Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Topik: Teori Bilangan, Kombinatorial
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 31 Oktober 2016
Waktu: 55 menit

1. Suatu bilangan bulat bersisa 2 jika dibagi 3, bersisa 3 jika dibagi 5, dan bersisa 3 jika dibagi 7. Dengan menggunakan *Chinese Remainder Theorem* atau cara perhitungan yang lain, temukanlah bilangan terkecil yang mungkin.

Jawaban:
X ≡ 2 mod 3
X ≡ 3 mod 5
X ≡ 3 mod 7

Persamaan 1
X = 2 + 3k1

Masukan ke persamaan 2 .
2 + 3k1 = 3 mod 5
3k1 = 1 mod 5
k1 = 2 mod 5
k1 = 2 + 5k2

X = 2 + 3(2 + 5k2)
X = 8 + 15k2

Masukan ke persamaan 3.
8 + 15k2 = 3 mod 7
15k2 = 2 mod 7
k2 = 2 mod7
k2 = 2 + 7k3

X = 8 + 15(2 + 7k3)
X = 38 + 105k3
X = 38 mod 105

Sehingga solusi terkecil yang mungkin adalah 38

2. (a) Carilah PBB (atau *gcd*) dari 621 dan 483
(b) Cari solusi dari 621m + 483n = k, dimana k adalah PBB dari 621 dan 483
(c) Hitung 3^{64} mod 67 dengan menggunakan Fermat's Theorem

Jawaban:
(a) Cari PBB antara 621 dan 483
Kita gunakan algorimta Euclidean
621 = 1 · 483 + 138
483 = 3 · 138 + 69
38 = 2 · **69**
Jadi, PBB antara 621 dan 483 adalah **69 (solusi).**

(b) Baris kedua dari hasil algoritma Euclidean di atas:

$69 = 483 - 3 \cdot 138$ (i)

Baris kesatu dari hasil algoritma Euclidean di atas:

$138 = 621 - 1 \cdot 483$ (ii)

Sulihkan (ii) ke dalam (i):

$$
\begin{aligned}
69 = 483 - 3 \cdot 138 &= 483 - 3\,(621 - 1 \cdot 483) \\
&= 483 - 3 \cdot 621 + 3 \cdot 483 \\
&= 4 \cdot 483 - 3 \cdot 621 \\
&= -3 \cdot 621 + 4 \cdot 483
\end{aligned}
$$

Jadi, $69 = -3 \cdot 621 + 4 \cdot 483$, sehingga m = -3 dan n = 4

(c) Hitung 3^{64} modulo 67 dengan menggunakan Fermat's Theorem

Kita tahu $3^{66} \equiv 1 \pmod{67}$. Sehingga

$3^2 \cdot 3^{64} \equiv 1 \pmod{67}$.

Sehingga kita tinggal butuh untuk menginvert 9 mod 67. Kamu bisa melakukannya dengan menggunakan algoritma Euclid atau dengan mengeceknya satu per satu. Contohnya, $67 \cdot 2 + 1 = 135 = 15.9$, jadi kita tau bahwa $9^{-1} \equiv$ **15 (mod 67) (solusi).**

3. Suatu hari, Edwin mendapat surat dari penggermar rahasianya yang berisi :

“ **SIZIBM SQL** “

Caesar cipher. Aku telah tergeser 8 kali.

Bantulah Edwin untuk membaca pesan rahasia tersebut (tulisan yang dicetak tebal)!

1. **Jawaban**: Dari soal dapat dilihat bahwa nilai k = 8.

Sehingga fungsi dekripsinya :

$D(c) = (c - k) \bmod 26$

Langkah dekripsi :

- Ubah huruf A-Z menjadi angka 1-26
- Masukkan ke dalam fungsi dekripsi
- Ubah angka 1-26 menjadi hrurf A-Z
- Hasil akhir yang didapat “KARATE KID”

4. Lomba Gemastik 9 sedang berlangsung di Jarkata. Dari 120 peserta lomba hanya akan diambil ***top 40*** pemenang. Edwin, Agus, dan Vincent merupakan mahasiswa yang mewakili ITB. Tentukan berapa banyak kemungkinan pemenang sehingga :

a. Edwin berada di posisi ke-3 teratas pada perlombaan tersebut

b. Edwin dan Vincent berada di posisi 40 teratas tapi Agus tidak

(Perhatian: semua jawaban dalam bentuk perkalian, atau $C(n, r)$, atau $P(n, r)$, tidak perlu dihitung hasil akhirnya)

Jawaban:

N = 120 peserta

X = 40 pemenang

a. Karena Edwin pasti berada di *top-3* maka tersisa

119 X 118 X 117 X 116 X … X 79 X 80 kemungkinan untuk mengatur *top-39* lainnya

Jadi, kemungkinan untuk mengatur Edwin berada di *top-3* adalah :

119 X 118 X 117 X 116 X … X 79 X 80 X 3 kemungkinan

b. Karena Agus pasti tidak berada di top-40 maka

C(120-1, 40) = C(119,40) kemungkinan

5. Dari antara 20 pemain bola yang tersedia, 5 orang adalah spesialis pemain belakang, 6 orang pemain tengah, 6 orang pemain depan, dan 3 orang kiper. Sebuah tim sepak bola harus membentuk sebuah tim yang terdiri dari 14 orang (11 pemain, 3 cadangan). 11 pemain harus terdiri dari 1 kiper, 3 pemain belakang, 4 pemain tengah, dan 3 pemain depan. Pemain cadangan dapat dipilih dari seluruh pemain yang tersedia (tidak ada spesifikasi khusus untuk pemain cadangan). Tentukan berapa susunan tim yang dapat dibentuk!

   Jawaban:

   3 pemain belakang: C(5, 3)
   4 pemain tengah : C(6, 4)
   3 pemain depan : C(6, 3)
   1 kiper : C(3, 1)
   Setelah memilih 11 pemain, pilih 3 cadangan.
   3 pemain cadangan : C(20 – 11, 3) = C(9, 3)

   Total kemungkinan : C(5, 3) · C(6, 4) · C(6, 3) · C(3, 1) · C(9, 3)

6. Paman Donald kembali dari liburannya di Jepang. Ia pulang membawa oleh-oleh 8 buah boneka (yang identik) dan 11 mobil mainan (yang identik). Ia akan membagikan **mobil mainan** untuk 3 keponakan laki-lakinya dan **boneka** untuk 3 keponakan perempuannya. Ia memastikan setiap keponakan laki-lakinya mendapat minimal 1 buah mobil mainan dan keponakan perempuannya mendapat minimal 1 buah boneka. Namun, karena Paman Donald lebih sayang kepada anaknya sendiri daripada keponakannya, ia mengambil 4 dari total mobil mainan untuk diberikan kepada anaknya. Berapa banyak cara Paman Donald membagi oleh-oleh tersebut kepada **keponakannya**?
   (Catatan : keponakan laki-laki hanya mendapatkan mobil mainan. Keponakan perempuan hanya mendapatkan boneka. Anak Paman Donald sudah pasti mendapatkan 4 buah mobil mainan saja).

   Jawaban:

   4 mobil mainan diambil untuk diberikan kepada anak Paman Donald. Tersisa total **7 buah mobil mainan**. Karena masing-masing keponakan laki-laki minimal mendapat 1 buah mobil mainan, maka tersisa **4 mobil mainan** saja untuk dibagikan kepada **3 keponakan laki-laki**.

   M1 = C(4 + 3 – 1, 4) = C(6, 4) = 15

   Ada **8 buah boneka**. Karena masing-masing keponakan perempuan minimal mendapat 1 buah boneka, maka **tersisa 5 boneka** untuk dibagikan kepada **3 keponakan perempuan**.

   M2 = C(5+3 – 1, 5) = C(7, 5) = 21

   Sehingga total ada **M = M1 x M2 = 15 x 21 = 315** cara