Penyelesaian Permainan Sudoku dengan Teknik Pewarnaan Graf

Mochamad Alghifari, 13516038
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13516038@std.stei.itb.ac.id@itb.ac.id

***Abstrak*—Sudoku merupakan permainan teka-teki dimana pemainnya mengisi angka ke tabel sembilan kali sembilan yang terbagi lagi menjadi upa tabel yang terdiri dari sembilan kotak persegi atau upa tabel tiga kali tiga, dengan aturan setiap angka hanya muncul satu kali tiap baris, kolom, dan upa tabel [2]. Makalah ini membahas bagaimana representasi sudoku dalam graf dan penyelesaiannya dengan teknik pewarnaan graf.**

***Kata Kunci* — sudoku, graf, pewarnaan graf, bertetangga**

I. PENDAHULUAN

Sudoku merupakan salah satu permainan terkenal dari zaman dahulu. Aturan permainan sudoku yang sekarang dibuat oleh Howard Garns terinspirasi dari Leonhard Euler yang membuat aturan mirip seperti sudoku [1]. Nama sudoku sendiri berasal dari Jepang setelah Nikoli memperkenalkan permainan ini dengan nama 'Suuji wa dokushin ni kagiru' [1].

Tujuan permainan sudoku adalah mengisi angka ke tabel sembilan kali sembilan yang terbagi lagi menjadi upa tabel yang terdiri dari sembilan kotak persegi atau upa tabel tiga kali tiga, dengan aturan setiap angka hanya muncul satu kali tiap baris, kolom, dan upa tabel [2].

Makalah ini membahas representasi sudoku dalam graf dan penyelesaian permainan sudoku dengan pendekatan teknik pewarnaan graf.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Gambar 1.1 Ilustrasi Sudoku
Sumber : https://www.kaggle.com/bryanpark/sudoku
[Diakses 4 Desember 2017]

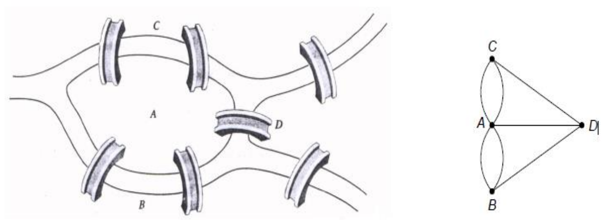
II. DASAR TEORI

A. Graf

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan yang sudah tua usianya namun masih memiliki banyak terapan di berbagai persoalan sampai saat ini [3]. Graf dapat merepresentasikan objek-objek dan hubungan antara objek-objek tersebut [3].

Permasalahan nyata pertama yang direpresentasikan dan diselesaikan dengan graf adalah masalah jembatan Konigsberg (tahun 1736). Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah sungai (Gambar 2.1). Masalah jembatan Konigsberg adalah : apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu tepat satu kali dan kembali ke tempat semula?. Permasalahan ini diselesaikan oleh matematikawan Swiss yaitu L. Euler dengan pemodelan graf.

Secara formal, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) dimana V merupakan himpunan tak-kosong dari simpul dan E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul pada V [3].

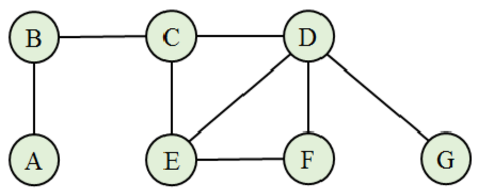


Gambar 2.1 Jembaran Konigsberg [7]

B. Jenis Graf

Berdasarkan buku Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit karya Rinaldi Munir, graf dapat dikelompokkan berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi :

- Graf sederhana, adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda. Gambar 2.2 adalah contoh graf sederhana.
- Graf tak sederhana, adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang



Gambar 2.2 Contoh Graf Sederhana
Sumber :
https://www.researchgate.net/275771321_fig1_Figure-1-A-simple-undirected-graph-used-to-illustrate-the-vertex-cover-and-reach [diakses 3 Desember 2017]

C. Terminologi Dasar

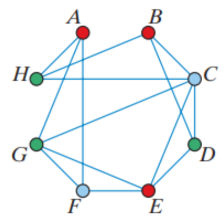
1. Ketetenggaan
Dua buah simpul bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi. Pada gambar 2.1 simpul E dan C bertetangga karena dihubungkan oleh sebuah sisi.
2. Bersisian
Untuk sembarang sisi e yang menghubungkan simpul v_j dengan simpul v_k, dikatakan sisi e bersisian dengan simpul v_j atau sisi e bersisian dengan simpul v_k. Pada Gambar 2.1 sisi yang menghubungkan B dan C bersisian dengan simpul B atau simpul C.
3. Simpul Terpencil
Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang beririsan.dengannya.
4. Graf Kosong
Graf yang tidak memiliki sisi sama sekali atau himpunan sisinya kosong.
5. Derajat
Derajat dari suatu simpul adalah jumlah sisi yang menempel dengan dengan simpul tersebut. Pada gambar 2.1, simpul D berderajat 4.
6. Lintasan
Lintasan adalah barisan sisi yang menghubungkan satu simpul dengan simpul lain.
7. Siklus atau Sirkuit
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.
8. Terhubung
Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2. G disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.
9. Upagraf dan Komplemen Upagraf
Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komplemen dari upagraf G_1 terhadap G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $G_2 = E - E_1$, dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya. Komponen graf adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G.
10. Upagraf Rentang
Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari G = (V, E) dikatakan upagraf rentang jika (V_1 = V) G_1 mengandung semua simpul dari G.
11. Cut-Set
Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung.
12. Graf Berbobot
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah bobot.

D. Pewarnaan Graf

Secara intuitif pewarnaan graf adalah mewarnai semua simpul dalam graf dengan syarat semua simpul yang bertetangga berwarna berbeda [4].

Petr Tannenbaum dalam bukunya yang berjudul Mini Excursion 2 menjelaskan *k-coloring* dan bilangan kromatis. *k-coloring* adalah mewarnai semua simpul dalam graf menggunakan k warna dengan syarat semua simpul yang bertetangga berwarna berbeda. Sedangkan bilangan kromatis adalah jumlah warna k minimum yang bisa digunakan pada *k-coloring*. Notasi bilangan kromatis untuk graf G adalah $\chi(G) = k$.

Terdapat 3 jenis pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang. Pada makalah ini hanya menggunakan pewarnaan simpul. Sebagai contoh, Gambar 2.2 merupakan implementasi dari pewarnaan simpul.



Gambar 2.2 Pewarnaan Simpul

E. Algoritma Pewarnaan Graf

Salah satu aspek penting dari pewarnaan graf adalah bagaimana menggunakan jumlah warna seminimal mungkin agar mendapakan hasil yang optimal [4]. Sehingga banyak sekali algoritma yang dikembangkan. Namun secara garis besar, algoritma pewarnaan graf dapat dibagi menjadi dua topik yaitu *Contraction* dan *Greedy Coloring*. *Greedy Coloring* berfokus pada kehati-hatian dalam memilih simpul selanjutnya yang akan diwarnai [5]. Berdasarkan buku **Excursions In Modern Mathematics with Mini-Excursions, 6th Edition** yang dikarang oleh **Peter Tannenbaum**, algoritma *Greedy Coloring* secara garis besar adalah sebagai berikut :

Diberikan sebuah graf G dengan sejumlah simpul yang terurut berdasarkan prioritas tertentu $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dan sejumlah warna $c_1, c_2, \ldots, c_n$,

- **Langkah 1.** Nyatakan simpul v_1 dengan warna c_1 (warnai simpul 1 dengan warna 1)
- **Langkah 2.** Nyatakan simpul v_2 dengan warna c_1 jika simpul v_2 tidak bertetangga dengan simpul v_1 .
- **Langkah 3,4,…,n.** Simpul v_i dinyatakan dengan warna c_i pertama yang mungkin. (warna c_i belum dinyatakan untuk tetangga dari simpul v_i)

Terdapat beberapa jenis pengurutan simpul untuk menghasilkan bilangan kromatis yang paling kecil. Salah satunya adalah pengurutan berdasarkan derajat simpul secara menurun yang dikenalkan oleh Welsh dan Powell pada tahun 1967. Secara intuitif algoritma Welsh-Powell diberikan sebagai berikut [6] :

a. Mengurutkan simpul berdasarkan derajatnya secara menurun pada list V.
b. Mengurutkan warna pada list C.
c. Mewarnai simpul pertama pada list V yang belum terwarnai dengan warna yang mungkin di list C. Warna yang mungkin adalah warna yang belum dipakai sebelumnya.
d. Warnai dengan warna di poin c, semua simpul yang tidak bertetangga dengan simpul yang berwarna sama dengan warna di poin c.
e. Ulangi langkah b dan c sampai semua simpul terwarnai.

Algoritma Welsh-Powell merupakan salah satu algoritma yang terkenal dalam kategori *Greedy Coloring* karena mudah dipahami dan bisa menghasilkan bilangan kromatis yang paling kecil untuk banyak kasus. Hal ini diperkuat dengan teorema Brook.

Teorema Brook :

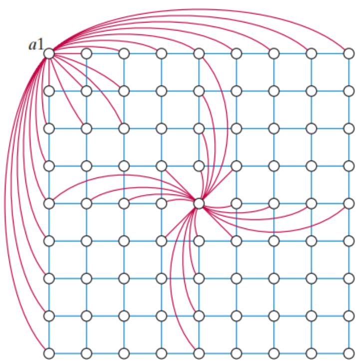
Misalkan $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ adalah derajat simpul yang terhubung dalam sebuah graf G terurut secara menurun. Jika graf G bukan C_n (sirkuit C dengan n ganjil) atau K_n (graf lengkap n), maka $\chi(G) \leq d_1$.

III. PENYELESAIAN SUDOKU

A. Membuat Graf Sudoku

Langkah pertama dalam penyelesaian masalah sudoku adalah membuat pemodelan graf sudoku terlebih dahulu. Setiap petak sudoku akan diwakili oleh simpul dalam graf, sehingga untuk sudoku 9x9 akan terdapat 81 simpul yang dibuat. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa setiap petak tidak boleh memiliki angka yang sama dengan baris, kolom, dan upa tabelnya pada sudoku. Dengan pendekatan teknik pewarnaan pada graf, maka setiap petak akan dihubungkan dengan petak-petak yang dilarang memiliki angka yang sama. Sehingga setiap simpul akan memiliki 20 derajat dan dalam satu graf sudoku 9x9 akan memiliki 810 derajat. (Gambar 3.1)

Untuk menyederhanakan bentuk graf, pada makalah ini akan membahas penyelesaian sudoku 4x4. Graf sudoku 4x4 akan memiliki 16 simpul dan setiap simpulnya memiliki 7 derajat.



Gambar 3.1 Sisi dari sebagian simpul graf sudoku 9x9
Sumber : Mini Excursion 2 [4]

Berikut adalah graf G sudoku 4x4 dengan representasi matriks bertetangga. Jika simpul v_i dan v_j bertetangga, maka g[i,j] = 1, jika tidak g[i,j] = 0.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
4	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
6	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
7	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
9	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
10	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
11	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
12	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
13	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
14	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
15	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
16	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Tabel 3.1 Representasi graf dalam matriks ketetanggaan

B. Algoritma Penyelesaian Sudoku

Pada makalah ini, permainan sudoku akan diselesaikan dengan pendekatan algoritma Welsh-Powell yang sedikit di sesuaikan dengan permainan sudoku. Berikut adalah algoritmanya :

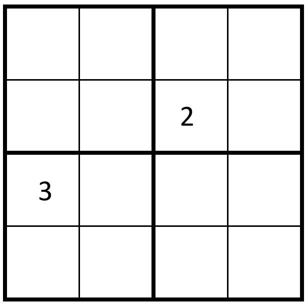
1. Mengubah angka pada sudoku menjadi warna agar mudah dalam pewarnaan.
2. Mengurutkan simpul pada list V berdasarkan :
   a. Simpul yang sudah diwarnai
   b. Indeks simpul

   Pada permainan sudoku, banyaknya derajat tidak dijadikan parameter pengurutan simpul, hal ini karena setiap simpul pada list V memiliki derajat yang sama.
3. Mengurutkan warna pada list C berdasarkan warna yang muncul terlebih dahulu pada sudoku.
4. Mewarnai simpul pertama pada list V yang **belum terwarnai** dengan warna yang mungkin di list C
5. Mewarnai simpul dengan warna pada simpul 4, semua simpul yang tidak bertetangga dengan simpul berwarna 4 dan **belum diwarnai**.
6. Ulangi langkah 4 dan 5 sampai semua simpul berwarna.
7. Mengembalikan warna menjadi angka

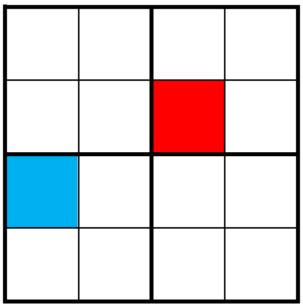
C. Implementsi Algoritma Welsh-Powell pada Sudoku

1. Mengubah angka pada sudoku menjadi warna

   Warna merah mewakili angka 2, biru mewakili angka 3, kuning mewakili angka 1, dan hijau mewakili angka 4.

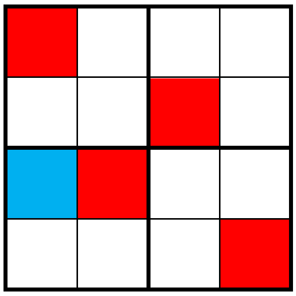


Gambar 3.2 Kondisi awal sudoku



Gambar 3.3 Kondisi awal sudoku dengan representasi warna yang menggantikan angka

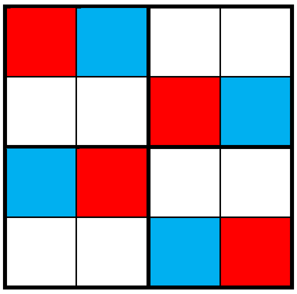
2. Berdasarkan aturan di poin 3 algoritma penyelesaian sudoku, maka urutan simpul pada list V adalah 7,9,1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,13,14,15,16
3. Urutan warna pada list C adalah merah, biru, kuning, hijau
4. Mewarnai
   Warna tersedia pertama adalah merah
   - Simpul 7
     Simpul 7 sudah diwarnai merah, maka dilewati
     Simpul 1 .. Simpul 16
     - Simpul 1
       Untuk $1 \leq j \leq 16$ dan $g[1,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana merah, maka simpul 1 diwarnai merah
     - Simpul 2,3,4,5,dan 6
       Dilewati karena bertetangga dengan simpul 1 yang berwarna merah
     - Simpul 7
       Dilewati karena sudah berwarna
     - Simpul 8
       Dilewati karena bertetangga dengan simpul 7 yang berwarna merah
     - Simpul 9
       Dilewati karena sudah berwarna
     - Simpul 10
       Untuk $1 \leq j \leq 16$ dan $g[10,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana merah, maka simpul 10 diwarnai merah
     - Simpul 11 dan 12
       Dilewati karena bertetangga dengan simpul 10 yang berwarna merah
     - Simpul 13, 14, dan 15
       Dilewati karena bertetangga dengan simpul di posisi atas simpul masing-masing
     - Simpul 16
       Untuk $1 \leq j \leq 16$ dan $g[16,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana merah, maka simpul 16 diwarnai merah



Gambar 3.4 Kondisi sudoku setelah pewarnaan merah

Warna tersedia pertama adalah biru
- Simpul 9
  Simpul 9 sudah diwarnai biru, maka dilewati
  Simpul 1 .. Simpul 16
  - Simpul 1
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 2
    Untuk $1 \leq j \leq 16$ dan $g[2,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana biru, maka simpul 2 diwarnai biru.
  - Simpul 3 dan 4
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 2 yang berwarna biru
  - Simpul 5 dan 6
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 9 dan 2 yang berwarna biru
  - Simpul 7
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 8
    Untuk $1 \leq j \leq 16$ dan $g[8,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana biru, maka simpul 8 diwarnai biru.
  - Simpul 9
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 10, 11, dan 12
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 9 yang berwarna biru
  - Simpul 13 dan 14
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul di posisi atas simpul masing-masing
  - Simpul 15
    Untuk $1 \leq j \leq 16$ dan $g[15,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana biru, maka simpul 15 diwarnai biru

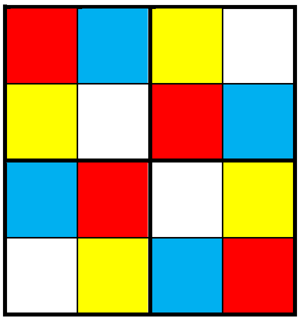
- Simpul 16
  Dilewati karena sudah berwarna



Gambar 3.5 Kondisi sudoku
setelah pewarnaan biru

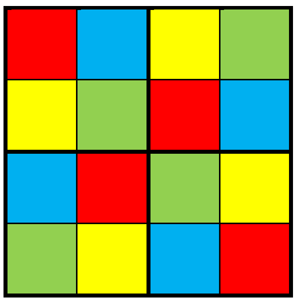
Warna tersedia pertama adalah kuning

- Simpul 3
  Simpul 1 .. Simpul 16
  Simpul 1 dan 2 sudah berwarna, maka dilewati
  - Simpul 3, Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[3,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana kuning, maka simpul 3 diwarnai kuning
  - Simpul 4
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 3 yang berwarna kuning
  - Simpul 5
    Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[5,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana kuning, maka simpul 5 diwarnai kuning
  - Simpul 6,7, dam 8
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 5 yang berwarna kuning
  - Simpul 9 dan 10
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 11
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 3 yang berwarna kuning
  - Simpul 12
    Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[12,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana kuning, maka simpul 12 diwarnai kuning
  - Simpul 13
    Dilewati karena bertetangga dengan simpul 5 yang berwarna kuning
  - Simpul 14
    Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[14,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana kuning, maka simpul 14 diwarnai kuning
  - Simpul 15 dan 16
    Dilewati karena sudah berwarna



Gambar 3.6 Kondisi sudoku
setelah pewarnaan kuning

- Simpul 4
  Simpul 1 .. Simpul 16
  Simpul 1, 2, dan 3 sudah berwarna, maka dilewati
  - Simpul 4, Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[4,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana hijau, maka simpul 4 diwarnai hijau
  - Simpul 5
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 6
    Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[6,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana hijau, maka simpul 5 diwarnai hijau.
  - Simpul 7,8,9 dan 10
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 11
    Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[11,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana hijau, maka simpul 11 diwarnai hijau
  - Simpul 12
    Dilewati karena sudah berwarna
  - Simpul 13
    Untuk $1 \le j \le 16$ dan $g[13,j] = 1$, simpul j tidak ada yang berwana hijau, maka simpul 13 diwarnai hijau
  - Simpul 14, 15 dan 16
    Dilewati karena sudah berwarna



Gambar 3.7 Kondisi sudoku
setelah pewarnaan hijau
sehingga semua petak sudah terwarnai

5. Mengembalikan warna menjadi angka

2	3	1	4
1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2

Gambar 3.8 Permainan sudoku selesai

IV. SIMPULAN

Sudoku dapat diprepresentasikan dalam graf. Setiap simpul dalam graf mewakili setiap petak dalam sudoku. Sedangkan semua sisi dalam graf merepresentasikan hubungan antar petak pada sudoku yang tidak boleh memiliki angka yang sama. Dengan pemodelan seperti itu, maka sudoku dapat diselesaikan dengan teknik pewarnaan graf, khususnya dengan pendekatan algoritma Welsh-Powell. Bilangan kromatis yang dihasilkan selalu sama dengan ukuran sudoku. Jika ukuran sudoku 4x4 maka bilangan kromatis yang dihasilkan 4, jika ukuran sudoku 9x9 maka bilangan kromatis yang dihasilkan 9.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillahirabbil'alamin puji syukur kepada Tuhan Semesta Alam, atas nikmat, rahmat dan karunia-Nya makalah ini dapat disekesaikan. Terima kasih kepada Dra. Harlili, Dr. Rinaldi Munir, dan selaku dosen mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit yang telah mencurahkan ilmunya kepada kami. Tidak lupa penulis berterima kasih kepada orang tua, teman-teman atas bantuan, dukungan, dan doa-doa kebaikannya.

REFERENSI

[1] http://www.sudokuessentials.com/history-of-sudoku.html (Diakses 2 Desember 2017 Pk. 21.00)

[2] http://www.sudoku.com/ (Diakses 4 Desember 2017 Pk 06.00)

[3] Munir, Rinaldi. Matematiaka Diskrit (Edisi Kedua). Bandung: Informatika Bandung, 2003

[4] Tannenbaum , Peter. 2006. Mini Excursion 2: A Touch of Color, New Jersey: Prentice Hall Inc. http://www.math.uri.edu/~eaton/0131873814_MEb.pdf

[5] Al-Omari, H. and Eddin, K. , 2006, New Graph Coloring Algorithms. http://www.phys.ubbcluj.ro/~zneda/edu/mc/graphcolouring.pdf

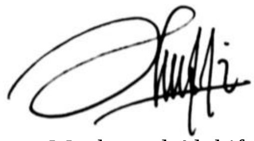
[6] http://graphstream-project.org/doc/Algorithms/Welsh-Powell/. (Diakses 2 Desember 2017 Pk. 14.00)

[7] Rosen, Kenneth. "Mathematics and Its Applications 7th edition",McGraw-Hill: New York

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 4 Desember 2017



Mochamad Alghifari
13516038