

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Relasi dan Fungsi, Aljabar Boolean
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 3 Oktober 2016
Waktu: 55 menit

1. Tentukan sifat refleksi, menghantar, setangkup atau tolak setangkup dari relasi dibawah ini, bila ada sifat yang tidak terpenuhi berikan alasan anda. Setelah itu tentukan juga jenis relasinya (setara, pengurutan parsial, keduanya atau tidak keduanya !
- $\{ (a,b) \mid a \text{ adalah bilangan genap dan } b \text{ adalah bilangan ganjil} \}$
 - $\{ (a,b) \mid a \text{ adalah bilangan prima dan } b \text{ adalah bilangan ganjil} \}$
 - $\{ (a,b) \mid \text{Waktu tempuh } a \text{ ke ITB sama dengan waktu tempuh } b \text{ ke ITB} \}$
 - $\{ (a,b) \mid \text{Selisih tinggi badan } a \text{ dan } b \text{ tidak melebihi } 20 \text{ cm} \}$

Penyelesaian:

- a. Refleksi = Tidak, karena tidak ada bilangan genap = ganjil yang memenuhi (a,a) atau (b,b)
Transitif = Tidak, karena tidak ada bilangan genap = ganjil yang memenuhi (a,b), (b,c) sehingga (a,c) \in R
Setangkup atau tolak setangkup = Tolak setangkup
Jenis relasi = Bukan setara maupun pengurutan parsial
- b. Refleksi = Tidak, karena ada bilangan prima yang tidak ganjil dan ada bilangan ganjil yang bukan bilangan prima. Contoh : 2, 9, 15, dll.
Transitif = Ya

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 0; \\ 1, & \text{jika } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{jika tidak.} \end{cases}$$

setangkup karena ada (a,b) \in R yang pasangan (b,a) nya bukan anggota R, misal : (2,3) \in R tetapi (3,2) tidak ada pada R. Tidak tolak setangkup karena ada (a,b) \in R dan (b,a) \in R tetapi $a \neq b$, misal (3,5) dan (5,3).
Jenis relasi = Bukan setara maupun pengurutan parsial

- c. Refleksi = Ya
Transitif = Ya
Setangkup atau tolak setangkup = Setangkup juga tolak setangkup
Jenis relasi = Setara dan pengurutan parsial
- d. Refleksi = Ya
Transitif = Tidak. Misal ada c dalam relasi, kondisi (a,b), (b,c) sehingga (a,c) \in R hanya terpenuhi apabila selisih tinggi a dan c ≤ 20 .
Setangkup atau tolak setangkup = Setangkup
Jenis relasi = bukan setara maupun pengurutan parsial

2. Tentukan apakah fungsi – fungsi pada himpunan bilangan bulat berikut merupakan fungsi yang surjektif, injektif, dan bijektif. Berikan penjelasannya!

a. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

b. $f(x) = 3 - 2x$

Penyelesaian:

a. Fungsi ini tidak injektif karena terdapat dua elemen dengan bayangan yang sama yaitu $f(1)$ dan $f(0)$. Fungsi ini tidak surjektif karena tidak semua elemen pada himpunan bilangan bulat dapat dipetakan melalui fungsi ini.

Karena fungsi ini tidak injektif dan tidak surjektif, maka fungsi ini bukan merupakan fungsi yang bijektif.

b. Fungsi ini injektif tidak ada elemen yang memiliki bayangan yang sama pada fungsi ini.

Fungsi ini surjektif karena setiap bilangan bulat dapat dipetakan melalui fungsi ini.

Karena fungsi ini injektif dan surjektif, maka dapat disimpulkan bahwa ini merupakan fungsi yang bijektif.

3. Perhatikan fungsi aljabar boolean dibawah: $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz$

a) Buktikan apakah fungsi aljabar boolean diatas ekuivalen dengan $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.

b) Tentukan jumlah *minterm* dan *maxterm*.

c) Nyatakan fungsi boolean diatas dalam bentuk kanonik SOP.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x,y,z) &= xyz + xyz' + xy'z + x'yz \\ &= (xyz + xyz' + xyz) + xyz' + xy'x + x'yz && \text{(Hukum Idempoten)} \\ &= (xyz + xyz') + (xyz + xy'z) + (xyz + x'yz) && \text{(Hukum Asosiatif)} \\ &= (z + z')xy + (y + y')xz + (x + x')yz && \text{(Hukum Penyerapan)} \\ &= xy + xz + yz \text{ (TERBUKTI)} && \text{(Hukum Komplemen)} \end{aligned}$$

b. Minterm = 4

Maxterm = 0

c. $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz$

$$f(x,y,z) = m_7 + m_6 + m_5 + m_3 = \sum (3, 5, 6, 7)$$

4. Mesin jaja minuman atau *vending machine* sudah banyak beredar di masyarakat. Kampus ITB pun tidak mau kalah dalam hal ini, karena baru pertama kali men-implementasikan *vending machine* anda diharapkan membantu perancangan rangkaian logika mesin ini. Karena masih dalam tahap percobaan, minuman yang dijual hanya 1 jenis dan berharga 8 sen. Mahasiswa ITB terkenal irit dalam membawa uang, mereka hanya memiliki uang 3 sen dan 5 sen di dompet. Jika mahasiswa memasukkan uang yang cukup untuk membeli minuman, maka lampu *vending machine* akan menyala dan minuman akan keluar. Sebaliknya, *vending machine* akan menunggu mahasiswa untuk melunasi pembayaran. Hal yang perlu diperhatikan lainnya adalah mesin tidak memiliki fitur uang kembalian. Rancanglah rangkaian logika pada mesin ini.

Catatan: Pembayaran dapat dilakukan dengan koin 3 sen saja atau koin 5 sen saja atau kombinasi keduanya. Karena biaya minuman 8 sen, maka jumlah koin 3 sen yang digunakan maksimal 3 buah (= 9 sen), jumlah koin 5 sen yang digunakan maksimal 2 buah (= 10 sen). Di luar jumlah koin itu, keluaran mesin tidak penting nilainya (kondisi *don't care*). **Kerjakan dengan lengkap, mulai dari pendefinisian berapa variabel yang akan anda gunakan dan apa yang direpresentasikan oleh variabel tersebut. Setelah itu buatlah tabel dan peta *Karnaugh* nya dan berdasarkan hasil penyederhanaan dengan peta *Karnaugh* tersebut, gambarkan rangkaian logika desain anda.**

Penyelesaian:

Terdapat berbagai alternatif jawaban, bergantung pada pemilihan variabel yang digunakan. Berikut salah satu jenis penyelesaian yang mungkin :

a. Jumlah variabel yang digunakan = 4, yaitu (w,x,y,z)

b. Variabel w dan x bersama merepresentasikan jumlah koin 3 sen yang digunakan dalam bentuk biner 2 bit. Variabel y dan z bersama merepresentasikan jumlah koin 5 sen yang digunakan dalam bentuk biner 2 bit.

c. Berikut tabel yang digunakan :

w	x	y	z	Jml. Koin 3 sen	Jml. Koin 5 sen	f(w,x,y,z)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	2	1
0	0	1	1	0	3	X
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	2	X
0	1	1	1	1	3	X
1	0	0	0	2	0	0
1	0	0	1	2	1	X
1	0	1	0	2	2	X
1	0	1	1	2	3	X
1	1	0	0	3	0	1
1	1	0	1	3	1	X
1	1	1	0	3	2	X
1	1	1	1	3	3	X

d. Peta Karnaugh

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	0	1	X	X
11	1	X	X	X
10	0	X	X	X

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	0	1	X	X
11	1	X	X	X
10	0	X	X	X

Hasil penyederhanaan = $y + xz + wx + wz$

e. Desain logika :

