangat banyak da merupakan contoh permasalahan Kombinatorial.

Masalah ini pertama kali dirumuskan sebagai masalah matematika yaitu pada tahun 1930 . Masalah ini merupaan salah satu masalah yang paling intensif daalm mempelajari masalah optimasi dan digunakan sebagain patokan bagi banyaknya metode optimasi dalam jumlah besar dengan cara yang tepar dan metode yang mudah untuuk diketahui.

- Conoth permasalahan :

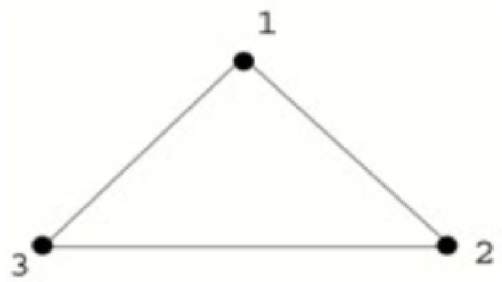
Diberikan n buah kota serta jarak antara setiap kkta satu dengan kota yang lain. Temukan perjalanan terpendek yang melauli setiap kota dengan hanya melewati kota kota tersebut sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

Sebeneranya Permasalahan ini tidak lain menemukan sirkuit Hamilton dengan bobot paling minimum.

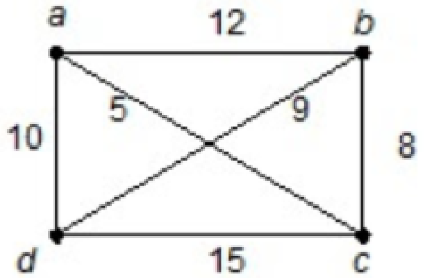
Algoritma exhaustive search untuk persoalan TSP :
1. Enumerasikan semua sirkuit Hamilton dengan n buah simpul
2. Hitung bobot tiap sirkuit
3. Pilih sirkuit Hamilton yang mempunyai bobot paling kecil

2.2.1 Implementasi TSP :

A. TSP dengan 3 buah Kota
Permasalahan ini bisa diselesaikan tanpa bantuan komputer.



B. TSP dengan 4 buah Kota



Gra diatas mempunyai 4!/(2*4) = 3 buah sirkuit Hamilton, misal a adalah kota awal dimulainya perjalanan, maka enumerasi semua sirkuit nya adalah :

- sirkuit 1 : (a-b-c-d-a) : dengan bobot total 45
- sirkuit 2 : (a-c-d-b-a) : dengan bobot total 41
- sirkuit 3 : (a-c-b-d-a) : dengan bobot total 32

Jadi perjalanan terpendek adalah dengen melalui sirkuit 3.

C.. TSP dengan n buah Kota

Menyelesaikan TSP dengan n buah kota memerlukan waktu yang sangat lama . Misal sebuah TSP dengan 20 kota mempunyai banyak kemungkinan 19!/2 atau 6,08x10^16 kemungkinan, suatu jumlah yang sangat besar . Dengan menganggap bahwa sebuah komputer bisa menyelewaikan 1 Giga proses perdetiik maka untuk mencari semua solus diperlukan sekitar 704 hari. Bayangkan jika terdapat lebih dari 20 kota.

2.2.2 Prosedur dalam Pemecahan TSP

2.2.2.1. Prosedur Sederhana

Ada banyak prosedur sederhana dalam pemecahan TSP , beberapa contoh nya adalah :

A. Complete enumeration

Metode ini akan mengenumerasi setiap kemungkinan sirkuit yang terdapat dalam graf, setelah itu algoritma ini akan membandingkan lintasan mana yang paling minimum, kompleksitas algoritma (n-1)!, dimana n adalam jumlah kota.

B. Branch and bound

Algoritma yang satu ini mempunyai kompleksitas yang sama dengan Complete enumeration, yaitu memiliki kompleksitas algoritma (n-1)!, dimana n adalam jumlah kota.

2.2.2 Algoritma lainnya

Beberapa Algoritma lain untuk menyelessaikan TSP :

A. Heuristics

Teknik ini dapat digunakan untuk mencari solusi dari masalah kombinatorial dengan cepat. Algoritma tradisional akan gagal ketika menghadapi permasalahan yang sangat rumit, seperti permasalahan TSP dengan jumlah kota (n) yang sangat besar. Metode Heuristic akan memberikan pendekatan dalam menyelesaikan permasalahan optimasi kombinatorial. Combinatorial search akan memberi kita hasil yang mungkin dan mencari yang hasil yang mendekati optimal dari hasil-hasil tersebut. Tetapi mungkin memang tidak ada metode Heuristik yang menghasilkan solusi yang merupakan solusi optimal. Metode Heuristik seperti simulated annealing, genetic algoritm, dan neural network mengusahakan suatu cara untuk mencari hasil yang baik tapi bukan yang terbaik.

B. Genetic Algoritm

Inspirasi dalam pembuatan algoritma ini adalah dari proses evolusi dan seleksi alam. Melalui proses seleksi alam, organisme atau mahluk hidup beradaptasi untuk mengoptimalkan kesempatan mereka untuk tetap bias hidup didalam sebuah lingkungan. Mutasi secara random menghasilkan kode genetik dari mahluk hidup, yang kemudian diturunkan kepada anaknya. Jika mutasi meningkatkan kualitas genetik, maka secara otomatis sang anak aka terbantu untuk selamat.

C. Simulated Annealing

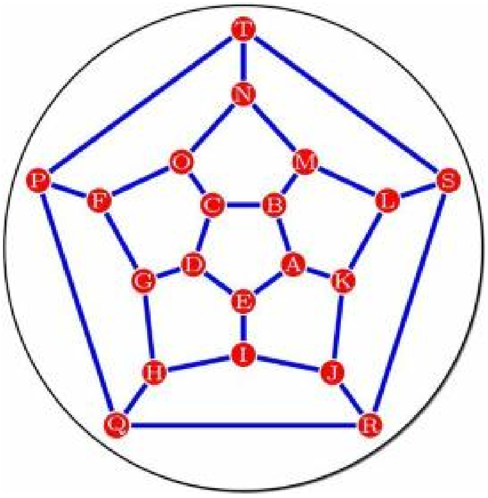
Inspirasi tentang metode ini datang dari proses fisika mengenai pendinginan lelehan material yang berubah menjadi padat. Ketika lelehan besi didinginkan terlalu cepat, maka retakan dan gelembung udara akan muncul, menghancurkan permukaan dan integritas strukturnya. Oleh karena itu untuk menghasilkan besi yang baik, besi harus 1 2 5 4 5 6 3 4 3 8 3 2 6 1 7 5 didinginkan secara pelan-pelan dan diberi jeda. Annealing adalah teknik metalurgi yang meggunakan ilmu penjadwalan proses pendinginan untuk menghasilkan efisiensi dalam menggunakan energi dan menghasilkan besi yang optimal.

D. Neural Network

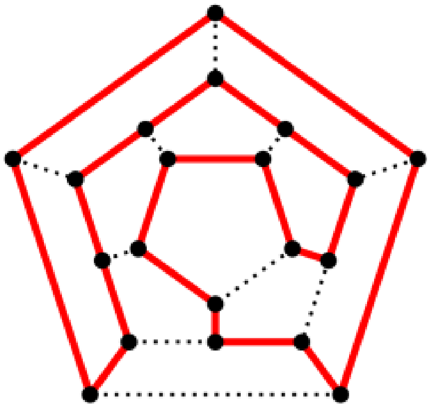
Neural Network adalah paradigma komputasional yang terinspirasi dari arsitektur otak manusia. Ketika otak memiliki intuisi yang sangat baik dalam memecahkan persoalan, maka mesinpun seharusnya dibangun seperti itu.

2.3 The Icosian Game

The Icosian Game sendiri adalah sebuah permainan yang dibuat oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1857 yang berbnetuk graf , pada permainan ini kita diharuskan membuat sebuah lintasan (lebih tepatnya sirkuit) yang akan melewati setiap titik tepat satu kali kecuali titik awal yang nantinya juga akan menjadi titik akhir (dilewati 2 kali). Contoh persoalan di The Icosian game :



Contoh Penyelesaian Persoalan diatas
A-B-C-O-F-P-T--N-M-L-S-R-Q-H-G-D-F-I-J-K-A



III. Penerapan Sifat Sirkuit Hamilton Pada The Icosian Game

Dengan menerapkan sifat dari Sirkuit Hamilton pada Icosian Game kita tidak hanya bisa mengetahui apakah graf tersebut bisa dilesaikan namun kita juga bisa tahu ada berapa banyak macam penyelesaian yang mungkin didapat dari graf tersebut. Ada beberapa langkah yang kita bisa lakukan sebelum mencoba langsung Icosian Game ini,

1. Jika graf adalah graf lengkap maka terdapat penyelesaian untuk persoalan tersebut. Sesuai dengan sifat graf lengkap yang pasti punya sirkuit Hamilton.

2. Jika bukan graf lengkap, kita harus mendata banyaknya simpul yang ada pada graf.

3. Mengecek apakah jumlah simpul dan sisi memenuhi sifat -sifat sirkuit Hamilton. Jika memenuhi maka graf tersebut bisa diselesaikan.

4. Jika tidak memenuhi, kita akan mengunakan algoritma TSP untuk menentukan apakah graf ini tidak bisa diselesaikan.

IV Penyelesaian The Icosian Game Dengan Bantuan Traveling Salesman Problem

Penyelesaian The Icosian game dengen memanfaatkan TSP sebenarnya cukup mudah untuk dimengerti , caranya adalah dengan mengubah bentuk graf awal dari The icosian game menjadi bentuk TSP . Graf pada The Icosian Game adalah graf yang tidak lengkap jadi kita akan mengubah graf tersebut kedalam graf lengkap dengan menambahkan sisi pad graf tersebut.

4.1 Langkah langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan Icosian Game dengen bantuan TSP adalah :

1. Memberi bobot 0 pada setiap sisi pada graf awal ,(graf sebelum di ubah ke graf lengkap)l
2. Tambahkan sisi sisi pada graf agar graf menjadi sebuah graf lengkap.
3. Beri bobot 1 pada sisi tambahan yang dibuat pada graf .
4. Graf sekarang sudah menjadi dalam bentuk TSP. Dan sudah bisa diselesaikan menggunakan algoritma yang sudha tersedia.
5. Selesaikan dengan algoritma penyelesaian TSP yang tersedia. Cek hasilnya, jika jarak terpendek yang dihasilkan tidak sama dengan nol maka graf pada The Icosian Game tersebut tidak dapat di selesaikan .

V. Kesimpulan

Graf nyatanya bisa menjadi persoalan yang sangat rumit seperti pada beberapa persoalan di The Icosian Game, semakin banyak simpul dan semakin sedikit sisi yang ada pada suatu graf di The Icosian Game menambah tingkat kesulitan dalam menyelesaikan graf tersebut, dan meskipun kita tahu bahwa ada penyelesaian dari persoalan graf tersebut , cukup sulit untuk kita bisa menyelesaikannya tanpa bantuan komputer, Salah satu contohnya adalah dengan sedikit memodifikasi graf yaitu mengubah graf menjadi bentuk TSP dan menggunakan algoritma yang sudah ada untuk bisa menyelesakannya.

VI. Ucapan Terima Kasih

Syukur Alhamdulillah , Penulis ucapkan kepada Allah SWT karena dengan rahmat dan barokahnya penulis bisa menyelesaikan makalah ini. Terima kasih kepada Dosen Matematika Diskrit K-1 Dr. Ir. Rinaldi Munir atas bimbingan dan pelajaran yang telah diberikan selama berlangsungnya Mata Kuliah Matematika Diskrit , sehingga penulis bisa memiliki pengetahuan yang cukup untuk bisa menyelesakan makalah ini.

VII. LAMPIRAN

[1] Gambar 1 diambil dari 2.3 https://wordplay.blogs.nytimes.com/2014/10/06/icosian/
[2] Gambar 2.1 diambil dari http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf
[3] Gambar 2.1.2 A diambil dari http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf
[4] Gambar 2.1.2 B diambil dari http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf
[5] Gambar 2.1.3 B diambil dari diambil dari http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf
[6] Gambar 2.2.1 A diambil dari http://www.metode-algoritma.com/2013/06/tutorial-travelling-salesman-problem-tsp.html
[7] Gambar 2.2.1 A diambil dari http://www.metode-algoritma.com/2013/06/tutorial-travelling-salesman-problem-tsp.html
[8] Gambar 2.3 https://wordplay.blogs.nytimes.com/2014/10/06/icosian/ Dan https://thatsmaths.com/2012/12/20/santas-tsp-algorithm/

VIII. PUSTAKA

[1] http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Graf%20(2015).pdf Diakses pada 1-3 Desember 14.00-18.00
[2] J.Dalgety. "The Icosian Game." puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm. Diakses pada 3 Desember 08.00-11.00
[3] E. W. Weisstein. "Hamilton-Connected Graph" from Wolfram MathWorld~A Wolfram Web Resource. mathworld.wolfram.com/Hamilton-ConnectedGraph.html. Diakses pada 3 Desember 10.00-12.00
[4] J. Tierney. "The Hamiltonian Puzzle." (May 4, 2009) tierneylab.blogs.nytimes.com/2009/05/04/the-hamiltonian-puzzle. Diakses pada 3 Desember 13.00-14.00
[5] http://www.metode-algoritma.com/2013/06/tutorial-travelling-salesman-problem-tsp.html Diakses pada 3 Desember 14.00-15.00
[6] T. Hürlimann. Reference Manual for the LPL Modelling Language, most recent version.www.virtual-optima.com. Diakses pada 3 Desember 14.00-18.00
[7] Http//www.groups.dcs.standrews.ac.uk/~history/Mathematicians /Hamilton.htmll . Diakses pada 3 Desember 14.00-18.00
[8] http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Stmik/Makalah /MakalahStmik30.pdf . Diakses pada 3 Desember 14.00-18.00
[9] http://www.metode-algoritma.com/2013/06/tutorial-travelling-salesman-problem-tsp.html Diakses pada 3 Desember 15.00-19.00
[10] https://thatsmaths.com/2012/12/20/santas-tsp-algorithm/ Diakses pada 3 Desember 15.00-16.00
[11] https://wordplay.blogs.nytimes.com/2014/10/06/icosian Diakses pada 3 Desember 15.00-16.00/

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017

Ahmad Faishol Huda 13516094