# Penerapah Graf untuk Memecahkan Teka-Teki Menyeberangi Sungai

Raka Hadhyana, 13516099
*Program Studi Teknik Informatika*
*Sekolah Teknik Elektro dan Informatika*
*Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia*
*hadhyana@gmail.com, 13516099@std.stei.itb.ac.id*

***Abstract*—Teka-teki menyeberangi sungai adalah jenis teka-teki pengangkutan yang tujuannya adalah membawa barang dari satu sisi sungai ke sisi yang lain, biasanya dicari jumlah perjalanan sesedikit mungkin. Kesulitan dari teka-teki ini timbul dari batasan banyaknya barang yang dapat diangkut dalam sekali perjalanan, atau barang yang dapat tetap aman jika ditinggal bersamaan. Makalah ini membahas cara memecahkan teka-teki tersebut dengan memanfaatkan graf.**

***Keywords*— graf, logika, *riddle*, teka-teki.**

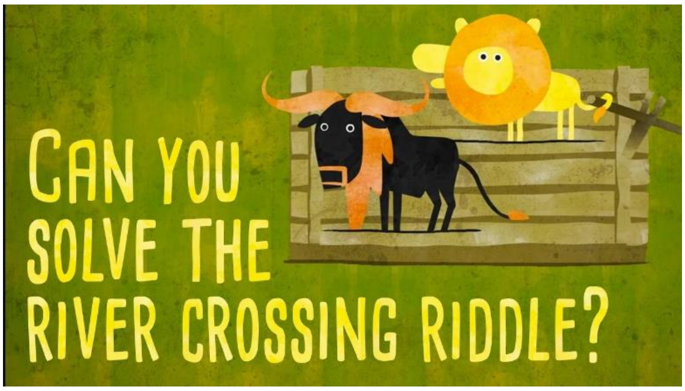
## I. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehar-hari, seringkali kita menemukan berbagai macam permainan asah-otak. Mulai dari catur, puzzle, sudoku, teka-teki silang, hingga teka-teki logika (*riddle*). Terlebih lagi di era teknologi seperti sekarang, para game developer berlomba-lomba menciptakan game untuk menjaring pengguna melalui berbagai platform. Game yang diciptakan pun tidak hanya menjadi sarana hiburan semata, namun game juga mampu mengundang rasa keingintahuan, serta melatih kecerdasan otak.

Salah satu permainan yang dapat meningkatkan kecerdasan otak adalah permainan teka-teki logika (*riddle*). Ada berbagai macam jenis teka-teki logika yang sudah diperkenalkan, dan untuk menyelesaikannya kita memerlukan ketelitian, kemampuan analisa, dan kemampuan untuk mengolah informasi-informasi yang ada.

River-Crossing riddle adalah salah satu permainan teka-teki logika yang terkenal. Teka-teki ini lebih dikenal dengan teka-teki Misionaris dan Kanibal, atau teka-teki Tiga Istri dan Suami pencemburu mereka. Teka-teki menyebrangi sungai klasik ini diperkenalkan oleh Alcuin. Alcuin(735 – 908 M) adalah seorang sarjana Inggris terkenal yang menjadi penasihat Kaisar Romawi Charlemagne. Charlemagne sangat menyukai teka-teki sehinggia ia mempekerjakan Alcuin untuk menciptakan teka-teki semata-mata untuk kesenangannya. Alcuin mengumpulkan teka-teki dalam sebuah buku berjudul *Propositons ad acuesndos iuvenyes*, atau dalam bahasa inggris "*Problems to sharp the young*". Variasi, seperti meningkatnya jumlah benda atau kapasitan angkutan, dimulai pada abad ke-16.

Ada berbagai macam variasi dari teka-teki menyebrangi sungai ini, namun yang akan dibahas adalah tentang Tiga Singa dan Tiga Bison yang diambil dari laman "ed.ted.com". Dalam versi Alcuin, singa diibaratkan sebagai kanibal, sedangkan bison diibaratkan sebagai misionaris.

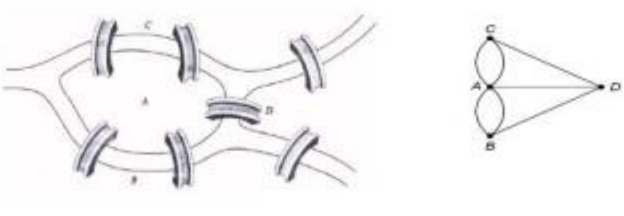



**Gambar 1. Ilustrasi River-Crossing riddle**

## II. TEORI DASAR

1. Definisi Graf

Graf adalah hubungan yang menghubungakan objek-objek diskrit antara satu dengan yang lain[1]. Pada tahun 1836, Leonhard Euler membuktikan bahwa perjalanan di kota Koenigsberg dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali, tidak dapat dilakukan. Dalam pembuktiannya, Euler menyederhanakan gambaran jembatan Konigsberg itu menjadi suatu diagram:

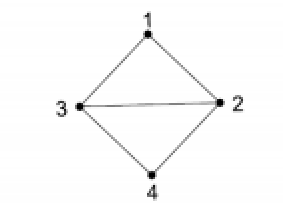


**Gambar 2. Graf yang menggambarkan kota Konigsberg**

Sejak saat itulah penggunaan diagram semacam itu mulai populer dan teorinya dipakai sampai saat ini yang kita sebut sekarang sebagai graf. Sebagai contoh Graf G=(V,E) dalam hal ini:

V = himpunan yang tidak kosong dari simpul (*vertices*)
$= \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$
E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$= \{ e_1, e_2, \dots, e_n\}$



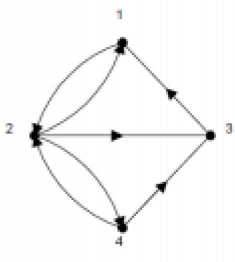

**Gambar 3. Graf G1**

Pada Gambar 3. Graf G1 adalah Graf dengan
V = {1,2,3,4}
E = {(1,2),(1,3),(2,3),(2,3),(3,4)}

2. Jenis Graf

Berdasarkan representasi arahnya Graf digolongkan menjadi 2 yaitu:

1. Graf tak Berarah
   Graf tak Berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah[1]. Graf jenis ini dapat diaplikasikan untuk merepresentasikan rangkaian elektrik, rantai makanan pada suatu ekosistem, penggambaran ikatan molekulmolekul kimia. Contoh Graf tak berarah seperti yang ada pada Gambar 3.
2. Graf Berarah
   Graf Berarah adalah graf yang sisinya mempunyai orientasi arah[1].Graf jenis ini cukup banyak aplikasinya di dalam kehidupan nyata contohnya Persoalan Pedagang Keliling (Travelling Salesman Problem) yang setiap sisinya akan diberikan bobot untuk menentukan rute dengan bobot paling minimum yang dapat ditempuh. Contoh Graf Berarah seperti yang ada pada Gambar 4. di bawah ini.

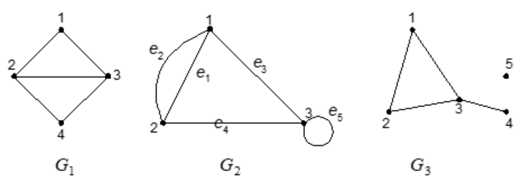



**Gambar 4. Contoh Graf Berarah**

Sebuah graf berarah dikatakan Graf Terhubung Kuat (Strongly Connected graph) apabila setiap simpul pada graf tersebut mempunyai sisi yang masuk yang masuk dan sisi yang keluar.

3. Terminologi graf

a) Ketetanggaan (*Adjacent*)
Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduannya terhubung langsung.

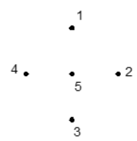



Pada graf $G_1$ simpul bertetangga dengan simpul 2 dan 3, simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

b) Bersisisan (*Incidency*)
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan
$e$ bersisian dengan simpul $v_j$, atau
$e$ bersisian dengan simpul $v_k$
Pada graf $G_1$ sisi (2,3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, sisi (2,4) bersisan dengan simpul 2 dan simpul 4, tetapi sisi (1,2) tidak bersisian dengan simpul 4.

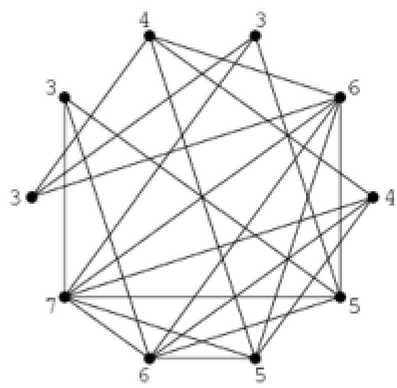
c) Simpul terpencil (*Isolated Vertex*)
Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisan dengannya.
Pada graf $G_3$ simpul 5 adalah simpul terpencil.

d) Graf Kosong *(null graph atau empty graph*)
Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong ($N_n$).




**Gambar 5. contoh graph kosong**

e) Derajat (*degree*) Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
Notasi: $d(v)$
Tinjau graf $G_1$ : $d(1) = d(4) = 2$
$d(2) = d(3) = 3$
Tinjau graf $G_3$ : $d(5) = 0$ → simpul terpencil
$d(4) = 1$ → simpul anting-anting
Tinjau graf $G_2$ : $d(1) = 3$ → bersisan dengan sisi ganda
$d(2) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop)*



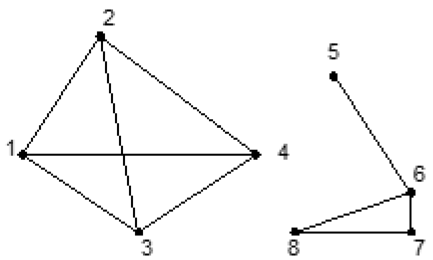

Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul.
Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.
Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$ ,
maka $\sum d(v) = 2|E|$

Tinjau graf $G_1$: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4)$
$= 2 + 3 + 3 + 2 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$
Tinjau graf $G_2$: $d(1) + d(2) + d(3)$
$= 3 + 3 + 4 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$
Tinjau graf $G_3$: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$
Akibat dari *lemma* (*corollary) :*
Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

f) Litansan (*Path*)
Lintasan yang panjangnya $n$ dari simpul awal $v_0$ ke simpul tujuan $v_n$ di dalam graf $G$ ialah barisan berselan-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, .., v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga
$e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$
adalah sisi-sisi dari graf G.

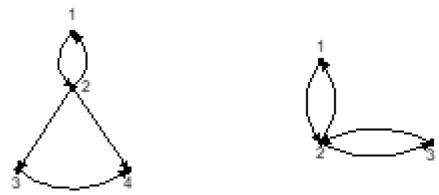
g) Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.

h) Terhubung (*connected*)
Dua buah simpul $v_1$ dan simpul $v_2$ disebut terhubung jika terdapat lintasan dari $v_1$ ke $v_2$
$G$ disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul $v_i$ dan $v_j$ dalam himpunan $V$ terdapat lintasan dari $v_i$ ke $v_j$.
Jika tidak, maka $G$ disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*).



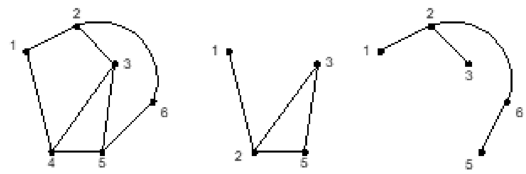

**Gambar 6. Contoh graf tak terhubung**

Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).
Dua simpul, u dan v, pada graf berarah G disebut terhubung kuat (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari $u$ ke $v$ dan juga lintasan berararah dari $v$ ke $u$.
Jika $u$ dan $v$ tidak terhubung kuat tetatpi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka $u$ dan $v$ dikatakan terhubung lemah (*weakly connected*).
Graf berarah G disebut graf terhubung kuat (*strongly connected graph)* apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G, terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut graf terhubung lemah.



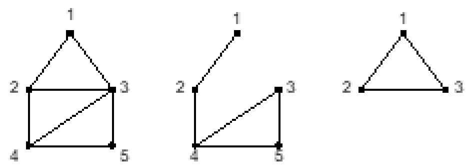
**Gambar 7. Graf terhubung lemah (kiri) dan graf terhubung kuat (kanan)**

i) Upagraf (Subgraph) dan Komplemen Upagraf
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf (subgraph) dari $G$ jika $V_1 \in V$ dan $E_1 \in E$.
Komplemen dari upagraf $G_1$terhadap graf $G$ adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan $V_2$ adalah himpunan simpul yang anggota-anggota $E_2$ bersisian dengannya.



**Gambar 8 Graf G1, Sebuah upagraf, komplemen dari upagraf**

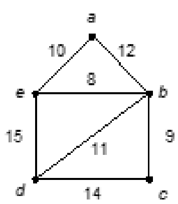
j) Upagraf Rentang (Spanning Subgraph)
Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan upagraf rentang jika $V_1 = V$ (yaitu $G_1$ mengandung semua simpul dari $G$).



**Gambar 9. graf G, upagraf rentang dari G, bukan upagraf rentang dari G**

k) *Cut-set*
*Cut-set* dari graf terhubung $G$ adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

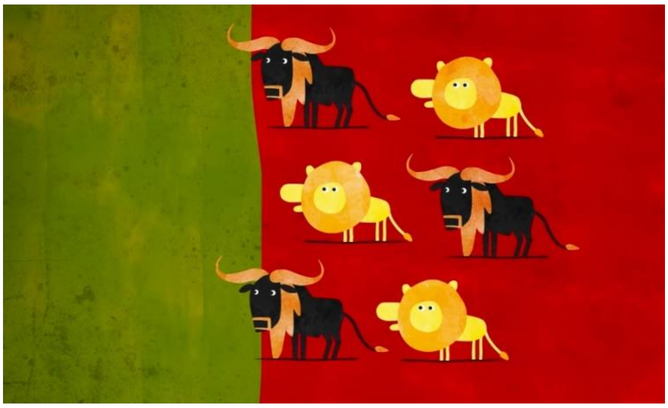
l) Graf Berbobot (*Weighted Graph)*
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga(bobot).




**Gambar 10. graf berbobot**

4. Teka-teki Tiga Singa dan Tiga Bison

Teka-teki Tiga Singa dan Tiga Bison berbunyi sebagai berikut: “ Ketika kebakaran membumi-hanguskan padang rumput, tiga singa dan tiga bison lari menyelamatkan diri. Untuk kabur dari kobaran api, mereka harus menyeberang ke sisi kiri sungai yang dipenuhi buaya. Untungnya ada sebuah rakit di dekat mereka. Rakit itu bisa membawa maksimal 2 hewan bersamaan, dengan syarat setidaknya harus ada satu singa atau bison di rakit untuk mendayungnya menyebrangi sungai. Namun ada satu masalah, jika jumlah singa melebihi bison di salah satu sisi sungai, walaupun hanya sebentarm naluri singa akan muncul, dan memangsa bison tersebut. Jumlah hewan di rakit juga masuk hitungan ketika sampai di salah satu sisi sungai. Bagaimana cara tercepat agar keenam hewan tersebut bisa menyebrang tanpa membuat para singa memangsa bison?”



**Gambar 11. Ilustrasi teka-teki**

Dari pemaparan di atas kita dapat menyimpulkan aturan-aturan yang ada pada teka-teki tiga singa dan tiga bison, yaitu:

1. Rakit membutuhkan paling sedikit satu hewan untuk dapat didayung menyebrangi sungai, dan bisa mengangkut paling banyak dua hewan.

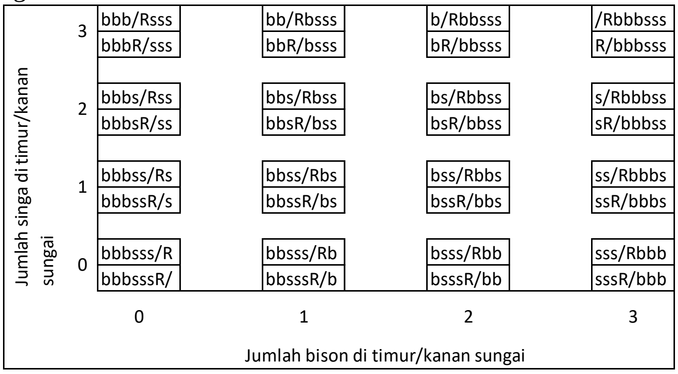

2. Jika jumlah singa melebihi bison di salah satu sisi sungai (termasuk jumlah yang ada di rakit jika rakit berada di sisi yang bersangkutan), mereka akan memangsa bison.

## III. PEMBAHASAN

Suatu cara yang sistematis adalah dengan menggambarkan semua kemungkinan keadaan, dan kemudian menghilangkan bagian-bagian yang tidak mungkin terjadi karna tidak memenuhi kendala yang disayarkan.

Misalkan simbol b menyatakan bison, s menyatakan singa, R menyatakan rakit dan simbol “/” menyatakan sungai. Dengan menggunakan simbol tersebut maka bbbssR/s berarti suatu keadaan di mana di sisi barat sungai (di sebelah kiri simbol “/”) ada 3 bison dan 2 singa, sedangkan di sisi timur sungai ada seekor singa. Rakit ada di sisi barat sungai.

Semua kemungkinan keadaan di sungai tersebut dapat digambarkan pada gambar 12. (sumbu mendatar menyatakan jumlah bison di timur sungai dan sumbu tegak menyatakan jumlah singa di timur sungai). Pada suatu titik tertentu ada, 2 kemungkinan posisi rakit(R), yaitu di kiri sungai atau di kanan sungai.



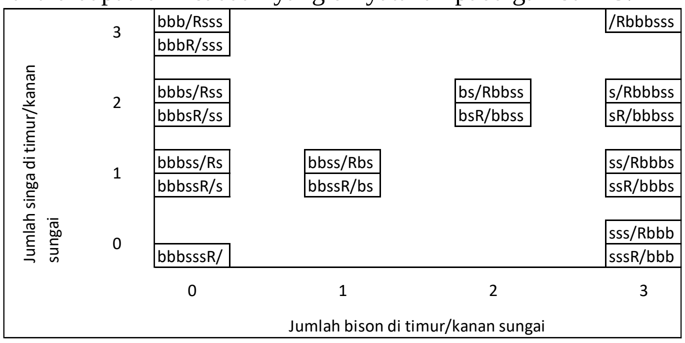

**Gambar 12. Semua keadaan di sungai**

Selanjutnya, dihilangkan keadaan-keadaan yang tidak mungkin terjadi :

a) Karena jumlah singa (s) di suatu sisi sungai tidak boleh lebih banyak dari jumlah bison (b), maka titik titik : bb/Rbsss, bbR/bsss, bbsss/Rb, bbsss Rb, b/Rbbsss, bR/bbsss, bss/Rbbs, bssR/bbs, bsss/Rbb, bsssR/bb harus dihilangkan.

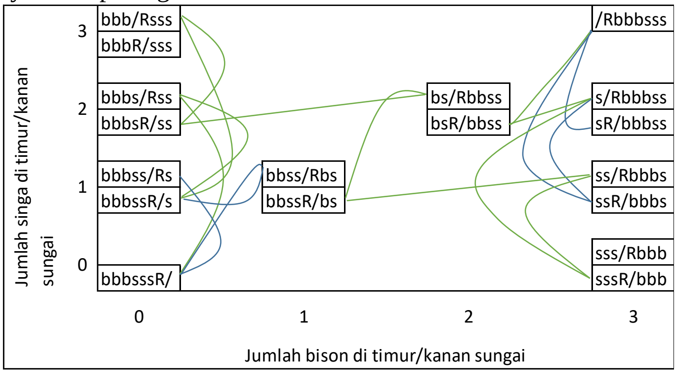
b) Rakit harus berada pada sisi sungai yang ada penghuninya. Jika tidak demikian, maka tidak ada hewan yang dapat menyebrang. Oleh karena itu, harus kita hilangkan titik-titik bbbsss/R dan R/bbbsss.

Dengan adanya beberapa titik yang dihilangkan tersebut, maka didapatkan keadaan yang dinyatakan pada gambar 13.



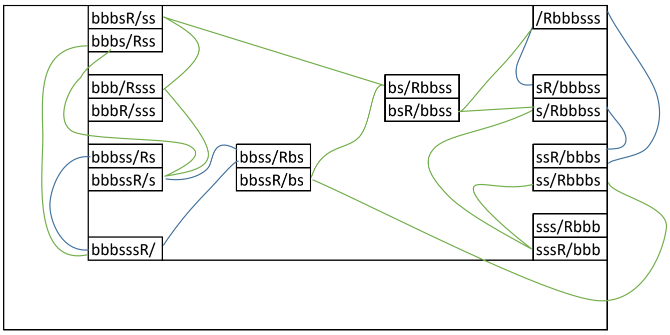

**Gambar 13. Kondisi-kondisi dengan keadaan yang tidak mungkin dicapai sudah dihapus**

Dari titik-titik yang tersisa, dibuat garis-garisnya. Suatu garis menghubungkan 2 buah titik yang dapat dicapai satu dari yang lainnya. Sebagai contoh, titik /Rbbbsss dapat dihubungkan dengan titik bsR/bbss karena dari titik /Rbbbsss, rakit dapat mengangkut 1 bison dan 1 singa secara bersamaan ke sisi kiri sungai, sehingga didapatkan titik bsR/bbss. Kondisi ini juga berlaku sebaliknya. Dari titik bsR/bbss, perahu dapat mengangkut 1 bison dan 1 singa secara bersamaan ke sisi kanan sungai sehingga didapatkan titik /Rbbbsss. Dengan penambahan semua garis yang mungkin dibuat, maka didapatkan graf yang dinyatakan pada gambar 14.




**Gambar 14. Kondisi yang memungkinkan dilengkapi dengan graf**

Dari gambar 14. kita dapat membuat graf planarnya yang ditampilkan pada gambar 15. Dengan cara memindahkan beberapa titik sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan.




**Gambar 15. Graf planar dari gambar 8.**

Untuk menyelesaikan masalah tersebut, berarti kita harus mencari jalur (garis) yang menghubungkan titik /Rbbbsss (rakit dan semua hewan yang terlibat berada di kanan sungai) dengan titik bbbsssR/ (rakit dan semua hewan yang terlibat berada di sisi kiri sungai).

Dari gambar 14. Didapatkan beberapa kemungkinan jalur yaitu:

- /Rbbbsss → bsR/bbss → s/Rbbbss → sssR/bbb → ss/Rbbbs → bbssR/bs → bs/Rbbss → bbbsR/ss → bbb/Rsss → bbbbssR/s → bbbs/Rss → bbbsssR/
- /Rbbbsss → ssR/bbbs → s/Rbbbss → sssR/bbb → ss/Rbbbs → bbssR/bs → bs/Rbbss → bbbsR/ss → bbb/Rsss → bbbbssR/s → bbbs/Rss → bbbsssR/
- /Rbbbsss → bsR/bbss → s/Rbbbss → sssR/bbb → ss/Rbbbs → bbssR/bs → bs/Rbbss → bbbsR/ss → bbb/Rsss → bbbssR/s → bbss/Rbs → bbbsssR/
- /Rbbbsss → ssR/bbbs → s/Rbbbss → sssR/bbb → ss/Rbbbs → bbssR/bs → bs/Rbbss → bbbsR/ss → bbb/Rsss → bbbssR/s → bbbs/Rss → bbbsssR/

Dari 4 kemungkinan yang ditampilkan, ke-4nya merupakan cara tercepat agar semua hewan dapat menyebrang ke sisi lain sungai. Perbedaannya hanya terletak pada awal dan akhir. Di awal kita dapat memilih untuk menyebrangkan 1 bison dan 1 singa terlebih dahulu atau 2 singa terlebih dahulu. Dari 2 pilihan tersebut kita akan menyisakan 1 singa di kiri sungai dan mengembalikan 1 bison untuk kembali ke sisi kanan sungai. Setelah itu semua pilihan melakukan hal yang sama yaitu mengirimkan 2 singa untuk menyebrangi sungai dan menghasilkan 3 singa di sisi kiri sungai dan 3 bison di sisi kanan sungai. Setelah itu singa kembali ke sisi kanan sungai, setelah itu 2 bison melakukan penyebrangan kemudian 1 bison dan 1 singa kembali ke sisi kanan sungai. Setelah itu 2 bison menyebrang ke sisi kiri dan satu singa menyebrang ke sisi kanan. Kini keadaan adalah 3 bison di sisi kiri dan 3 singa di sisi kanan. Setelah itu 2 singa dari sisi kanan menyebrang menuju sisi kiri sungai, setelah itu terdapat 2 pilihan yaitu menyuruh bison untuk menjemput singa terakhir di sisi kanan sungai atau menyuruh salah satu singa di sisi kanan untuk menjemput singa di sisi kiri.

## IV. KESIMPULAN

Teori graf yang merupakan materi dari mata kuliah Matematika Diskrit penerapannya sangat banyak dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa penerapannya mulai dari penggambaran peta, menentukan lintasan terpendek, menentukan rute yang membentuk sirkuit, hingga memecahkan teka-teki.

Salah satu teka-teki yang dapat dipecahkan dengan menggunakan teori graf adalah teka-teki river-crossing, dengan menentukan seluruh kemungkinan keadaan dan saling menghubungkan keadaan-keadaan yang ada dengan graf, maka akan ditemukan solusi dari teka-teki river-crossing ini.

## V. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Allah swt. Yang senantiaasa memberikan rahmat serta karunianya sehingga penulis dapat menyelesaikan makalah ini tepat waktu. Terima kasih juga kepada Dr. Judhi Santoso M.Sc. dan Dr. Rinaldi Munir selaku dosen mata kuliah Matematika Diskrit. Terima kasih kepada orang tua penulis dan semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyelesaian makalah ini baik dalam bentuk materil maupun moril. Tentunya dalam proses pembuatan makalah ini masih terdapat kesalahan yang tidak disengaja. Oleh karena itu, penulis sangat terbuka dalam menerima kritik, saran, serta komentar dari berbagai pihak. Semoga dengan adanya makalah ini dapat bermanfaat bagi banyak orang dan dapat digunakan sebagaimana mestinya.

## REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit* (Edisi Kedua). Bandung : Informatika Bandung, 2003.
[2] https://ed.ted.com/lessons/can-you-solve-the-river-crossing-riddle-lisa-winer#review tanggal akses : 3 Desember 2017 pukul 12:45 WIB.
[3] Pressman, Ian. *The Mathematical Gazette*. The Mathematical Association, 1989.

## SUMBER GAMBAR

[4] Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit* (Edisi Kedua). Bandung : Informatika Bandung, 2003.
[5] https://ed.ted.com/lessons/can-you-solve-the-river-crossing-riddle-lisa-winer#review tanggal akses : 3 Desember 2017 pukul 12:45 WIB.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017

Raka Hadhyana, 13516099