Kombinatorial dan Peluang dalam Masalah Monty Hall

Naufal Putra Pamungkas - 13516110
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
itb13516110@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Masalah Monty Hall muncul dari sebuah acara kuis "Let's Make a Deal" dimana terdapat 3 buah pintu yang salah satunya berisi hadiah yang sangat menarik, dan 2 pintu lainnya berisi hadiah tidak berharga (zonk). Peserta akan diminta untuk memilih salah satu pintu, hadiah dibalik pintu terpilih akan menjadi milik peserta tersebut. Setelah memilih pintu, Monty Hall, si pembawa acara akan membuka pintu yang tidak dipilih peserta dan berisi zonk, lalu peserta diberi kesempatan untuk mengganti pilihan pintunya. Permasalahannya adalah apakah sebaiknya peserta mengganti pilihannya, tetap dengan pilihan sebelumnya, atau keduanya tidak mempengaruhi apapun? Ternyata, mengganti pilihan pintu memiliki peluang memenangkan hadiah sebesar 66.67%, sedangkan tidak mengganti pilihan pintu memiliki peluang kemenangan sebesar 33.33%. Jadi, strategi terbaik dalam permainan ini adalah mengganti pilihan pintu.**

***Kata Kunci*—kombinatorial, Monty Hall, peluang**

I. PENDAHULUAN

Let's Make a Deal adalah sebuah *game show* di Amerika Serikat yang diciptakan sekaligus dibawakan oleh seorang filantropis, Monty Hall. Acara ini pertama kali tayang pada tahun 1963 dan sukses menarik banyak penggemar. Beberapa stasiun televisi dari berbagai negara membuat acara yang sama dibawah lisensi *Let's Make a Deal,* termasuk Indonesia. Di Indonesia, acara kuis yang berada dibawah lisensi tersebut adalah *Super Deal.*

Gambar 1.1: Monty Hall dan acaranya *Let's Make a Deal*
Sumber: usatoday.com

Pada acara tersebut, Monty akan memilih salah satu penonton yang beruntung untuk ikut permainannya. Penonton yang terpilih akan diberi hadiah langsung dengan nilai yang medium seperti sebuah televisi atau 100-300 dolar AS. Lalu, Monty akan memberi tawaran penonton tersebut untuk menukar hadiahnya dengan hadiah yang baru. Hadiah baru ini tidak diketahui nilainya. Hadiah baru ini bisa saja lebih mewah seperti mobil dan paket liburan, namun bisa juga menjadi hadiah yang kurang berharga seperti makanan hewan, atau yang pada acara ini biasa disebut *zonk*.

Gambar 1.2: Pintu berhadiah pada permainan
Sumber: damninteresting.com

Ketika memilih untuk menukar hadiah, penonton yang terpilih akan memilih hadiahnya yang misterius melalui sebuah permainan. Ada banyak jenis permainan yang biasa dimainkan di tahap ini, mulai dari quiz, kartu, dadu, dan masih banyak lagi. Salah satu jenis permainan yang paling sering digunakan dan yang akan dibahas oleh penulis adalah permainan dengan tiga pintu rahasia. Satu diantara tiga pintu tersebut akan berisi hadiah mewah dan pintu lainnya akan berisi *zonk*. Untuk mempermudah ilustrasi, misalkan salah satu pintu berisi mobil dan 2 pintu lainnya berisi kambing.

Pemain akan diminta untuk memilih salah satu pintu yang nantinya isi dibalik pintu tersebut akan menjadi hadiah yang baru untuk si pemain. Setelah memilih, Monty akan membuka salah satu pintu yang tidak dipilih oleh pemain dan pintu yang dibuka oleh Monty pasti berisi kambing karena Monty sudah tau isi tiap pintu dan melakukannya untuk menaikan suasana. Dengan 1 pintu berisi kambing terbuka, kini tersisa dua pintu yang belum diketahui isi dibaliknya. Setelah itu, Monty akan memberi tawaran untuk mengganti pilihan pintu sebelum akhirnya membuka pintu yang sudah dipilih dan mengungkap hadiah apa yang didapat si pemain. Lalu, langkah apa yang harus diambil untuk memperoleh kemungkinan mendapat mobil terbesar? Atau kedua pilihan sama-sama memiliki peluang mendapat mobil yang sama? Pertanyaan itulah isi dari *Monty Hall Problem.*

Pada makalah ini, penulis akan menerapkan hasil pembelajaran kombinatorial dan peluang diskrit kedalam masalah Monty Hall dan mencari langkah terbaik jika berada di situasi yang serupa dengan permainan di *Let's Make a Deal*.

II. KOMBINATORIAL

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Penyusunan objek tersebut

1. Kaidah Dasar Menghitung

   Di dalam kombinatorial, kita harus melakukan proses *counting*, yaitu menghitung semua kemungkinan pengaturan. Dalam *counting*, terdapat dua kaidah dasar yaitu kaidah perkalian (*rule of product)* dan kaidah penjumlahan (*rule of sum).*

   1.1. Kaidah Perkalian

   Jika ada percobaan A dan B yang masing masing menghasilkan hasil p dan q, maka jika percobaan A <u>dan</u> B dilakukan, terdapat p x q percobaan.

   1.2. Kaidah Penjumlahan

   Jika ada percobaan A dan B yang masing masing menghasilkan hasil p dan q, maka jika percobaan A <u>atau</u> B dilakukan, terdapat $p + q$ percobaan.

2. Prinsip Inklusi-Ekslusi

   Untuk menggabungkan kedua kaidah, untuk menentukan banyak kemungkinan jawaban harus menggunakan cara yang bernama prinsip inklusi-eksklusi. Prinsip ini mirip dengan penggambaran gabungan (*Union)* pada diagram venn.

   Pada diagram venn, jika ada 2 himpunan saling beririsan, maka untuk mencari gabungan kedua diagram adalah menjumlahkan/menggabungkan isi kedua himpunan, lalu dikurangi dengan irisan keduanya agar tidak terduplikat elemennya. Sama halnya dengan kombinatorial, disusun dengan rumus berikut,

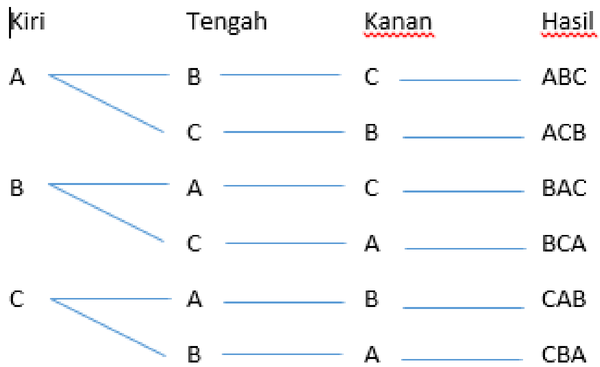
   $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

   Dengan
   - |A| = Hasil percobaan A
   - |B| = Hasil percobaan B
   - $|A \cup B|$ = Hasil percobaan yang dari percobaan A atau B
   - $|A \cap B|$ = Hasil percobaan dari percobaan A dan B

3. Permutasi

   Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek objek. Permutas r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang diplih dari n buah elemen. Dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama. Permutasi merupakan bentuk dari kaidah perkalian.

   Salah satu contoh permutasi adalah jika ada 3 bola, bola A, B, dan C dan ingin disusun di suatu wadah. Maka cara menyusun bola-bola tersebut ada 6, yaitu: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, dan CBA. Tanpa memaparkan semua kemungkinan penyusunan dan menghitungnya, kita dapat menghitungnya dengan cara lain. Misalkan ada 3 posisi untuk menyusun bola, posisi kiri, tengah dan kanan, dan pengisian dimulai dari posisi kiri ke kanan. Maka saat mengisi posisi kiri, terdapat 3 kemungkinan bola untuk diisikan. Untuk posisi tengah, terdapat 2 sisa bola untuk diisikan, karena 1 bola sudah disimpan di posisi kiri, jadi ada 2 kemungkinan untuk posisi tengah. Sedangkan untuk posisi kanan hanya tersisa 1 bola, jadi kemungkinan bola yang diisikan hanya 1 juga. Dengan kaidah perkalian, total cara penyusunan ada 3x2x1=6 cara. Berikut ilustrasinya,



Gambar 2.1: Ilustrasi Penyusunan 3 bola
Sumber: dokumen pribadi

Dengan melihat polanya, kita dapat mengetahui kemungkinan pada tiap posisi hanya dengan mengetahui jumlah objeknya. Misalkan dengan contoh, terdapat 3 objek.
Posisi pertama (kiri) memiliki 3 kemungkinan.
Posisi kedua memiliki 2 kemungkinan (3-1).
Posisi ketiga memiliki 3 kemungkinan (3-2).

Maka, dari pola ini, dapat disimpulkan sebuah rumus permutasi r dari n elemen, yaitu,

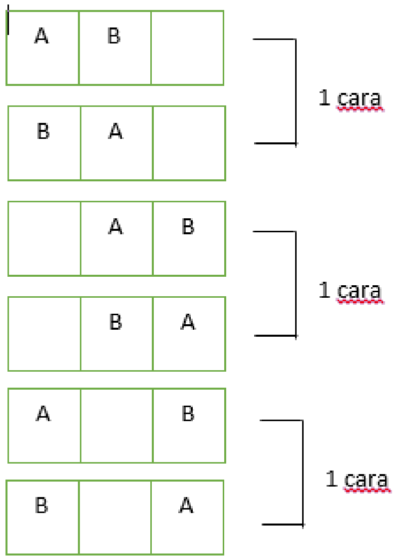
$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{n-r}$$

Dengan r adalah jumlah elemen n yang akan dipilih (yang pada contoh sebelumnya adalah jumlah posisi susunan).

4. Kombinasi

   Kombinasi adalah bentuk khusus dari permutasi. Pada kombinasi, urutan kemunculucan diabaikan, tidak seperti permutasi. Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen dari n buah elemen.

   Misalkan ada dua buah bola yang identik, namun kita beri nama bola A dan B, dan ada 3 kotak. Dengan permutasi, kita tau ada 6 cara memasukan bola ke dalam kotak-kotak tersebut, namun karena kedua bola identik, maka ada sedikit perbedaan.



Gambar 2.2: Ilustrasi pengisian 3 kotak dengan 2 bola identic
Sumber: Dokumen pribadi

Misalkan semua kemungkinannya adalah ABK, AKB, BAK, BKA, KAB, dan KBA dengan K adalah kotak kosong (tidak terisi). Karena bola A dan B identik, maka ABK dan BAK akan terhitung 1 cara, begitu juga dengan AKB BKA dan KAB KBA. Maka kombinasi dari contoh tersebut adalah hanya 3 cara, atau

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

Maka didapatlah rumus kombinasi r dari n elemen yaitu

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

5. Peluang Diskrit

Himpunan semua kemungkinan hasil percobaan dinamakan <u>ruang contoh</u>. Sedangkan setiap hasil percobaan di dalam ruang contoh disebut <u>titik contoh</u>. Hasil percobaan akan *mutually exclusive*, atau bersifat saling terpisah/eksklusif. Maksud dari eksklusif adalah, dalam satu kali percobaan, titik contoh yang muncul pasti hanya 1. Misal dalam pelemparan dadu, hasil yang keluar pasti hanya salah satu dari 6 muka dadu dan tidak mungkin salah satu dari 6 muka dadu tidak pernah muncul sekalipun. Peluang terjadinya sebuah titik contoh dinamakan peluang diskrit. Misalkan x adalah sebuah titik contoh dalam ruang contoh S. Peluang bagi x adalah ukuran kemungkinan terjadinya atau munculnya x di antara titik contoh lain di S.

Peluang kejadian E di dalam ruang contoh S adalah

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

Misalkan dalam melempar dadu, maka S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, maka peluang dadu menunjukan angka ganjil adalah

$$E = \{1,3,6\}$$
$$p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

III. PENERAPAN KOMBINATORIAL DAN PELUANG KE DALAM MASALAH MONTY HALL

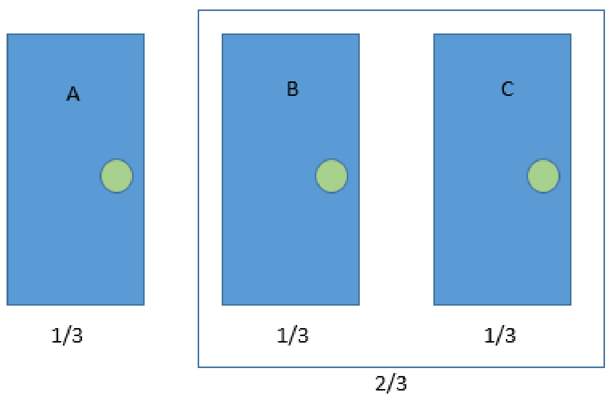
Untuk pemilihan pintu pertama, misalkan pintu yang kita pilih diberi nama pintu A, besar kemungkinan terdapat mobil dibalik pintu A adalah sebesar:

$$p(A) = \frac{cara\ pengaturan\ hadiah\ dengan\ pintu\ A\ diisi\ mobil}{total\ cara\ pengaturan\ hadiah}$$
$$p(A) = \frac{C(2,2)}{C(2,3)+C(1,3)} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

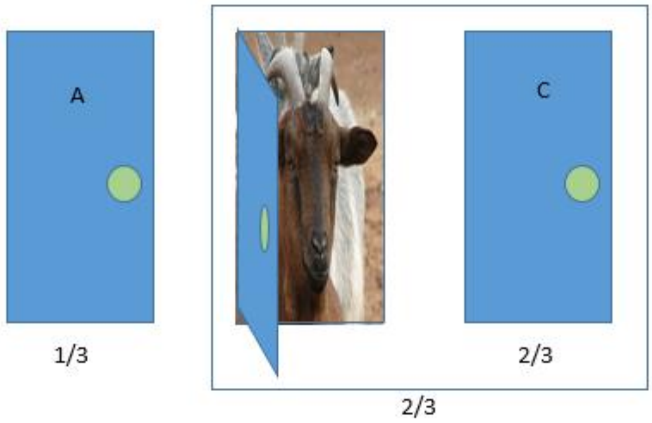
Peluang 1/3 ini juga dimiliki oleh kedua pintu lainnya. Sedangkan peluang untuk mendapatkan kambing pastilah sebesar 2/3. Namun, ketika Monty membuka salah satu dari pintu B dan C yang berisi kambing, misalkan pintu B, apakah kesempatan mendapat mobil di pintu A dan C akan tetap sama? Tentu tidak, lalu berapa peluangnya yang baru? Banyak orang mengira peluang yang dimiliki pintu A dan C menjadi ½, padahal dengan membuka pintu B yang berisi kambing, Monty menambahkan peluang mendapat mobil kepada pintu C menjadi 2/3 dan pintu A tetap memiliki 1/3 peluang. Untuk penjelasannya, akan dibandingkan peluang kemenangan jika pemain menukar pintu dan tidak menukar pintu.

Jika pemain memilih pintu A yang memiliki peluang mendapat mobil 1/3 dan tidak melakukan pertukaran, peluang ini tidak akan berubah walau pintu B sudah dibuka karena peluang yang dihitung pada *p(A)* sudah mencakup kasus dimana pintu B berisi kambing. Sedangkan jika kita menukar pintu menjadi C, C akan berisi mobil jika A berisi kambing yang peluangnya adalah 2/3. Oleh karena itu peluang mendapatkan mobil dengan menukar pintu adalah 2/3.

Penjelasan lain dapat dijelaskan pula sebagai berikut. Peluang yang dimiliki mobil berada dibalik pintu A adalah 1/3 dan di pintu **lain** sebesar 2/3 (pintu B 1/3 + pintu C 1/3). Dengan dibukanya pintu B, peluang yang dimiliki pintu **lain** tetaplah 2/3. Namun, karena pintu B sudah terbuka dan terbukti memiliki kambing, konsentrasi dari peluang 2/3 tersebut jatuh kepada pintu C sehingga peluang mobil berada di dalam pintu C adalah 2/3. Perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 3.1 Peluang keberadaan mobil sebelum pintu dibuka
Sumber: Dokumen Pribadi



Gambar 3.2 Peluang keberadaan mobil setelah pintu dibuka
Sumber: Dokumen Pribadi dan Wikipedia (diakses 3/12/17)

Jika penjelasan tersebut masih membingungkan, dengan tabel yang berisi semua kemungkinan posisi hadiah akan didapat sebagai berikut.

Pintu A	**Pintu B**	**Pintu C**	**Tetap di Pintu A**	**Menukar pintu dengan pintu lain**
Mobil	Kambing	Kambing	Menang	Kalah
Kambing	Mobil	kambing	Kalah	**Menang**
Kambing	Kambing	Mobil	Kalah	**Menang**

Sama halnya dengan kasus serupa, namun dengan 100 pintu. Jika pemain sudah memilih 1 pintu, lalu Monty membuka 98 pintu yang berisi kambing, kesempatan terdapat mobil akan bertumpuk pada pintu yang tidak pemain pilih, yaitu sebesar 99/100. Dengan pintu sebanyak ini mungkin akan terasa lebih masuk akal dibandingkan tiga pintu.

Jadi, langkah terbaik untuk mendapatkan mobil adalah selalu tukar pintu. Hal ini dapat dicoba dengan membuat program sederhana yang mensimulasikan permainan ini atau mencari simulasi / permainannya di internet. Salah satunya adalah math.ucsd.edu.

Gambar 3.2 Simulasi permainan *Let's Make a Deal* disertai dengan persentase kemenangan tiap keputusan
Sumber:
http://www.math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html

Pada situs tersebut, hasil permainan siapapun akan tercatat dan statistic kemenangannya akan ditampilkan. Dari statistic tersebut dapat dilihat bahwa persentase kemenangan dengan cara menukar pintu mendekati 66.67% dan persentase kemenangan tanpa menukar pintu hanya 33.33%.

IV. MASALAH YANG MIRIP DENGAN MONTY HALL PROBLEM

Terdapat beberapa masalah yang serupa dengan Masalah Monty Hall, beberapa masalah tersebut adalah Masalah Tiga Tahanan (*Three Prisoners Problem)* dan Paradoks Kotak Bertrand (*Bertrand Box Paradox).* Paradoks Kotak Bertrand adalah jika ada tiga kotak yang satu kotak berisi dua keping emas, satu kotak lain berisi dua keping perak, dan kotak lainnya berisi satu keping emas dan satu keping perak. Jika saat seseorang memilih salah satu kotak, lalu mengambil satu koin dari kotak itu, misalnya emas, berapakah peluang koin lainnya dari kotak yang sama akan berisi emas juga?

Masalah Tiga Tahanan berisi tentang 3 tahanan, A, B, dan C. Salah seorang dari mereka akan dipilih secara acak untuk di eksekusi mati. A yang penasaran akan nyawanya, menanyakan siapa yang akan dieksekusi kepada penjaga tahanan. Karena penjaga dilarang membocorkan siapa yang akan mati, penjaga memutuskan untuk menakut-nakuti A dengan cara hanya memberi tau siapa orang yang akan hidup, yaitu B. Mendengar ini, A semakin ketakutan karena dia mengira kemungkinan dia dieksekusi mati hari esok bertambah jadi 1/2 yang semulanya 1/3. Melihat A ketakutan, B mendatangi A dan menenangkan A dengan cara menjelaskan bahwa kemungkinan ia dieksekusi hari esok tidak naik menjadi ½. Mengapa hal tersebut?

Kedua masalah diatas dan Monty Hall Problem memiliki jawaban yang mirip. Pada Paradoks Kotak Bertrand, banyak orang mengira kemungkinan koin emas yang keluar adalah 1/2. Untuk masalah Tiga Tahanan juga banyak orang berpikir seperti tahanan A, yaitu kemungkinan A dan B dibunuh menjadi 1/2. Padahal, peluang solusi dari kedua masalah ini adalah 2/3. Dengan penurunan/pencarian solusi yang serupa dengan masalah Monty Hall, akan didapatkan peluang sebesar 2/3 untuk kemungkinan muncul koin emas. Untuk masalah Tiga Tahanan, dengan cara pemecahan yang sama, akan diketahui bahwa peluang tahanan A untuk dieksekusi akan tetap 1/3, namun peluang tahanan C untuk dieksekusi akan bertambah menjadi 2/3. Kedua peluang ini terjadi karena berpindahnya konsentrasi peluang seperti Monty Hall Problem. Jadi, itulah penerapan kombinatorial dan peluang kedalam masalah-masalah matematika, terutama Masalah Monty Hall.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan peluang untuk mendapatkan mobil, langkah yang tepat ketika Monty menawarkan untuk menukar pintu pilihan pemain dengan pintu lain adalah terima tawarannya. Jika dalam keadaan semula peluang mobil berada dibalik pintu anda sebesar 1/3 dan peluang tidak berada di pintu yang anda pilih sebesar 2/3, dengan dibukanya salah satu pintu diantara 2 pintu yang bukan pemain pilih, akan mengkonsentrasikan peluang pintu yang dibuka dengan pintu yang lainnya. Sehingga pintu yang tidak dipilih dan tidak terbuka akan memiliki peluang berisi mobil 2/3, sedangkan pintu pilihan anda akan tetap berisi 1/3. Oleh karena itu, strategi yang paling tepat dalam permainan ini adalah selalu tukar pintu.

V. PENUTUP

Pertama saya mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan nikmat, ilmu, dan kekuatan sehingga makalah Matematika Diskrit ini dapat terselesaikan tepat pada waktunya. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada kedua orang tua yang telah mendukung saya sepenuh hati, baik secara lisan maupun doa, baik dalam pembuatan makalah ini maupun kegiatan perkuliahan lainnya. Terima kasih juga kepada kepada teman-teman dan kakak tingkat yang baik secara langsung maupun tidak membantu saya dalam pembuatan makalah ini. Tidak terlupakan juga penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pengajar Matematika Diskrit K02, Ibu Harlili, dan dosen Matematika Diskrit lainnya, Bapak Rinaldi Mundir dan Bapak Judhi. Akhir kata, penulis meminta maaf sebesar-besarnya atas banyaknya kekurangan pada makalah ini. Penulis berharap makalah ini dapat bermanfaat dan bisa terus dikembangkan untuk banyak orang.

REFERENCES

[1] R. Munir, *Matematika Diskrit*, 4th ed. Bandung: Penerbit INFORMATIKA Bandung, 2003.
[2] https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem, diakses pada 2 desember 2017.
[3] https://.youtube.com/watch?v=mhlc7peGlGg, diakses pada 2 desember 2017.
[4] https://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/montybg.html, diakses pada 3 desember 2017.
[5] https://www.youtube.com/watch?v=5d_3IEofXfY, diakses pada 3 desember 2017.
[6] https://www.youtube.com/watch?v=FNl7xv5ms90, diakses pada 3 desember 2017.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2017

Naufal Putra Pamungkas 13516110