Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Induksi Matematika
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 19 September 2016
Waktu: 55 menit

1. Anda memiliki sebatang coklat berbentuk persegi panjang yang terdiri dari n buah coklat berbentuk persegi. Anda ingin mematahkan batang coklat tersebut menjadi kumpulan persegi-persegi coklat kecil. Dalam mematahkan coklat, anda hanya bisa mematahkan pada garis-garis diantara coklat-coklat persegi. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah pematahan yang harus dilakukan adalah $n - 1$!

Solusi: Selesaikan dengan prinsip induksi kuat

Basis Induksi
Untuk $n = 1$, maka dibutuhkan $n - 1 = 0$ kali pematahan. Ini benar karena coklat hanya punay satu persegi sehingga tidak ada pematahan.

Langkah Induksi
Asumsikan untuk mematahkan sebatang coklat yang terdiri dari n buah coklat persegi ($n = 1, 2, 3, \ldots, k$) dibutuhkan $n - 1$ pematahan adalah benar. (hipotesis induksi)
Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebatang coklat dengan $n + 1$ buah coklat persegi dibutuhkan n pematahan. Caranya sebagai berikut:
Patahkan batang coklat itu sehingga terbagi menjadi dua potongan dengan n_1 persegi dan n_2 persegi, yang dalam hal ini $1 \le n_1 \le n_2 \le (n + 1)$, dan

$$n_1 + n_2 = n + 1$$

Menurut hipotesis induksi, kita dapat mematahkan potongan n_1 sebanyak $n_1 - 1$ kali dan potongan n_2 sebanyak $n_2 - 1$ kali. Sehingga jumlah pematahan seluruhnya adalah

$$1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = (n + 1) - 1 = n$$

Perhatikan bahwa angka 1 berasal dari pematahan pertama menjadi n_1 dan n_2.
Karena langkah 1 basis dan langkah induksi sudah ditunjukkan benar, maka terbukti jumlah pematahan yang harus dilakukan adalah $n - 1$

2. Buktikanlah dengan menggunakan induksi matematika, untuk semua bilangan bulat positif n, bahwa $3^n - 1$ adalah kelipatan 2.

Solusi:
Basis induksi
Untuk $n = 1$, terbukti $3^1 - 1 = 2$, yang merupakan kelipatan dua.

Langkah Induksi:
Asumsi pernyatan tersebut benar untuk $n = k$, yaitu $3^k - 1$ benar (hipotesis)
Maka, untuk $n = k + 1$, kita harus menunjukkan bahwa $3^{k+1} - 1$ juga merupakan kelipatan dua.
Caranya sebagai berikut:

$$3^{k+1} - 1 = 3.3^k - 1$$

Kemudian dipecah menjadi penjumlahan berikut:

$$3^{k+1} - 1 = 3.3^k - 1 = 2.3^k - 1 + (3^k - 1)$$

Karena ($3^k - 1$) adalah kelipatan 2 (dari hipotesis induksi) dan $2.3^k - 1$ adalah kelipatan 2 juga (suatu bilangan 3^k dikali dengan 2, maka terbukti benar bahwa $3^{k+1} - 1$ adalah kelipatan 2 juga.

Karena langkah 1 basis dan langkah induksi sudah ditunjukkan benar, maka terbukti $3^n - 1$ adalah kelipatan 2.

3. Syarat cukup agar Agus menyukai kuliah Matematika Diskrit atau tidak menyukai bermain *game* adalah Agus menyukai kuliah Matematika Diskrit tetapi tetapi tidak menyukai bermain *game*. Ubalah pernyataan diatas kedalam notasi simbolik dan buktikan dengan menggunakan hukum-hukum logika bahwa pernyataan tersebut merupakan sebuah tautologi.

Solusi:

p : Agus menyukai pelajaran matematika diskrit
q : Agus tidak menyukai bermain game

Notasi simbolik:

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

Pembuktian $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ adalah sebuah **tautologi.**

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
$\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$ (Hukum De Morgan)
$\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q)$ (Hukum Asosiatif)
$\Leftrightarrow T \vee T$ (Hukum Negasi)
$\Leftrightarrow T$

4. Budi dapat pergi ke pantai atau ke Puncak pada liburan kali ini. Jika Budi pergi ke Puncak maka ia wajib membawa jaket tebal. Budi tidak ke pantai liburan ini. Oleh karena itu ia wajib membawa jaket tebal. Buktikan dengan tabel kebenaran apakah argumen diatas sahih atau tidak!

Solusi:

Misalkan :
p = Budi pergi ke pantai
q = Budi pergi ke puncak
r = Budi membawa jaket tebal

maka argumen diatas dapat disusun menjadi :

$p \vee q$
$q \rightarrow r$
$\sim p$
----
r

Untuk membuktikan kesahihan argumen, harus diperlihatkan bahwa
$[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim p] \rightarrow r$ merupakan tautologi.

p	q	r	$p \vee q$	$q \rightarrow r$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim p] \rightarrow r$
B	B	B	B	B	S	S	B

B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	B	B	S	S	B
B	S	S	B	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	S	B	B	S	B
S	S	S	S	B	B	S	B

Kesimpulan : argument sahih.

5. Dengan menggunakan prinsip inklusi/eksklusi himpunan, tentukanlah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 125 ($1 \leq x \leq 125$) yang habis dibagi 3 atau 5 tapi tidak keduanya. Formulasikan persoalan ini dalam notasi operasi himpunan.

   Solusi:
   $\left|A\right| = \lfloor 125/3 \rfloor = 41$
   $\left|B\right| = \lfloor 125/5 \rfloor = 25$
   KPK dari 3 dan 5 adalah 15, maka
   $\left|A \cap B\right| = \lfloor 125/15 \rfloor =$
   Sehingga,
   $\left|A \oplus B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - 2\left|A \cap B\right|$
   $\left|A \oplus B\right| = 41 + 25 - 2(8) = 50$

6. Misalkan $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $P = \{c, f\}$, $Q = \{a, c, d, e, f, h\}$, $R = \{c, d, h\}$.
   (a) Tentukan dari P, Q, dan R mana saja yang merupakan *proper subsets* dari yang lainnya! (Tuliskan dengan menggunakan simbol $\subset$)
   (b) Hitung $(Q - R) \oplus P$

   Solusi:

   (a) $P \subset Q$ dan $R \subset Q$
   (b) Q – R = $\{a, e, f\}$
   $(Q - R) \oplus P = \{a, e, f\} \oplus \{c, f\} = \{a, c, e\}$