

Penerapan Teori Graf dalam Jaringan Transpor

Yohanes Jhouma Parulian Napitupulu - 13515053

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13515053@std.stei.itb.ac.id

Abstract—Pada bidang industri, pemindahan suatu komoditas adalah hal yang sangat penting. Tidak semua komoditas dapat diambil dan diolah dari satu tempat, sehingga diperlukannya pemindahan dari suatu titik ke titik lain. Pemindahan yang dilakukan haruslah seefisien mungkin karena itu haruslah didesain jaringan transpor yang paling efisien. Permasalahan ini sesungguhnya dapat diselesaikan dengan *Linear Programming*, namun pada makalah ini saya akan mencoba menunjukkan cara penyelesaian masalah jaringan transpor dengan pendekatan teori graf.

Keywords—Jaringan transpor, kapasitas, graf, arus.

I. PENDAHULUAN

Matematika merupakan suatu bidang yang telah berkembang selama berabad-abad. Hingga kini matematika sudah menjadi suatu alat penyelesaian masalah yang banyak digunakan dalam bidang keilmuan macam-macam. Salah satunya adalah bidang *Operation Research*, yang sarat dengan analisis matematika.

Operation Research adalah bidang yang diperuntukan untuk menganalisis sehingga dapat mengambil keputusan yang lebih baik. Secara formal ilmu ini muncul ketika perang dunia ke-2, saat itu ilmu ini digunakan untuk mengoptimasi penggunaan peralatan militer. Setelah perang usai ilmu ini tetap digunakan, bukan hanya untuk militer, untuk sektor industri juga.

Ada banyak penerapan matematika dalam bidang ini. Diantaranya adalah penggunaan *Linear Programming*, *Non-Linear Programming*. Permasalah-permasalahan yang biasa diselesaikan bidang ini juga biasanya memiliki suatu model matematika, sehingga pemodelan matematika adalah alat yang tepat digunakan untuk bidang ini. Selain penggunaan *vektor* dan *matriks*, salah satu model matematika yang juga dipakai di bidang ini adalah *graf*.

Karena sarat akan matematika tentu saja ada irisan bidang ini dengan bidang *Informatika*. Bidang ini juga banyak menggunakan pemodelan komputasi, ada algoritma-algoritma yang dipelajari di *Informatika* diterapkan oleh bidang ini. Salah satunya adalah *Traveling Salesman Problem (TSP)*, yaitu algoritma yang digunakan untuk mencari sirkuit dengan bobot terkecil, selain itu juga ada penggunaan *Minimum Spanning Tree* yang dapat dicari dengan menggunakan algoritma *Prim*.

Ada banyak masalah yang dibahas oleh bidang ini. Mulai dari memaksimalkan jumlah produksi suatu produk, hingga meminimalkan total biaya produksi, bahkan keduanya sekaligus menghasilkan jumlah produk yang maksimal dengan biaya seminim mungkin.

Salah satu persoalan yang ada dalam bidang ini adalah model transpor (*Transport model / Transport problem*). Secara general model transpor membahas tentang pengiriman suatu komoditas dari sumber (*source*) ke suatu tujuan (*destination*), melalui *station-station*. Dari permasalahan ini diminta agar komoditas yang diangkut semaksimal mungkin.

Sebelum menyelesaikan permasalahan ini data-data yang dimodelkan dalam bentuk-bentuk tertentu. Untuk dapat diselesaikan dengan menggunakan *Linear Programming* akan dimodelkan menggunakan matriks.

Namun tidak menutup kemungkinan untuk menyelesaikannya dengan metode lain. Selain dimodelkan dengan matriks permasalahan ini juga dapat dimodelkan menggunakan graf (khususnya graf berarah).

II. DASAR TEORI DAN TERMINOLOGI

i. Graf

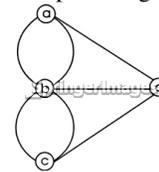
Graf merupakan struktur diskrit yang terbentuk dari sebuah *tuple* yaitu himpunan simpul (*vertices*) dan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul pada graf tersebut. Notasi Graf adalah $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi.

i.i. Jenis-jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang:

i.i.i. Graf Sederhana

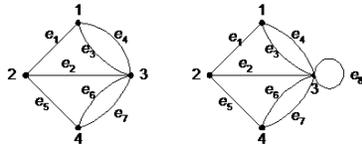
Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.



Gambar 1 : contoh graf sederhana

i.i.ii. Graf tak-sederhana

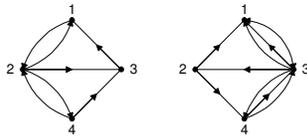
Graf yang mengandung gelang atau sisi ganda disebut graf tak-sederhana



Gambar 2 : contoh graf tak sederhana

Berdasarkan orientasi arah pada sisi:

- i.i.iii. Graf tak-berarah
Graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah. Gambar 1 dan 2 merupakan contoh graf tak berarah
- i.i.iv. Graf berarah
Graf yang sisinya memiliki orientasi arah.



Gambar 3 : contoh graf berarah

i.ii. Terminologi Graf

- i.ii.i. Ketetangan
Dua buah simpul bertetangga jika keduanya dihubungkan oleh sebuah sisi.
- i.ii.ii. Bersisian
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$, dikatakan e bersisian dengan simpul v_j , atau e bersisian dengan simpul v .
- i.ii.iii. Simpul terpencil
simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya.
- i.ii.iv. Graf kosong
graf yang himpunan sisinya kosong.
- i.ii.v. Derajat
Drajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul yang dimaksud
- i.ii.vi. Terhubung
simpul a dan b dikatakan terhubung ketika terdapat lintasan dari a ke b . Graf G dikatakan terhubung jika untuk semua (i,j) terdapat v_i dan v_j sehingga terdapat jalur dari v_i ke v_j .
- i.ii.vii. Upagraf
Misalkan $G = (V,E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1,E_1)$ adalah upagraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.
- i.ii.viii. Komplemen Upagraf
Misalkan $G_1 = (V_1,E_1)$ merupakan upagraf dari $G = (V,E)$ maka $G_2 = (V_2,E_2)$ adalah komplemen upagraf dari G jika $V_2 = V - V_1$ dan $E_2 = E - E_1$.

- i.iii.ix. Cut-Set
Cut-Set dari sebuah graf terhubung adalah himpunan sisi yang bila dibuang menyebabkan graf tak terhubung

- i.ii.x. Graf Berbobot
Graf yang tiap-tiap sisinya diberi bobot.

i.iii. Graf khusus

- i.iii.i. Graf Lengkap
Graf yang setiap simpul memiliki sisi ke simpul lainnya.
- i.iii.ii. Graf Lingkaran
Graf yang membentuk sebuah poligon.
- i.iii.iii. Graf Bipartite
Graf yang simpulnya terbagi menjadi dua Himpunan V_1 dan V_2 sehingga simpul-simpul di V_1 tidak terhubung dengan sesamanya dan simpul V_2 juga demikian.

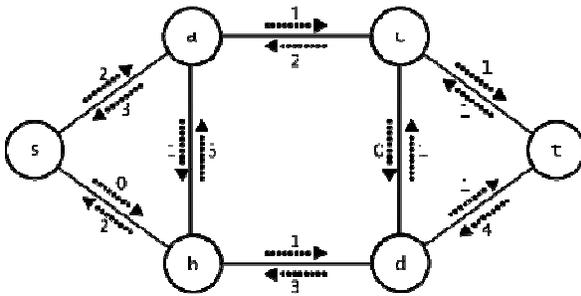
ii. Jaringan transpor

- ii.i.i. Kapasitas
Disimbolkan c_{ij} , diartikan sebagai jumlah komoditas maksimum yang dapat dikirim dari *station i* ke *station j*.
- ii.i.ii. Source
Merupakan terminal darimana komoditas berasal dan akan dikirim
- ii.i.iii. Destination
Terminal kemana komoditas akan dikirimkan

ii.i.iv. *Cut capacity*
memiliki notasi $c(P, \bar{P})$ dimana P adalah upagraf dari jaringan transpor G , dimana terminal *source* masuk didalamnya, dan \bar{P} adalah komplemen upagraf tersebut dan *destination* masuk didalamnya. Kapasitasnya adalah jumlah dari setiap sisi yang berasal dari simpul di P ke simpul di P^c .

$$\sum_{\substack{i \in P \\ j \in \bar{P}}} c_{ij} = c(P, \bar{P}).$$

III. PEMODELAN DAN PERHITUNGAN ARUS TERBESAR DARI SOURCE KE DESTINATION JARINGAN TRANSPOR DENGAN GRAF



Gambar 4 : Contoh graf representasi jaringan transpor

Misalkan graf diatas $G = (V,E)$.

Pada graf ini kita lambangkan *station-station* sebagai simpul dimana simpul s adalah *source* dan simpul t adalah *destination*

Kapasitas antar *station* disimbolkan pada sisi yang diberi bobot c_{ij} dimana $i \in V$ dan $j \in V$.

Yang perlu diselesaikan adalah bagaimana kita dapat mengetahui arus terbesar komoditas yang bisa dikirim dari *source* ke *destination*.

Permasalahan ini pertama dimodelkan dalam bentuk matematis.

Arus maksimum : di dalam graf G , suatu arus adalah nilai non-negatif f_{ij} untuk tiap sisi berarah (i,j) sehingga:

- Untuk tiap sisi (i,j) di graf G :

$$f_{ij} \leq c_{ij}$$

- Untuk *source* s :

$$\sum_i f_{si} - \sum_i f_{is} = w$$

- Untuk *destination* t

$$\sum_i f_{it} - \sum_i f_{ti} = -w$$

- Untuk simpul sisanya

$$\sum_i f_{ji} - \sum_i f_{ij} = 0$$

Kondisi-kondisi diatas menyatakan bahwa besar arus tidak akan melebihi kapisitas sisi yang dilewatinya, dan juga bahwa arus bersih yang bisa keluar adalah w .

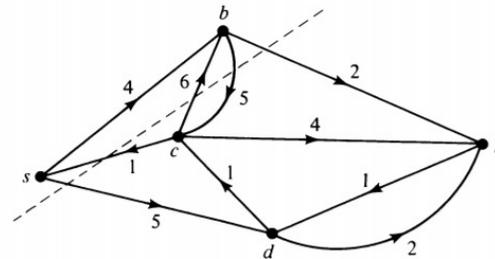
Sekarang kita harus memaksimalkan w agar bisa mendapat nilai arus yang paling besar, sehingga pemindahan komoditas lebih efektif.

Untuk menyelesaikan masalah ini dengan *Linear Programming*, haruslah dibuat vektor berdimensi N terlebih dahulu lalu menemukan matriks yang tepat agar mendapatkan nilai w yang maksimal. Penyelesaian masalah ini akan lebih efektif dan efisien dengan menggunakan teori graf. Terdapat dua teorema untuk menyelesaikan permasalahan ini:

- Teorema I
Untuk setiap jaringan transpor G , nilai arus w dari *source* ke *destination* lebih kecil atau sama dengan nilai *cut capacity* dari graf tersebut.
- Teorema II (*Max-Flow Min-Cut*)
Untuk setiap jaringan transpor G , nilai arus maksimum dari *source* ke *destination* adalah nilai minimum dari nilai-nilai *cut capacity*-nya.

Dengan kedua teorema tersebut dapat dicari nilai arus w terbesar yang bisa didapat, namun kedua teorema tersebut tidak dapat menentukan jalur mana yang harus diambil agar mendapat nilai w yang maksimal. Untuk menentukan jalur mana yang memberikan nilai arus w terbesar dapat menggunakan algoritma lain, yang tidak akan saya bahas di makalah ini.

Akan diselesaikan suatu kasus sederhana sebagai contoh:



Gambar 5 : Contoh lain jaringan transpor

Pada graf ini diminta untuk mencari arus terbesar yang dapat dikirim dari *source* s ke *destination* t . dengan teorema I kita bahwa nilai arus f maksimalnya lebih kecil dari nilai $c(P, \bar{P})$. Salah satu contoh $c(P, \bar{P})$:

- $P = \{s, c\}$
- $\bar{P} = \{b, d, t\}$

Pada contoh ini nilai dari $c(P, \bar{P})$ adalah 19 didapat dari: $(C_{sb} + C_{sd} + C_{cb} + C_{ct} = 4 + 5 + 6 + 4 = 19)$. Namun belum tentu ini merupakan nilai f yang maksimal. Menurut Teorema II nilai f maksimal ketika nilai $c(P, \bar{P})$ minimal, karena itu untuk mendapat nilai $c(P, \bar{P})$ yang minimal perlu melakukan pendaftaran semua nilai $c(P, \bar{P})$ graf jaringan transpor.

P	\bar{P}	$c(P, \bar{P})$
$\{s\}$	$\{b,c,d,t\}$	9
$\{s,b\}$	$\{c,d,t\}$	12
$\{s,c\}$	$\{b,d,t\}$	19
$\{s,d\}$	$\{c,b,t\}$	7
$\{s,b,c\}$	$\{d,t\}$	11
$\{s,b,d\}$	$\{c,t\}$	10
$\{s,c,d\}$	$\{b,t\}$	16

{s,b,c,d}	{t}	8
-----------	-----	---

Bila dilihat dari tabel dapat disimpulkan nilai

$c(P, P)$ terkecil adalah 7, sehingga nilai arus f terbesar adalah 7. Dalam kasusu ini coba saya jabarkan alur transpor agar lebih jelas:

- $f_{sb} = 4$
- $f_{sd} = 3$
- $f_{bt} = 2$
- $f_{bc} = 2$
- $f_{dt} = 2$
- $f_{dc} = 1$
- $f_{ct} = 3$

Jadi, total arus yang masuk ke *destination t* adalah

$$f_{bt} + f_{dt} + f_{ct} = 2 + 2 + 3 = 7.$$

Berbeda dengan menggunakan *Linear Programming* yang diharuskan melambangkan semuanya kedalam matriks terlebih dahulu. Dengan menggunakan graf menyelesaikan masalah ini lebih efisien karena sedikitnya langkah-langkah yang harus dilakukan.

IV. KESIMPULAN

Salah satu kegunaan teori graf adalah pemodelan jaringan transpor. Graf yang digunakan untuk memodelkan jaringan transpor ini adalah graf berarah dan berbobot. Dengan menggunakan graf juga bisa didapat perhitungan arus maksimal yang dapat dikirim, sehingga dapat memaksimalkan pemindahan komoditas.

Permasalahan ini akan terus ada selama industri masih ada. Penggunaan graf ini salah satu cara yang tepat dalam penyelesaian persoalan ini karena efisien, namun dalam kenyataannya ini saja belum cukup untuk menjadikan transpor komoditas paling efektif, karena ada faktor-faktor lain yang mempengaruhinya seperti biaya pengiriman jumlah produksinya, dll.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena hanya oleh kasih-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini. Penulis juga berterima kasih kepada dosen mata kuliah Matematika Diskrit, Bapak Dr. Ir.Rinaldi Munir, M. T. dan Ibu Dra. Harlili, M. Sc. atas bimbingannya selama satu semester ini, sehingga penulis dapat menulis makalah ini.

References

- [1] Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit*, Bandung: Informatika, 2010
- [2] N. Deo, *Graph theory with applications to engineering and computer science - Narsingh Deo - hardcover*. United States: Prentice-Hall, 1974.

- [3] H. A. Taha, *Operations research: An introduction*, 8th ed. United States: Prentice Hall, 2006.
- [4] Mr Steve Dennis - STEM Learning, "Networks - maximum flow," in *YouTube*, YouTube, 2014. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=CO2jSOGLrSQ>. Accessed: Dec. 7, 2016.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016



Yohanes Jhouma Parulian - 13515053